УДК 517.5

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПРОСТРАНСТВУ $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$

Е.А.Хамаев (Улан-Удэ)

С.Л.Соболев [1, 2] ввел пространства функций, имеющие все обобщенные производные порядка ℓ, суммируемые в $L_p(g)$. Как показал С.Л.Соболев, каждая такая функция имеет представление

$$f(x) = Q_{\ell-1}(x) + \int_g \sum_{|\alpha|=\ell} \mathcal{K}_\alpha(x,y)\mathcal{D}^\alpha f(y)dy, \tag{1}$$

где $Q_{\ell-1}(x)$ - полином степени $(\ell-1)$. Множество таких функций с конечномерной нормой

$$\|f(x), W_p^\ell\| = |Q_{\ell-1}(x)| + \sum_{|\alpha|=\ell} \|\mathcal{D}^\alpha f(x), L_p(g)\|$$

образует банахово пространство $W_p^\ell(g)$. Фактор-пространство W_p^ℓ по конечномерному подпространству полиномов степени $(\ell-1)$ получило название $L_p^\ell(E_n)$. Пространство $L_p^\ell(E_n)$ Соболева нашло широкие приложения в различных областях анализа, дифференциальных уравнений и вычислительной математики. Имеются многочисленные работы, в которых были даны различные обобщения $L_p^\ell(E_n)$ для более общих пространств функций. Отметим здесь монографии [3,4], а также [5,9], в которых можно найти обширную библиографию.

В настоящей работе рассматривается пространство типа $L_p^\ell(E_n)$, построенное с помощью псевдодифференциального оператора вида

$$PU = \int_{E_n} e^{-2\pi i x\xi}\mu(i\xi)\hat{u}d\xi,$$

где символ $\mu(i\xi)$ однороден и имеет заданное поведение на бесконечности и около координатных плоскостей $\xi_j=0$ $(j=1,2,\dots,n)$. Каждая функция $f(x)$, для которой $\|Pf, L_p(E_n)\|<\infty$ и рост которой ограничен некоторой фиксированной степенью $|x|$, имеет представление типа (1). Множество таких функций с конечной нормой

$$\|f(x), L_p^{\mu}(E_n)\| = \|Pf, L_p(E_n)\| < \infty$$

будем называть пространством $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$. Как частный случай в этот класс входят пространства $\mathcal{L}_p^{\ell}(E_n)$ с лиувиллевскими производными, введенные П.И. Лизоркиным [9,10]. Некоторые свойства этого пространства были изучены в работах [6, 7].

В данной работе изучаются дифференциальные свойства функций из $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$. Устанавливается полнота одного подпространства $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$, которое является аналогом пространства $L_p^{\ell}(E_n)$ Соболева.

§ 1. Основные определения, представление функций

Рассмотрим четную функцию $\mu(i\xi) = \mu(i\xi_1, i\xi_2, \ldots, i\xi_n)$, $\mu(i\xi) \in C^{2N}$, $\xi_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. Функция $\mu(i\xi)$ однородна, т.е. для любого $\lambda > 0$ выполняется $\mu(i\xi\lambda^{\alpha}) = \lambda\mu(i\xi)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - показатель однородности $\mu(i\xi)$.

2. В дальнейшем везде будем полагать $\alpha_j^{-1} = \ell_j \geq 1$. Функция $\mu(i\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$c_1 \|\xi\| \leq \mu(i\xi) \leq c_2 \|\xi\|,$$

где $\|\xi\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi^{2\ell_j}\right)^{\frac{1}{2}}$. Функция

$$(i\xi_k)^{\ell_k} = |i\xi_k|^{\ell_k} \cdot e^{i(\varphi + 2\pi k)\ell_k}$$

является многозначной. Поэтому будем считать $(i\xi_k)^{\ell_k}$ равной ветви при $k = 0$.

3. Для любого β, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, при $\xi_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, функции $\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)$ непрерывные и имеют место следующие оценки:

$$|\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)| \leq c\,\|\xi\|^{\nu} \quad \text{при} \quad 0 \leq \beta_j \leq [\ell_j];$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j^{\kappa}\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)\right| \leqslant \frac{c(1+\|\xi\|)^{\nu}}{\prod_{j=1}^{n}|\xi_j|^{\kappa-(\ell_j-[\ell_j])}} \quad \text{при } \ell_j \text{ нецелом;}$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\mathcal{D}_j^{\kappa}\mathcal{D}^{\beta}\mu(i\xi)\right| \leqslant \frac{c(1+\|\xi\|)^{\nu}}{\|\xi\|^{\tau}} \quad \text{при } \ell_j \text{ целом,} \tag{2}$$

$\nu>0$, $\kappa=1,2,\ldots,N$, τ зависит от N .

