УДК 517.91

ОБ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ КУСОЧНО-АФФИННЫХ СИСТЕМ

Ю.И.Гильдерман (Новосибирск)

1. Постановка задачи

Один из признаков, отличающих негрубые системы от грубых, состоит в наличии траекторий, "особенность" которых проявляется на их обоих концах - сепаратрис, идущих из седла в седло, или сепаратрис, образующих петли. В [1] был построен простой пример непрерывной кусочно-аффинной системы, обладающей сепаратрисой, идущей из седла в седло. В настоящей работе решается более общая задача - построение кусочно-аффинных систем, траектории которых соединяют пару заданных точек. Это, в частности, дает возможность построить непрерывные кусочно-аффинные системы с петлями сепаратрис, а также с сепаратрисами, идущими из седла в седло, с циклами, содержащимися один в другом, и некоторые другие.

Напомним [2], что динамическую систему

$$x' = f(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

мы называем непрерывной кусочно-аффинной, если $f(x)$ непрерывна и

$$f(x) = A_k x + b_k$$

при $x \in G_k$; $\bigcup_{k=1}^{N} G_k = R^n$, $\dim G_k \cap G_j \leq n-1$, $k \neq j$; (2)

A_k и b_k постоянны.

Слово "непрерывная" мы для краткости будем опускать. Области G_k будем называть областями аффинности $f(x)$, а равенство (2) - аффинным представлением $f(x)$ в G_k. Из непрерывности $f(x)$ следует [2], что для областей G_k и G_j таких, что $G_k \cap G_j \neq \emptyset$, выполняется равенство

$$A_k = A_j + \alpha\beta, \quad b_k = b_j - \alpha h, \tag{3}$$

где $\beta x = h$ - уравнение пересечения $G_k \cap G_j$.

2. Некоторые свойства векторов и матриц

Нам потребуются некоторые свойства квадратных матриц второго порядка и двумерных векторов.

Пусть z - строка, $z=(z_1,z_2)$, или столбец, $z=(z_1,z_2)^*$. Образуем векторы $z^\perp$ по формулам: $z^\perp = Jz^* = (z_2, -z_1)^*$ для строки и $z^\perp = z^*J = (-z_2, z_1)$ для столбца, где J -матричная мнимая единица, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для любого z очевидно, что $(z^\perp)^\perp = z$. Кроме того, легко проверить равенства

$$zz^\perp = 0,\ xy^\perp + yx^\perp = 0,\ \det\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy^\perp \tag{4}$$

для строк

и $$z^\perp z = 0,\ xy^\perp - yx^\perp = y^\perp x E,\ \det(x|y) = x^\perp y \tag{5}$$

для столбцов.

Пусть теперь имеется некоторая матрица второго порядка A. Рассмотрим вместе с нею присоединенную матрицу $A^\vee = E\,Sp\,A - A$. Пользуясь равенством $JA^\vee = A^*J$, найдем

$$(Az)^\perp = z^\perp A^\vee \quad \text{и} \quad (zA)^\perp = A^\vee z^\perp. \tag{6}$$

Использовав (6) и положив во втором равенстве (4) $x=u$, $y=vA^\vee$, получим для строк u, v:

$$uAv^\perp + vA^\vee u^\perp = 0. \tag{7}$$

Положив $x=z$, $y=A^\vee z$ во втором равенстве (5), получим для столбца z:

$$zz^\perp A - A^\vee zz^\perp = z^\perp A z E. \tag{8}$$

Аналогично, положив $x = Az^\perp$, $y = z^\perp$, получим для строки z:

$$Az^\perp z - z^\perp z A^\vee = zAz^\perp E. \tag{8'}$$

Далее, пусть q_1 и q_2 - столбцы некоторой матрицы Q. Тогда

$$Q^\vee = (q_1|q_2)^\vee = -JQ^*J = -J\begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} -q_2^\perp \\ q_1^\perp \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Аналогично, если q_1 и q_2 - строки матрицы Q, то

$$Q^\vee = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^\vee = (q_2^\perp | -q_1^\perp). \tag{10}$$