Положим

$$(u,v) = \int_{E_n} u\bar{v}\,dx. \tag{3}$$

Определим множество функций S_N . Функция $\varphi(x)\in S_N$, если $\varphi(x)\in C^{2N}(E_n)\cap L_1(E_n)$ и удовлетворяет условию

$$|D^{\beta}[\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi)]| \leqslant C_{\varphi}(1+\|\xi\|)^{-N}, \quad |\beta|=0,1,\ldots,N,\ N>2n. \tag{4}$$

Обозначим через Φ' совокупность бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$, стремящихся к нулю вместе со всеми производными на бесконечности и у каждой из координатных плоскостей $x_j=0$, $j=1,2,\ldots,n$, так, что остаются конечными выражения

$$\|\varphi,\kappa\| = \sup_{|\alpha|<\kappa}\sup_{x} M_{\kappa}(x)\cdot|D^{\alpha}\varphi(x)|, \quad \kappa=0,1,\ldots,$$

где $$M_{\kappa}(x)=\max\left\{(1+|x|^2)^{\frac{\kappa}{2}}, \frac{1}{\lambda^{\kappa}}\right\}, \quad \lambda=\min\left\{\min_i|x_i|, 1\right\},$$

$$\Phi=\{\psi:\ \psi=\hat{\varphi}(x),\ \varphi(x)\in\Phi\}.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Функции $\varphi(x)\in S_N$ плотны в $L_p(E_n)$, $1<p<\infty$.

Доказательство леммы имеется в работе С.В.Успенского, Б.Н.Чистякова "О выходе на полином решений одного класса псевдодифференциальных уравнений при стремлении $|x|\to\infty$ ", опубликованной в настоящем сборнике (см. стр. 124, предложение 1).

Для определенности введем обозначения:

$F\varphi=\hat{\varphi}$ - преобразование Фурье,

$F^{-1}\varphi=\check{\varphi}$ - обратное преобразование Фурье.

Определим класс функций $U(x)\in S_N'$.

Функция $\mathcal{U}(x) \in S_N'$, если

1. $\mathcal{U}(x) \in L_p^{loc}(E_n)$, $1<p<\infty$,

и для почти всех $x \in E_n$ имеет место оценка:

$$2.\ |\mathcal{U}(x)|\cdot(1+\|x\|)^{-N} < \mathcal{X}_0(x), \tag{5}$$

где $\mathcal{X}_0(x) \in L_1(E_n)$.

На функциях $\varphi(x) \in S_N$ определим оператор

$$P\mathcal{U} = \int_{E_n} e^{2\pi i x\xi}\mu(i\xi)\hat{\mathcal{U}}(\xi)d\xi.$$

Имеет место следующая

Лемма 2. Если функция $\varphi(x) \in S_N$, а $\mathcal{U}(x) \in S_N'$,

то
$$\int_{E_n} |\mathcal{U}(x)|\cdot|F^{-1}(\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi))|\,dx < \infty.$$

Доказательство. Учитывая свойства (4), (5) для функций $\varphi(x)$ и $\mathcal{U}(x)$, имеем

$$\int_{E_n}|\mathcal{U}(x)|\cdot|F^{-1}(\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi))|dx \leq \int_{E_n}|\mathcal{X}_0(x)|(1+\|x\|)^N\cdot|F^{-1}(\mu\hat{\varphi})|dx \leq$$

$$\leq \int_{E_n}|\mathcal{X}_0(x)|(1+\|x\|)^N\cdot c_1(1+\|x\|)^{-N}dx \leq c_1\int_{E_n}|\mathcal{X}_0(x)|dx < c_2.$$

Пусть символ $\mu(i\xi)$ удовлетворяет условиям 1-3. Определим класс $\mathcal{L}_p^\mu(E_n)$. Функция $\mathcal{U}(x) \in \mathcal{L}_p^\mu(E_n)$, если:

1. $\mathcal{U}(x) \in S_N'$,

$$2.\ \|\mathcal{U}(x), \mathcal{L}_p^\mu(E_n)\| = \sup_{\varphi \in S_N}\frac{(\mathcal{U}, F^{-1}(\mu\hat{\varphi}))}{\|\varphi, L_{p'}(E_n)\|} < \infty. \tag{6}$$

Для функций $\mathcal{U}(x) \in \mathcal{L}_p^\mu(E_n)$ функционал $(\mathcal{U}, F^{-1}(\mu\hat{\varphi}))$ является непрерывным функционалом над $L_{p'}(E_n)$, $1<p'<\infty$. Тогда существует функция $f(x) \in L_p(E_n)$ такая, что для любых $\varphi \in S_N$

$$(\mathcal{U}(x), F^{-1}[\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi)]) = (\mathcal{U}, P^*\varphi) = (f, \varphi), \tag{7}$$

где $P^*\varphi = F^{-1}[\mu(i\xi)\hat{\varphi}(\xi)]$. Из (7) имеем

$$\|U(\cdot),\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| = \sup_{\varphi\in S_N}\frac{(U,P^*\varphi)}{\|\varphi,L_{p'}(E_n)\|} = \sup_{\varphi\in S_N}\frac{(f,\varphi)}{\|\varphi,L_{p'}(E_n)\|} = \|f,L_p(E_n)\|.$$

Если $U(x)\in S_N$, то $(U,P^*\varphi)=(PU,\varphi)=(f,\varphi)$, следовательно, $PU=f$ и $\|U(x),\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| = \|PU,L_p(E_n)\|$. Получим представление для функции $U(x)\in\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$. Положим

$$\mathcal{J}_{h,\varepsilon}[f] = \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\,d\sigma, \tag{8}$$

$$f_h(x) = h^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^{\alpha}}\right)f(t)\,dt, \tag{9}$$

где $G(t)=\mu^{-1}(it)\,G_1(t);\quad G_1(t)=G_0(t)\cdot\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k}$,

$$G_0(t)=\exp\left(-\sum_{j=1}^{n} t_j^{4k}(\alpha_j 4k)^{-1}\right).$$

Пусть $U(x)\in\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$, тогда $U(x)$ есть решение уравнения $(U,P^*\varphi)=(f,\varphi)$. Из работы [7] следует, что для почти всех x функция $U(x)$ имеет представление

$$U_\varepsilon(x) = U_{h^{-1}}(x) + \mathcal{J}_{h,\varepsilon}[f]. \tag{10}$$

Исследуем равенство (10) при $h,\varepsilon\to 0$. Из [6] следует, что для $U(x)\in S_N'$ при $\varepsilon\to 0$ справедливо $U_\varepsilon(x)\to U(x)$ для почти всех $x\in E_n$. Тогда из (10) следует

$$U(x) = U_{h^{-1}}(x) + \mathcal{J}_{h,0}[f]. \tag{11}$$

Покажем, что для почти всех $x\in E_n$ имеет место представление

$$U(x) = P_m(x) + \lim_{h\to 0}\mathcal{J}_{h,1}(x) + \mathcal{J}_{1,0}[f], \tag{12}$$

где $P_m(x)$ - полином степени

$$m > \frac{\max \alpha_j N - |\alpha|}{\min\limits_{1\le i\le n} \alpha_i}, \tag{13}$$

а через $\lim\limits_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f]$ обозначен предел $\mathcal{I}_{h,1}[f]$ в $L_p^{m_0}(E_n)$,

$$\text{где } m_0 = \begin{cases} [l_j]+1 & \text{при } l_j \text{ нецелом,} \\ l_j & \text{при } l_j \text{ целом.} \end{cases} \tag{14}$$

Нам потребуется вспомогательная

Лемма 3. Пусть $K > [l_j] + 1$. Тогда

$$\| \mathcal{I}_{h,1}[f] - \mathcal{I}_{\bar{h},1}[f], L_p^K(E_n) \| \longrightarrow 0 \quad \text{при } h, \bar{h} \to 0.$$

Доказательство. Для $|\beta| = K$ имеем

$$\| \mathcal{D}^\beta \mathcal{I}_{h,\bar{h}}[f], L_p(E_n) \| \le \int_{\bar{h}}^{\infty} v^{-|\alpha|-\beta\alpha} \alpha v \int_{E_n} \left| \mathcal{D}^\beta G\left(\frac{t}{v^\alpha}\right)\right| dt \cdot \| f, L_p(E_n)\| \le$$

$$\le c \| f, L_p(E_n)\| \cdot \int_{\bar{h}}^{\infty} v^{-1-\varepsilon} dv \longrightarrow 0 \text{ при } \bar{h} \longrightarrow 0.$$

Переходим к доказательству (12). Так как $U(x) \in S_N'$, то из леммы 3 работы [7] следует, что $U_{h^{-1}}(x) \to 0$ при $h \to 0$ в $L_p^{m+1}(g)$ для любого компакта g. Тогда, используя (11), получаем

$$\| U_1(x) - \mathcal{I}_{h,1}[f], L_p^{m+1}(g) \| = \| U_h(x), L_p^{m+1}(g) \| \to 0, \ h \to \infty.$$

Поскольку из леммы 3 настоящей работы следует, что $\lim\limits_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f]$ существует в $L_p^{m+1}[E_n]$, то для почти всех $x \in g$ имеет место $U_1(x) = \lim\limits_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + P_m(x)$, где $P_m(x)$ - полином степени m. Легко видеть, что полином не зависит от компакта g. Тогда из (11) имеем

$$U(x) = U_1(x) + \mathcal{I}_{1,0}[f] = P_m(x) + \mathcal{I}_{1,0}[f] + \lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f].$$

Исследуем свойства оператора $\mathcal{I}_{h,\varepsilon}[f]$. Положим

$$\mathcal{J}^{(1)}_{h,\varepsilon}[f] = \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}^{(1)}\left(\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right) f(t)\,dt\,dv,$$

где $G^{(1)}(\xi) = G_1(\xi)\theta(\xi)$, $\theta(\xi) \in C^1(E_n)$ и имеет оценку

$$|\mathcal{D}\theta(\xi)| < c(1+\|\xi\|)^N.$$

Тогда имеют место следующие леммы:

Лемма 4. $\|\mathcal{J}^{(1)}_{h,\varepsilon}[f], L_p(E_n)\| \leq c\|f, L_p(E_n)\|$,

где константа c не зависит от h,ε.

Лемма 5. $\|\mathcal{J}^{(1)}_{h_1,\varepsilon_1}[f] - \mathcal{J}^{(1)}_{h_2,\varepsilon_2}[f], L_p(E_n)\| \leq c\delta + c\|f, L_p(E_n)\|(\varepsilon_1+\varepsilon_2+h_1+h_2)^{\beta}$,

где константа c не зависит от h,ε и $\beta > 0$, а δ - произвольно малое число.

Доказательства этих лемм проводятся так же, как в работе [7] лемм 4 и 5.