Заметим, наконец, что если x - столбец, а y - строка, то

$$(xy)^\vee = -J(xy)^*J = -y^\perp x^\perp. \tag{11}$$

Нам потребуются также некоторые равенства, связанные с матрицей $A+\alpha\beta$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^*$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Легко проверить, что

$$|A+\alpha\beta| = |A| - \alpha^\perp A\beta^\perp = |A| + \beta A^\vee \alpha. \tag{12}$$

Отсюда видно, что при $A\beta^\perp \neq 0$ всегда можно указать такое α, что $|A+\alpha\beta| \neq 0$. В этом случае в силу (11) можем написать

$$(A+\alpha\beta)^{-1} = \frac{(A+\alpha\beta)^\vee}{|A+\alpha\beta|} = \frac{A^\vee - \beta^\perp\alpha^\perp}{|A| - \alpha^\perp A\beta^\perp}. \tag{13}$$

Далее, характеристическому уравнению $|A+\alpha\beta - \lambda E| = 0$ в силу (12) можно придать вид $|A-\lambda E|+\beta(A^{\vee}-\lambda E)\alpha=0$ или

$$\lambda^2-\lambda(SpA+\beta\alpha)+|A|+\beta A^{\vee}\alpha=0.$$

Отсюда и из формул Виетта $\beta\alpha=\lambda_1+\lambda_2-SpA,\ \beta A^{\vee}\alpha=\lambda_1\cdot\lambda_2-|A|$, пользуясь (4) и (10), легко найдем

$$\alpha=\frac{1}{\beta A\beta^{\perp}}\left[A\beta^{\perp}(\lambda_1+\lambda_2-SpA)-\beta^{\perp}(\lambda_1\lambda_2-|A|)\right]. \qquad (14)$$

Заметим, что эта формула справедлива лишь в предположении, что $\beta A\beta^{\perp}\neq 0$, т.е что $\beta^{\perp}$ не является собственным вектором матрицы A. В противном случае $A\beta^{\perp}=\mu\beta^{\perp}$, и, следовательно, $(A+\alpha\beta)\beta^{\perp}=A\beta^{\perp}=$ $=\mu\beta^{\perp}$, т.е. матрицы A и $A+\alpha\beta$ имеют общими одно собственное число и один собственный вектор. Мы не будем рассматривать это "необщее" положение, предполагая, что при заданной матрице A вектор β выбирается так, что $\beta A\beta^{\perp}\neq 0$.

В дальнейшем нам придется рассматривать линейные системы $x'=Bx$, матрица B которых имеет различные собственные числа λ_1,λ_2. В качестве собственных векторов этой матрицы мы будем брать вектоpы $p_i=(B^{\vee}-\lambda_i E)q$, где q - произвольный вектор, а в качестве фундаментальной матрицы $M(t)=$ $=P\,diag\,(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t})P^{-1}$, где $P=(p_1|\,p_2)$. Так как $P=B^{\vee}q\,(1,1)-$ $-q\,(\lambda_1,\lambda_2)$, то, пользуясь (9) и (12), получаем

$$M(t)=\frac{1}{\det P}\left[e^{\lambda_2 t}p_2p_1^{\perp}-e^{\lambda_1 t}p_1p_2^{\perp}\right]=\frac{1}{qBq^{\perp}}\left[e^{\lambda_2 t}p_2p_1^{\perp}-e^{\lambda_1 t}p_1p_2^{\perp}\right]\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}. \qquad (15)$$

Для выбранных собственных векторов выполняется равенство

$$p_i\,p_{3-i}^{\perp}=-\,q^{\perp}Bq\,(B-\lambda_{3-i}E),\quad i=1,2. \qquad (16)$$

(Оно следует из (8) и теоремы Гамильтона-Кэли.) Отсюда и из (15) непосредственно вытекает известное представление $M(t)=e^{Bt}$ в виде полинома Лагранжа-Сильвестра:

$$e^{Bt}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[e^{\lambda_1 t}(B-\lambda_2E)-e^{\lambda_2 t}(B-\lambda_1E)\right].$$

Как правило, в качестве матрицы B мы будем рассматривать $B=A+\alpha\beta$, где A и β заданы, а α выбирается из тех или иных соображений. Для собственных векторов матрицы $A+\alpha\beta$ подобно предыдущему можно взять

$$p_i=(A+\alpha\beta-\lambda_iE)^{\vee}q.$$

Положив $q=\alpha$, получим $p_i=(A^{\vee}-\beta^{\perp}\alpha^{\perp}-\lambda_iE)\alpha=(A^{\vee}-\lambda_iE)\alpha$ с сохранением формул (15) и (16).

3. Лемма о продолжении

При конструировании заданных полей мы будем опираться на решение следующей "краевой" задачи. Пусть вне некоторого угла G со сторонами Γ_i, $i=1,2$, задана непрерывная кусочно-аффинная функция $f(x)$ так, что снаружи к каждому лучу Γ_i примыкает только одна область аффинности $f(x)$. На лучах Γ_i отмечено по одной (отличной от вершины) точке. Требуется так доопределить $f(x)$ в G, чтобы она всюду была непрерывной кусочно-аффинной, чтобы в G не было точек покоя и чтобы система $x'=f(x)$ имела траекторию, проходящую через отмеченные точки. В этом разделе докажем лемму, с помощью которой решается подобная задача.

Найдем сначала аффинное представление $f(x)$ в G, если угол G представляет собой только одну область аффинности.

Не нарушая общности, можем считать, что вершина G совпадает с началом координат. Тогда $G=\{x \mid \beta_1 x \geq 0,\ \beta_2 x \leq 0\}$ и лучи, его ограничивающие $\Gamma_i=\{x \mid x=k\beta_i^{\perp},\ k \geq 0\}$, если $\beta_1\beta_2^{\perp}>0$. (Это означает, что β_1 направлен внутрь угла G, а β_2 во не.)

Пусть $f(x)=A_i x+b_i$ в области, примыкающей к лучу Γ_i вне G, и $f(x)=Ax+b$ внутри G. Тогда, в силу (3), $A=A_i+\alpha_i\beta_i$, $b=b_i-\alpha_i h_i=b_i$, $i=1,2$, так как $h_i=0$, а в силу непрерывности, $Ak\beta_i^{\perp}+b=A_i k\beta_i^{\perp}+b_i$. Отсюда $A\beta_i^{\perp}=A_i\beta_i^{\perp}$, $i=1,2$, и после умножения первого из этих равенств справа на β_2, а второго на β_1, получим, пользуясь (5),

$$A=\frac{A_2\beta_2^{\perp}\beta_1-A_1\beta_1^{\perp}\beta_2}{\beta_1\beta_2^{\perp}}. \tag{17}$$

При этом из (12) легко следует, что

$$|A|=\frac{\beta_1 A_1^{\vee}A_2\beta_2^{\perp}}{\beta_1\beta_2^{\perp}}. \tag{18}$$

В общем случае кусочно-аффинная система с построенной матрицей A может не обладать траекторией, проходящей через отмеченные точки на лучах. Поэтому мы будем строить продолжение $f(x)$, разбивая угол G на две области аффинности лучом, выходящим из вершины. Для наших целей достаточно рассмотреть тот случай, когда стороны угла являются лучами без контактов.

Пусть для определенности при $x\in\Gamma_1$ выполняется неравенство $\beta_1 f(x)>0$, т.е. $\beta_1 f(k\beta_1^{\perp})>0$, $k\geq 0$. Если $f(x)=A_1x+b$ - аффинное представление $f(x)$ в области, примыкающей к Γ_1 снаружи, то написанное неравенство принимает вид $k\beta_1A_1\beta_1^{\perp}+\beta_1 b>0$, $k\geq 0$. Если $\beta_1 b=0$, то это значит, что $\beta_1A_1\beta_1^{\perp}>0$. Если же $\beta_1 b\neq 0$, то $\beta_1 A\beta_1^{\perp}\geq 0$ и $\beta_1 b>0$. В последнем случае нестрогое неравенство можно заменить строгим. Иными словами, будем предполагать, что вектор $\beta_1^{\perp}$ не является собственным вектором матрицы A_1.