Лемма 6. Пусть вектор $m_0 = (m^0_1, m^0_2, \dots, m^0_n)$ удовлетворяет (14). Тогда

$$\|\mathcal{J}_{h,1}[f] - \mathcal{J}_{\bar{h},1}[f], L^{m_0}_p(E_n)\| \to 0 \text{ при } \bar{h}, h \to 0.$$

Доказательство. При ℓ_j целом имеем

$$\|\mathcal{D}^{m^0_j}(\mathcal{J}_{h,1}[f] - \mathcal{J}_{\bar{h},1}[f]), L_p(E_n)\| \leq \left\| \int_{h^{-1}}^{\bar{h}^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \mathcal{D}^{m^0_j}\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right) f(t)\,dt\,dv \right\| \leq$$

$\leq$ (используя лемму 5, получаем) $\leq c\varepsilon + c\|f, L_p(E_n)\|(h_1+\bar{h})^{\beta} \to 0$.

Случай нецелого ℓ_j сводится к оценке в лемме 3.

Из леммы 6 следует, что последовательность $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ сходится в $L^{m_0}_p(E_n)$, где вектор m_0 удовлетворяет (14). Тогда в равенстве (12) можно считать, что $\lim \mathcal{J}_{h,1}[f]$ есть предел $\mathcal{J}_{h,1}[f]$ в $L^{m_0}_p(E_n)$.

Определим класс $\mathcal{L}^{\mu}_{p,\ell}(E_n)$, $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$.

Функция $U(x) \in \mathcal{L}^{\mu}_{p,\ell}(E_n)$, если для некоторого N выполняются условия

1. $\mathcal{U}(x)\in S_N'$;

2. $\| \mathcal{U}(x), \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| < \infty$;

3. для почти всех $x'(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ имеет место

$$\frac{\mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} \longrightarrow 0 \text{ при } x_j \longrightarrow \infty,$$

$$\text{где } m_j^0 = \begin{cases} [\ell_j]+1 & \text{при } \ell_j \text{ нецелом}, \\ \ell_j & \text{при } \ell_j \text{ целом}. \end{cases}$$

Класс $\mathcal{L}_{p,\ell}^{\mu}(E_n)$ является естественным обобщением класса $L_p^{\ell}(E_n)$ Соболева, а также классов $\mathcal{L}_p^{\ell}(E_n)$ с лиувиллевскими производными, введенными П.И.Лизоркиным в [9] .

Покажем, что для $\mathcal{U}(x)\in\mathcal{L}_{p,\ell}^{\mu}(E_n)$ имеет место представление

$$\mathcal{U}(x) = P_{m_0-1}(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], \tag{15}$$

где через $\lim\limits_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f]$ обозначен предел $\mathcal{I}_{h,1}[f]$ в $L_p^{m_0}(E_n)$. Предварительно нам потребуется

Лемма 7. <u>Пусть</u> $f\in L_p^{m}(E_n)$, $m=(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.
<u>Тогда</u>

$$\frac{|f(x)|}{(1+|x_k|)^{m_k}} \longrightarrow 0$$

<u>при</u> $x_k \longrightarrow 0$, $1\leq k\leq n$, <u>для почти всех</u> $x'(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_k)$.

Доказательство. Обозначим через $\square_N = \{x: |x| < N, j=1,2,\ldots,n\}$. В [4] было показано, что каждая функция $f\in\mathcal{L}_p^{\ell}(\square_N)$ имеет для почти всех $x\in\square_N$ представление:

$$f(x) = \Pi_1\cdot\ldots\cdot\Pi_n f + \Pi_1\cdot\ldots\cdot\Pi_{n-1}\Pi^* f^* + \Pi_1\cdot\ldots\cdot\Pi_{n-2}\cdot\Pi_{n-1}^* f + \ldots + \Pi_1^* f. \tag{16}$$

Здесь

$$\Pi_j f=\sum_{k=0}^{m_j-1}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 f(x_1,\ldots,u_j,x_{j+1},\ldots x_n)\frac{d^k}{du_j^k}\left[(x_j-u_j)^k\eta(u_j)\right]du_j\,,$$

где $\eta(u)\in C_0^\infty(0,1)$,

$$\Pi_j^* f=\frac{1}{m_j!}\int_0^1\int_0^1 \eta(u_j)(x_j-u_j)^{m_j}(1-\xi)^{m_j-1}f^{(m_j)}(u_j+(x_j-u_j)\xi)\,d\xi\,du_j\,.$$

Сделав подстановку $(x_j-u_j)\xi=z$, имеем

$$|\Pi_j^* f|\le c\left|\int_0^1\int_0^{x_j-u_j}\eta(u_j)(x_j-u_j)^{m_j-1}\left(1-\frac{z}{x_j-u_j}\right)^{m_j-1}f^{(m_j)}(u_j+z)\,dz\,du_j\right|\le$$

$$\le c_1\int_0^1\int_0^{x_j-u_j}\left|\eta(u_j)(x_j-u_j)^{m_j-1}\right|\cdot\left|f^{(m_j)}(x',u_j+z)\right|dz\,du_j\le$$