Лемма. Пусть вне угла G задана кусочно-аффинная непрерывная функция $f(x)$ так, что направления поля на сторонах угла, являющихся лучами без контактов, совпадают. Пусть x_i^0, $i=1,2$, - отмеченные точки на сторонах угла

Γ_i . Тогда существует продолжение f в G , при котором G разбивается на два угла, каждый из которых является областью аффинности f , причем всякая траектория, начинающаяся на Γ_1 , пересекает угол G вплоть до Γ_2 , а траектория, выходящая из точки $x_1^0 \in \Gamma_1$, проходит через точку $x_2^0 \in \Gamma_2$.

Доказательство. Как мы уже отмечали, не нарушая общности, можно считать, что вершина угла G является началом координат, и если $A_i x + b$ - аффинное представление $f(x)$ в областях, примыкающих к Γ_i снаружи, а β_i - нормали к Γ_i , то

$$\beta_i A_i \beta_i^{\perp} > 0, \quad \beta_i b \geq 0 , \quad \beta_1 \beta_2^{\perp} > 0.$$

Проведем луч

$$\Gamma_0 = \{x \mid \beta_1 x \geq 0, \beta_0 x = 0, \ \beta_0 = \gamma\beta_1 + (1-\gamma)\beta_2 , \ 0<\gamma<1\}.$$

Для областей

$$G_i = \{x \mid (-1)^{i-1} \beta_i x \geq 0, (-1)^i \beta_0 x \geq 0\}$$

имеем соответственно $f(x) = B_i x + b$, $i=1,2$. При этом, в силу (3) ,

$$B_1 = A_1 + \alpha_1 \beta_1 , \quad B_2 = B_1 + \alpha\beta_0 , \quad A_2 = B_2 + \alpha_2 \beta_2 . \tag{19}$$

Отсюда после сложения имеем

$$A_2 - A_1 = (\alpha_1 + \gamma\alpha)\beta_1 + [\alpha_2 + (1-\gamma)\alpha] \beta_2 .$$

Умножив это равенство справа сначала на $\beta_1^{\perp}$, а затем на $\beta_2^{\perp}$, мы сумеем выразить α_i через α . Подставив полученное выражение в (19) и воспользовавшись еще раз вторым равенством (5) , можем написать

$$B_i = A_i + \frac{(A_2 - A_1)\beta_{3-i}^{\perp}\beta_i}{\beta_1\beta_2^{\perp}} + \gamma_i\alpha\beta_i = A + \gamma_i\alpha\beta_i , \quad i=1,2,$$

где A - матрица, определяемая формулой (17) , и для симметрии обозначим $\gamma_1 = -\gamma$, $\gamma_2 = 1-\gamma$.

Для траекторий соответствующих систем $x' = (A + \gamma_i\alpha\beta_i)x + b$, $i=1,2$, имеем:

$$x_i(t) = M_i(t)[k_{2-i}\beta_{2-i}^{\perp} - z_i] + z_i ,$$

где $k_{2-i} > 0$, $M_i(t) = e^{(A+\gamma_i\alpha\beta_i)t}$, $z_i = -(A+\gamma_i\alpha\beta_i)^{-1} b = \dfrac{-A^{\vee} - \gamma_i\beta_i^{\perp}\alpha_i^{\perp}}{\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)}} b$,
$\lambda_k^{(i)}$ - собственные числа матрицы

Потребуем прежде всего, чтобы траектория первой из этих систем, начинающаяся в точке $x_1(0) = k_1\beta_1^{\perp}$, при некотором $t_1 > 0$ пересекала луч Γ_0 , т.е. чтобы при любом $k_1 > 0$ нашлось такое $t_1 > 0$, что

$$\beta_0 x_1(t_1) = 0. \tag{20}$$

и затем, чтобы траектория второй системы, начинающаяся в точке $x_1(t_1)$, при некотором $t_2 > 0$ пересекала луч Γ_2 , т.е. чтобы

$$\beta_2 x_2(t_2) = \beta_2 M_2(t_2)[x_1(t_1) - z_2] + \beta_2 z_2 = 0, \ t_2 > 0 . \tag{21}$$

Если при любом $k_1>0$ такие $t_1>0$ и $t_2>0$ найдутся, то это будет означать, что все траектории системы $x'=f(x)$, где $f(x)=(A+\gamma_i\alpha\beta_i)x+b$, $x\in G_i$, пересекают угол G от одной его стороны до другой.

Роль параметров при поиске решений уравнений (20) и (21) играют скаляр $\gamma_{(i)}$ и вектор α. Вместо α можно использовать пару собственных чисел $\lambda_k^{(i)}$, $k=1,2$, однозначно связанную с α и с $\lambda_k^{(2)}$ в силу (14):

$$\alpha=\frac{1}{\gamma_i\beta_i A\beta_i^\perp}\left[A\beta_i^\perp(\lambda_1^{(i)}+\lambda_2^{(i)}-SpA)-\beta_i^\perp(\lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)}-|A|)\right],\ i=1,2. \tag{22}$$

Рассмотрим сначала уравнение (20), обозначив для удобства $\lambda_k^{(1)}=\lambda_k$. Пользуясь (15) и (16), можем написать

$$x_1(t_1)=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\frac{p_1c_1}{\beta_1p_1}e^{\lambda_1t_1}-\frac{p_2c_2}{\beta_1p_2}e^{\lambda_2t_1}\right]-\frac{A^\vee-\gamma_1\beta_1^\perp\alpha^\perp}{\lambda_1\lambda_2}b, \tag{23}$$

где $c_k=\beta_1p_k p_{3-k}^\perp\left[k_1\beta_1^\perp-z_1\right]\frac{1}{\alpha^\perp A\alpha}=$

$$=\beta_1\left(A+\gamma_1\alpha\beta_1-\lambda_{3-k}E\right)(k_1\beta_1^\perp-z_1)=\frac{1}{\lambda_k}\beta_1A^\vee b-k_1\beta_1A\beta_1^\perp-\beta_1b.$$

Отсюда следует, что уравнению (20) можно придать вид

$$\tilde c_1e^{\lambda_1t_1}-\tilde c_2e^{\lambda_2t_1}+\tilde q=0, \tag{24}$$

где $$\tilde c_k=c_k\frac{\beta_1A\beta_1^\perp}{\beta_1p_k}(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)p_k=(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)p_kp_{3-k}^\perp\beta_1^\perp\times$$

$$\times\frac{c_k\beta_1A\beta_1^\perp}{\beta_1p_kp_{3-k}^\perp\beta_1^\perp}=\left[(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A\beta_1^\perp+\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp\lambda_{3-k}\right]c_k \tag{25}$$

в силу (16), и

$$\tilde q=(\lambda_2-\lambda_1)(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)z_1\beta_1A\beta_1^\perp=\beta_1A\beta_1^\perp\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\left[(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A^\vee-\gamma_2\gamma_1\beta_2\beta_1^\perp\alpha^\perp\right]b=$$

$$=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\Big\{(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)\beta_1A\beta_1^\perp A^\vee+\gamma_2\beta_2\beta_1^\perp(SpA\beta_1A^\vee-\beta_1A^\vee A)+$$

$$+\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp\left[(\lambda_1+\lambda_2)\beta_1A^\vee-\lambda_1\lambda_2\beta_1\right]\Big\}b=$$

$$=(\lambda_2-\lambda_1)\left\{\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp\beta_1b-\frac{\beta_1A^\vee b}{\lambda_1\lambda_2}\left[(\beta_2\gamma_2-\beta_1\gamma_1)A\beta_1^\perp+(\lambda_1+\lambda_2)\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp\right]\right\} \tag{26}$$

в силу (22) и (8').

Так как $\tilde c_1+\tilde q-\tilde c_2=-k_1\beta_1A\beta_1^\perp\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp(\lambda_2-\lambda_1)<0$ при $\lambda_2-\lambda_1>0$, то уравнение (24), т.е. (20), имеет положительное решение t_1 при любом $k_1>0$, если $\tilde c_2<0$, т.е. если, например,

$$\frac{1}{\lambda_2}\beta_1 A^{\vee} b - k_1\beta_1 A\beta_1^{\perp} - \beta_1 b < 0,\ (\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A\beta_1^{\perp} + \gamma_2\beta_1\beta_2^{\perp}\lambda_1 > 0. \qquad (27)$$

Эти неравенства вместе с условием $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ выполняются при достаточно большом положительном λ_2 и $\gamma_2\beta_1\beta_2^{\perp}\lambda_1 > (\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A\beta_1^{\perp}$. При этих λ_k все траектории, начинающиеся на луче Γ_1, достигают луча Γ_0.