(применяя неравенство Гёльдера, получаем)

$$\le c\int_0^1|\eta(u_j)||x_j-u_j|^{m_j-1+\frac{1}{p'}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(m_j)}(x',z)|^p dz\right)^{1/p}du_j\le$$

$$\le c\,|P_{m_j-1}(x)|(1+|x_j|)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(m_j)}(x',z)|^p dz\right)^{1/p};$$

$$|\Pi_j f|\le c\sum_{k=1}^{m_j-1}\left(x_j^k\int_0^1 f(x_1,\ldots,u_j,x_{j+1},\ldots,x_n)|\tilde\eta_j(u_j)|\,du_j\right),$$

где $\tilde\eta_j(u_j)\in C_0^\infty(0,1)$, а константа C не зависит от x. Тогда для почти всех $x\in E_n$ получим оценку

$$\frac{|f(x)|}{(1+|x_j|)^{m_j}}\le C\left(\frac{\int_0^1|f(x)|dx_j}{(1+|x_j|)}+\frac{\|f(x),\overset{\ell}{L}_p(E_1)\|}{(1+|x_j|)^{1/p}}\right),\qquad(17)$$

откуда и вытекает утверждение леммы.

Докажем равенство (15).

Из (12) для почти всех $x\in E_n$ имеем

$$U(x) = P_m(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f] + \mathcal{J}_{1,0}[f].$$

Считая, что m_0 удовлетворяет условию (14), получаем

$$\frac{U(x)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} = \frac{P_m(x)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} + \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{J}_{h,1}[f]}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} + \frac{\mathcal{J}_{1,0}[f]}{(1+|x_j|)^{m_j^0}}. \tag{18}$$

В силу леммы 6, $\mathcal{J}_{h,1}[f] \in L_p^{m_0}(E_n)$, $\mathcal{J}_{1,0}[f] \in L_p^{[\ell]}(E_n)$.

Действительно, из леммы 4 следует, что при ℓ_j целом $\mathcal{D}^{\ell_j}\mathcal{J}_{h,1}[f] \in L_p(E_n)$, а при ℓ_j нецелом выполняется неравенство $\|\mathcal{D}^{[\ell_j]+1}\mathcal{J}_{h,1}[f]; L_p(E_n)\| \le c\|f(x), L_p(E_n)\|$. Тогда, переходя к пределу в (18), для почти всех $x'(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, получаем

$$\lim_{x_j\to\infty} \frac{P_m(x_1,\dots,x_n)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}} = 0,$$

т.е. $P_m(x)$ имеет степень по x_j не выше $(m_j^0 - 1)$.

Лемма 8. <u>Пусть</u> $P_{m_0-1}(x)$ - <u>полином степени</u> $m_0 - 1 = (m_1^0 - 1, m_2^0 - 1, \dots, m_n^0 - 1)$, <u>где</u> m_0 <u>удовлетворяет (14) . Тогда</u> $(P_m(x), P^*\varphi) = 0$.

Доказательство. Положим

$$f^{(h)}(x) = \begin{cases} P_{m_0-1}(x), & \text{если } x \in \square_h, \\ 0, & \text{если } x \bar{\in} \square_h, \end{cases}$$

где

$$\square_h = \left\{ |x_j| \le \frac{1}{h^N} \right\}.$$

Тогда для почти всех $x \in E_n$ выполняется

$$P_{m_0-1}(x) = \lim_{h\to 0} h^{-|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right) f^{(h)}(t)\,dt.$$

Действительно,

$$h^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right)f^{(h)}(t)dt=h^{-|\alpha|}\int_{\Box_h}\hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right)P_{m_0-1}(t)dt=$$

$$=h^{-|\alpha|}\int_{\Box_h}\int_{E_n}\left[P_{m_0-1}(i\mathcal{D}_\xi h^\alpha)e^{-\frac{it\xi}{h^\alpha}}\right]\left[e^{\frac{ix\xi}{h^\alpha}}G_0(\xi)\right]d\xi dt=$$

(интегрируя по частям, получаем)

$$=h^{-|\alpha|}\int_{\Box_h}P_{m_0-1}(t)\int_{E_n}e^{\frac{-i(t-x)}{h^\alpha}\xi}G_0(\xi)d\xi dt+$$

$$+\sum_{|\beta|>0}^{m}h^{-|\alpha|+\beta\alpha}\int_{\Box_h}Q^{m-\beta}(x)\int_{E_n}e^{\frac{-i(t-x)}{h^\alpha}\xi}p^\beta(\mathcal{D}_\xi)G_0(\xi)d\xi dt=$$

$$=P_{m_0-1}(x)+h^{-|\alpha|}\int_{E_n\setminus\Box_h}\hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right)P_{m_0-1}(t)dt+$$

$$+\sum_{|\beta|>0}^{m}h^{-|\alpha|+\beta\alpha}Q^{m-\beta}(x)\int_{E_n\setminus\Box_h}\widehat{p^\beta(\mathcal{D}_\xi)G_0}\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right)dt=P_{m_0-1}(x)+F_h(x). \qquad (19)$$

Поскольку $\widehat{G_0}(t)$ и $\widehat{p^\beta(\mathcal{D}_\xi)G_0}(t)\in S$, то при $h\to 0$ для любого компакта функция $F_h(x)\to 0$.