Займемся теперь уравнением (21). Заметим прежде всего, что $x_1(t_1) = k_0\beta_0^{\perp} = k_0(\gamma_2\beta_2^{\perp} - \gamma_1\beta_1^{\perp})$. Отсюда $k_0 = \dfrac{\beta_1 x_1(t_1)}{\gamma_2\beta_1\beta_2^{\perp}}$, что вместе с (23) и (24) дает

$$k_0 = \frac{-c_2 e^{\lambda_2 t_1} - \beta_1 b + \frac{1}{\lambda_2}\beta_1 A^{\vee} b}{(\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A\beta_1^{\perp} + \gamma_2\beta_1\beta_2^{\perp}\lambda_2}. \qquad (28)$$

Имея это в виду, а также используя (15) и (16), перепишем (21) в виде

$$d_1 e^{\mu_1 t_2} - d_2 e^{\mu_2 t_2} - \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2\mu_1}\beta_2 A^{\vee} b = 0, \qquad (29)$$

где для удобства обозначено $\lambda_k^{(2)} = \mu_k$ и

$$d_k = \beta_2 (A + \gamma_2\alpha\beta_2 - \mu_{3-k}E)(k_0\beta_0 - z_2) =$$

$$= \frac{1}{\mu_k}\beta_2 A^{\vee} b - \beta_2 b - k_0\left[\gamma_1\mu_k\beta_1\beta_2^{\perp} + (\gamma_2\beta_2-\gamma_1\beta_1)A\beta_2^{\perp}\right],\ k=1,2.$$

Чтобы установить существование положительного решения t_2 у этого уравнения, мы по-прежнему должны исследовать знак выражения

$$d_1 - d_2 - \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1\mu_2}\beta_2 A^{\vee} b$$

в зависимости от того или иного выбора μ_k. Однако этот выбор уже не является свободным, так как μ_k связаны с λ_k равенством (22). Кроме того, от λ_k, по формуле (28), зависит и k_0. Таким образом, необходимо μ_k выразить через λ_k или те и другие выразить через какие-нибудь промежуточные параметры. Понятно при этом, что, например, t_1 - решение уравнения (24) - в общем случае мы не сможем выразить явно через λ_k. Поэтому нам придется использовать какие-нибудь "крайние", например, очень большие значения λ_k и μ_k.

Обозначим $\beta_i\alpha = \xi_i$. Из (22) имеем

$$\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)} = \gamma_i\xi_i + \mathrm{Sp}A,\quad \lambda_1^{(i)}\lambda_2^{(i)} = \frac{\gamma_i}{\beta_{3-i}\beta_i^{\perp}}(\beta_{3-i}\xi_i - \beta_i\xi_{3-i})A\beta_i^{\perp} + |A|.$$

Отсюда, положив $\xi_2 = \tau\xi_1 = \tau\xi$, $\tau > 0$, получим при больших $|\xi|$, $\xi < 0$, с точностью до бесконечно малых

$$\lambda_2^{(i)} = \gamma_1 \xi + SpA + \frac{(-1)^i}{\beta_1\beta_2^\perp}\left(\tau^{3-2i}\beta_i - \beta_{3-i}\right)A\beta_i^\perp ,$$
$$\lambda_1^{(i)} = \frac{(-1)^{i+1}}{\beta_1\beta_2^\perp}\left(\tau^{3-2i}\beta_i - \beta_{3-i}\right)A\beta_i^\perp . \tag{30}$$

Значения ξ и τ мы и возьмем в качестве новых параметров. Заметим прежде всего, что при выбранных знаках ξ и τ, если $|\xi|$ достаточно велико, оба неравенства (27) выполняются вместе с неравенством $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ и, следовательно, уравнение (20) имеет положительное решение t_1. При этом λ_2 положительно и сколь угодно велико, а λ_1 ограничено. Отсюда следует, что значение $e^{\lambda_1 t_1}$ можно сделать сколь угодно близким к 1, а $\tilde{c}_2 e^{\lambda_2 t_1}$ сколь угодно близким к $\tilde{c}_1 + \tilde{y} = -k_1\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp(\lambda_2-\lambda_1)\beta_1 A\beta_1^\perp +$ $+ \tilde{c}_2$. Так как после подстановки значения λ_1 выполняется
$$\tilde{c}_2 = [\tau(1-\gamma)+\gamma]\beta_1 A\beta_1^\perp\left(\frac{1}{\lambda_2}\beta_1 A^{\vee} b - \beta_1 \beta_1^\perp k_1 - \beta_1 b\right),$$
то вместе с предыдущим равенством получаем, что $\tilde{\tilde{c}}_2 e^{\lambda_2 t_1} \simeq$
$$\simeq \beta_1 A\beta_1^\perp\left[(\gamma_2\tau-\gamma_1)\left(\frac{1}{\lambda_2}\beta_1 A^{\vee} b - \beta_1 b\right) - k_1\left(\gamma_2\beta_1\beta_2^\perp i_2 + (\gamma_2\beta_2 - \gamma_1\beta_1)A\beta_1^\perp\right)\right].$$
Отсюда и из (28) следует, что $k_0 \simeq \frac{k_1}{\gamma_2\tau - \gamma_1}$.

Теперь мы можем перейти к анализу уравнения (21). Из (30) следует, что при выбранных значениях ξ и τ, т.е. при $\xi < 0$, $\tau > 0$ и $|\xi|$ достаточно большом, собственное число μ_2 отрицательно и сколь угодно велико по модулю, а μ_1 ограничено. Зная выражение последнего и значение k_0, найдем, что
$$d_1 - \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1\mu_2}\beta_2 A^{\vee} b \simeq -\beta_2 b - \frac{k_1}{\tau}\beta_2 A\beta_2^\perp + \frac{1}{\mu_2}\beta_2 A^{\vee} b < 0$$
при достаточно большом $|\xi|$, т.е. при достаточно большом $|\mu_2|$. Кроме того, $d_1 - d_2 - \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1\mu_2}\beta_2 A^{\vee} b = k_0\gamma_1\beta_1\beta_2^\perp(\mu_2-\mu_1) > 0.$
Отсюда следует, что при выбранных ξ и τ уравнение (21) также имеет положительное решение t_2.

Итак, если выбрать α таким, чтобы $\beta_1\alpha = \xi_1 = \xi$ было достаточно большим по модулю и отрицательным, а $\beta_2\alpha = \xi_2 = \tau\xi_1$, $\tau > 0$, то все траектории системы $x' = f(x)$, $f(x) = (A + \gamma_i\alpha\beta_i)x + b$, при $x \in G_i$, начинающиеся на одном из граничных лучей, пересекают угол G вплоть до его другого граничного луча.

Для завершения доказательства леммы мы должны показать, что ξ и τ можно выбрать так, что найдется траектория, соединяющая выбранные точки на лучах, например, $x_1^0 = \beta_1^\perp$ и $x_2^0 = \beta_2^\perp$.

Используя (29) и соображения, аналогичные тем, которые мы применяли, получая (23), найдем, что

$$x_2(t_2) = \frac{\beta_2^{\perp}}{\beta_2 A^{\vee} \beta_2^{\perp}} \left(d_2 e^{\mu_2 t_2} - \frac{1}{\mu_2} \beta_2 A^{\vee} b + \beta_2 b \right).$$

Выбрав $|\xi|$ столь большим, чтобы значение $e^{\mu_1 t_2}$ было близким к единице, получим, что с точностью до бесконечно малых

$$d_2 e^{\mu_2 t_2} = d_1 - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2} \beta_2 A^{\vee} b = -\beta_1 b - \frac{1}{\tau_1} \beta_2 A \beta_2^{\perp} + \frac{1}{\mu_2} \beta_2 A^{\vee} b.$$

Отсюда $x_2(t_2) \simeq \frac{1}{\tau} \beta_2^{\perp}$, и, следовательно, варьируя τ, мы сумеем добиться и равенства $x_2(t_2) = \beta_2^{\perp}$. Лемма доказана.