Обозначим

$$\mathcal{J}_{h,h}[P_m]=h^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right)f^{(h)}(t)dt.$$

Из (19) имеем

$$|\mathcal{J}_{h,h}[P_m]|\cdot(1+\|x\|)^{-N}<\mathcal{K}_0$$

($\mathcal{K}_0$ - константа). Тогда для любого $\varphi\in\Phi$ выполняется

$$\left(P_{m_0-1}(x),\int_{E_n}e^{ix\xi}\mu(i\xi)\hat{\varphi}d\xi\right)=\lim_{h\to 0}\left(\mathcal{J}_{h,h}[P_m],\int_{E_n}e^{ix\xi}\mu(i\xi)\hat{\varphi}d\xi\right)=$$

(применяя формулу Парсеваля, см., например, [11], получаем)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\mu(i\xi) G_0(h^{\alpha}\xi) \hat{f}^{(h)}(\xi), \hat{\varphi}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(h^{-|\alpha|-1} \iint_{E_n E_n} e^{-\frac{i(t-x)}{h^{\alpha}}\xi} \mu(i\xi) G_0(\xi) f^{(h)}(t) dt d\xi, \varphi\right). \tag{20}$$

Обозначим

$$J_h[f] = h^{-|\alpha|-1} \iint_{E_n E_n} e^{-\frac{i(t-x)}{h^{\alpha}}\xi} \mu(i\xi) G_0(t) f^{(h)}(t) dt d\xi$$

и пусть $Q^{\beta}(x), P^{m-\beta}(x)$ - полиномы степени соответственно β и $(m-\beta)$. Имеем

$$J_h[f] = \left|\sum_{|\beta|\geq 0}^{m} h^{-|\alpha|-1+(m-\beta)\alpha} \cdot Q^{\beta}(x) \int_{E_n \setminus \square_h} \int_{E_n} e^{-\frac{i(t-x)}{h^{\alpha}}\xi} P^{m-\beta}(\mathcal{D}_{\xi}) \mu G_0(\xi) d\xi dt\right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\beta|>0}^{m} h^{-|\alpha|-1+(m-\beta)\alpha} |\tilde{Q}^{\beta}(x)| \int_{E_n \setminus \square_h} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\left|\frac{t_j - x_j}{h^{\alpha_j}}\right|\right)} \left|\int_{E_n} e^{-\frac{i(t-x)}{h^{\alpha}}\xi} \tilde{P}^{m-\beta+n}(\mathcal{D}_{\xi}) \mu G_0(\xi) d\xi\right| dt,$$

где $\tilde{P}^{m-\beta+n}(\mathcal{D}_{\xi})$ имеет порядок производной по ξ_k не более $[\ell_j]+1$. Используя оценки на символ $\mu(i\xi)$, получаем

$$\left|\tilde{P}^{m-\beta+n}(\mathcal{D}_{\xi})[\mu(i\xi) G_0(\xi)]\right| \leq \frac{c}{|i\xi_k|^{\delta_k}} \cdot e^{-|\xi|^N} \in L_{p_0}(E_n),\ 0<\delta_k<1,$$

где $1<p_0<2$. Тогда

$$F\left[\tilde{P}^{m-\beta+n}(\mathcal{D}_{\xi})(\mu(i\xi) G_0(\xi))\right] \in L_{p'}(E_n),\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p_0}=1.$$

Далее, имеем

$$h^{-1} \int_{E_n \setminus \square_h} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+|t_j|)} \left|F\left[\tilde{P}^{m-\beta+n}(\mathcal{D}_{\xi})(\mu(i\xi) G_0(\xi)\right]\right| dt \to 0$$

при $h \to 0$ для x из любого компакта $M \in E_n$. Кроме того, из (19) следует, что $|\mathcal{J}_h[f]| \cdot (1+|x|)^{-N} < \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ - константа. Тогда, учитывая, что $\varphi \in \Phi$, и переходя к пределу в (19), при $h \to 0$ имеем

$$(P_{m_0-1}(x), \int_{E_n} e^{ix\xi} \mu(i\xi)\hat{\varphi} d\xi) = 0.$$

Следствие.

$$|P_{m_0-1}(x), \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)| = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{(P_{m_0-1}(x), \int_{E_n} e^{ix\xi} \mu \hat{\varphi} d\xi)}{\|\varphi, L_{p'}(E_n)\|} = 0.$$

Таким образом, в представлении (15) полином $P_{m_0-1}(x)$ принадлежит ядру оператора P.

§ 2. О полноте пространства $\mathcal{L}_{p,e}^{\mu}(E_n)$

Определим в $\mathcal{L}_{p,e}^{\mu}(E_n)$ норму

$$|U(x), \mathcal{L}_{p,e}^{\mu}(E_n)| = \|U(x), \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\|$$

и докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 9. Функция $\mathcal{J}_{\varepsilon,h}[f]$ является решением уравнения $(U, P^*\varphi) = (f_h - f_{h^{-1}}, \varphi)$, т.е.

$$(\mathcal{J}_{\varepsilon,h}[f], P^*\varphi) = (f_\varepsilon - f_{h^{-1}}, \varphi) \tag{21}$$

для всех $\varphi \in S_N$.

Доказательство. Учитывая (9), имеем

$$(f_\varepsilon - f_{h^{-1}}, \varphi) = \int_{E_n} \left[\varepsilon^{-|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f(t)dt - h^{|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^{-\alpha}}\right) f(t)dt \right] \overline{\varphi}(x)dx =$$

$$= \int_{E_n} \left[\varepsilon^{-|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \overline{\varphi}(x) - h^{|\alpha|} \int_{E_n} \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^{-\alpha}}\right) \overline{\varphi}(x)dx \right] f(t)dt =$$

$$= \int_{E_n} \left[\int_{\varepsilon}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_n} \hat{G}_1\left(\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right) \overline{\varphi}(x)dx dv \right] f(t)dt =$$

$$= \int_{E_n} \left[\int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-1} \left(\hat{G}_1 (\sigma^{\alpha}\xi) * \overline{\varphi} \right) d\sigma \right] f(t) dt =$$

$$= \int_{E_n} \left\{ \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-1} \left[F F^{-1} \left(\hat{G}_1 (\sigma^{\alpha}\xi) * \overline{\varphi} \right) \right] d\sigma \right\} f(t) dt =$$

$$= \int_{E_n} \left\{ \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-1} F \left[\mu^{-1}(i\xi) G_1 (\sigma^{\alpha}\xi) \cdot \check{\overline{\varphi}} \mu(i\xi) \right] d\sigma \right\} f(t) dt =$$

$$= \int_{E_n} \left\{ \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-1} \left[F \left(\mu^{-1}(i\xi) G_1 (\sigma^{\alpha}\xi) \right) * F \left(\check{\overline{\varphi}} \mu (i\xi) \right) \right] d\sigma \right\} f(t) dt =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|} \int_{E_n} F \left(\check{\overline{\varphi}} \mu (i\xi) \right) \int_{E_n} \left(\widehat{G_1 \mu^{-1}} \right) \left(\frac{x-t}{\sigma^{\alpha}} \right) f(t) dt d\sigma dx =$$

$$= \int_{E_n} \mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f] \cdot F (\mu \check{\overline{\varphi}}) dx - \int_{E_n} \mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f] \overline{F^{-1} (\mu \hat{\varphi})} dx =$$

$$= (\mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f], P^* \varphi).$$

Таким образом, лемма доказана.

Тогда

$$\| \mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f], \mathcal{L}_p^{\mu} (E_n) \| = \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(\mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f], P^* \varphi)}{\| \varphi, L_{p'} (E_n) \|} =$$

$$= \sup_{\varphi \in S_N} \frac{(f_{\varepsilon} - f_{h^{-1}}, \varphi)}{\| \varphi, L_{p'} (E_n) \|} = \| f_{\varepsilon} - f_{h^{-1}}, L_p (E_n) \| . \qquad (22)$$

Следствие.

$$\lim_{h \to 0} \| \mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f], \mathcal{L}_p^{\mu} (E_n) \| = \| f_{\varepsilon} - f, L_p (E_n) \|, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \| \mathcal{J}_{\varepsilon,h} [f], \mathcal{L}_p^{\mu} (E_n) \| = \| f_{h^{-1}}, L_p (E_n) \| . \qquad (23)$$

Доказательство вытекает из (22) и свойств средних $f_h (x)$:

$f_h(x) \to f(x), f_{h^{-1}}(x) \to 0$ в $L_p(E_n)$ при $h \to 0$, которые получены в работе [7],

Лемма 10.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \left(\mathcal{I}_{h,\varepsilon}[f], P^*\varphi\right) = \left(\lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], P^*\varphi\right)$$

для всех $\varphi \in S_N$.

Доказательство. Из следствия к лемме 9 имеем

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \left(\mathcal{I}_{h,\varepsilon}[f], P^*\varphi\right) = (f, \varphi) = (\mathcal{U}, P^*\varphi) =$$

(учитывая представление (15), получаем)

$$= \left(P_{m_0-1}(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], P^*\varphi\right) =$$

(по лемме 8, имеем)

$$= \left(\lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], P^*\varphi\right).$$

Следствие.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \| \mathcal{I}_{h,\varepsilon}[f], \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| = \| \lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\|.$$

Доказательство $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \| \mathcal{I}_{h,\varepsilon}[f], \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| =$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \| f_\varepsilon - f_{h^{-1}}, L_p(E_n)\| = \| f, L_p(E_n)\| =$$

$$= \| \mathcal{U}, \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| = \| P_m(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| =$$

(учитывая следствие к лемме 8, получаем) $= \| \lim\limits_{h\to 0} \mathcal{I}_{h,1}[f] + \mathcal{I}_{1,0}[f], \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\|$.

Теорема. Пространство $\mathcal{L}_{p,\ell}^{\mu}(E_n)$ полное.