4. Следствия леммы

Доказанная лемма позволяет строить с помощью кусочно-аффинных систем достаточно сложные плоские поля.

Одним из ее следствий является иное, чем в [3], доказательство существования кусочно-линейной системы с заданной локальной структурой окрестности точки покоя. Чтобы получить такую систему, достаточно построить последовательность $4m$ углов с общей вершиной в начале; в углах с нечетными номерами построить исключительные направления заданного типа, выбрав для этого подходящим образом линейное представление $f(x)$ в этих углах; в остальные углы продолжить $f(x)$, пользуясь доказанной леммой (точнее, ее правой частью).

Далее, в [2] было показано существование двухкомпонентной кусочно-аффинной системы с предельным циклом. Если не требовать минимального числа компонент, то с помощью леммы легко построить трехкомпонентную кусочно-аффинную систему с предельным циклом. Для этого можно взять линейную систему с фокусом, вырезать из фазовой плоскости угол так, чтобы точка покоя лежала на его биссектрисе вне угла, и, пользуясь леммой, переопределить $f(x)$ в углу. Аналогичным образом можно построить кусочно-аффинные системы с несколькими предельными циклами, лежащими один вне или внутри другого.

Также просто решается задача о построении кусочно-аффинной системы с сепаратрисой, идущей из седла в седло. Разбив фазовую плоскость на четыре угла с общей вершиной, определим $f(x)$ в двух несмежных между собою углах так, чтобы в каждом из них было по седлу и стороны одного из углов, их разделяющих, были бы лучами без контактов с одинаковым направлением поля на них. Затем, пользуясь леммой, доопределим $f(x)$ в этом углу так, чтобы траектория внутри угла соединяла точки пересечения сепаратрис седел со сторонами угла.

Покажем, наконец, как с помощью кусочно-аффинных систем можно построить петлю сепаратрисы. Мы рассмотрим только тот случай, когда односвязная ячейка, примыкающая к точке покоя, ограничена только одной петлей. В этом случае петля сепаратрисы (замыкаясь точкой покоя),ограничивает область, заполненную траекториями некоторого эллиптического сектора. Построим сначала этот сектор из траекторий некоторой кусочно-линейной системы с точкой покоя в начале координат так, как это предлагается в [3]. При этом, очевидно, можно устроить так, чтобы любой из двух лучей - исключительных направлений, ограничивающих этот сектор, - являлся граничным лучом областей аффинности, а в секторе, лежащем снаружи петли, был сепаратрисой. Можно считать также, что построенные петли эллиптического сектора симметричны относительно биссектрисы угла $\mathcal{H}$, образованного исключительными направлениями. Теперь из фазовой плоскости вырежем угол $\mathcal{G}$ большего раствора, не содержащий начала, с вершиной внутри угла $\mathcal{H}$ и с той же биссектрисой.

Пользуясь леммой, переопределим $f(x)$ в $\mathcal{G}$ так, чтобы одна из траекторий внутри $\mathcal{G}$ соединяла точки пересечения исключительных направлений и сторон угла $\mathcal{G}$. Эта траектория вместе с отрезками исключительных направлений и составит искомую петлю.

Повторяя этот прием, можно строить фазовую картину с любым числом петель из сепаратрис, лежащих одна вне другой.

Литература

1. Гильдерман Ю.И. Кусочно-аффинная система с сепаратрисой, идущей из седла в седло. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Труды семинара С.Л. Соболева. Новосибирск, 1977, №1, с.43-49.
2. Гильдерман Ю.И. О предельных циклах кусочно-аффинных систем.- Докл. АН СССР, 1976, т.230, №3, с.512-515.
3. Гильдерман Ю.И. Динамические системы на плоскости с непрерывными правыми частями, линейными в углах.- Сиб.мат.журн., 1972, т.13, №1, с. 163-173.