Доказательство. Пусть последовательность $\{\mathcal{U}_k(x)\}$ фундаментальна в $\mathcal{L}_{p,\ell}^{\mu}(E_n)$. Тогда

$$\| \mathcal{U}_k(x)-\mathcal{U}_m(x),\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| = \| f_k(x)-f_m(x), L_p(E_n)\| \longrightarrow 0$$

при $k,m \longrightarrow \infty$, где $f_k(x)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{U}_k(x), P^*\varphi) = (f_k,\varphi)$ для всех $\varphi \in S_N$. Так как $\mathcal{U}_k(x) \in \mathcal{L}^{\mu}_{p,\ell}(E_n)$, то имеет место представление

$$\mathcal{U}_k(x) = P^{(k)}_{m_0-1}(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_k] + \mathcal{J}_{1,0}[f_k].$$

Определим норму

$$\| \mathcal{U}(x)\|_1 = \| P_{m_0-1}(x) + \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f], L_p^{m_0}(E_n)\| + \| \mathcal{J}_{1,0}[f], L_p(E_n)\| .$$

Используя леммы 3,9,10, имеем

$$\| \mathcal{U}_k(x)-\mathcal{U}_m(x)\|_1 \leq c\| f_k(x)-f_m(x), L_p(E_n)\| =$$

$$= c\| \mathcal{U}_k(x)-\mathcal{U}_m(x), \mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k,m \longrightarrow \infty. \tag{24}$$

Тогда $\| \lim\limits_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_k] - \lim\limits_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_m], L_p^{m_0}(E_n)\| \longrightarrow 0$

и

$$\| \mathcal{J}_{1,0}[f_k] - \mathcal{J}_{1,0}[f_m], L_p(E_n)\| \longrightarrow 0.$$

В силу полноты пространств $L_p^{m_0}(E_n)$ и $L_p(E_n)$ существуют функции $\sigma_1(x), \sigma_2(x)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \| \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_k] - \sigma_1(x), L_p^{m_0}(E_n)\| = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \| \mathcal{J}_{1,0}[f_k] - \sigma_2(x), L_p(E_n)\| = 0.$$

Из полноты $L_p(E_n)$ следует, что существует $f_0(x) \in L_p(E_n)$ такая, что $\| f_k(x)-f_0(x), L_p(E_n)\| \longrightarrow \infty$ при $k \longrightarrow 0$.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{U}_0(x) = \mathcal{J}_{1,0}[f_0] + \lim_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_0].$$

Из оценки (24) следует

$$\|U_K(x)-U_0(x)\|_1=\|\lim_{h\to 0}(J_{h,1}[f_K]-J_{h,1}[f_0]),L_p^{m_0}(E_n)\|+$$

$$+\|J_{1,0}[f_K]-J_{1,0}[f_0],L_p(E_n)\|\leqslant c\,\|f_K(x)-f_0(x),L_p(E_n)\|\to 0$$

при $K\to\infty$. Тогда

$$\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f_0]=v_1(x)+P_{m_0-1}(x),\quad J_{1,0}[f]=v_2(x).$$

Следовательно, $\{U_K(x)\}$ сходится по $\|\cdot\|_1$ к функции

$$U_0(x)=P_{m_0-1}(x)+J_{1,0}[f_0]+\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f_0].$$

Используя лемму 8, имеем

$$\|U_K(x)-U_0(x),\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\|=\|J_{1,0}[f_K-f_0]+\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f_K-f_0],\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)\|\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|[f_K(x)-f_0(x)]_1,L_p(E_n)\|+\|(f_K(x)-f_0(x))_1,L_p(E_n)\|\leqslant$$

(учитывая оценку $\|f_h(x),L_p(E_n)\|\leqslant c\,\|f(x),L_p(E_n)\|$, получаем)

$\leqslant c\,\|f_K(x)-f_0(x),L_p(E_n)\|\to 0$ при $K\to\infty$, т.е. $\{U_K(x)\}$ сходится к $U_0(x)$ в $\mathcal{L}_p^{\mu}(E_n)$.

Покажем, что $U_0(x)\in\mathcal{L}_{p,\ell}^{\mu}(E_n)$. Поскольку

$$\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f_0]\in L_p^{m_0}(E_n),\quad J_{1,0}[f_0]\in L_p^{[\ell]}(E_n),$$

то они локально суммируемы и имеют представление (17) для некоторого $\delta>0$. Тогда получим

$$\frac{|U_0(x)|}{(1+\|x\|)^{2n}}\leqslant\frac{|P_{m_0-1}(x)|}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+|x_j|^{m_j^0}\right)}+\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\delta}}\times$$

$$\times\Big[\|\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f],L_1(\square_1)\|+\sum_{K=1}^{n-1}\|\lim_{h\to 0}J_{h,1}[f_0],L_p^{m_0}(E_K)\|+$$

$$+\sum_{K=1}^{n}\|J_{1,0}[f_0],L_p^{[\ell]}(E_K)\|+\|J_{1,0}[f_0],L_1(\square_1)\|\Big]=F(x)\in L_1(E_n).$$

При $1\leqslant j\leqslant n$ для почти всех $x'(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$ получаем оценку (18) для функций $\lim\limits_{h\to 0} \mathcal{J}_{h,1}[f_0]$ и $\mathcal{J}_{1,0}[f_0]$. Тогда для почти всех $x'(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\in E_n$ имеем

$$\frac{P_{m_0-1}(x)}{(1+|x_j|)^{m_j^0}}+\frac{\mathcal{J}_{1,0}[f_0]}{(1+|x_j|)^{m_j^0}}+\frac{\lim\limits_{h\to 0}\mathcal{J}_{h,1}[f_0]}{(1+|x_j|)^{m_j^0}}\longrightarrow 0\cdot$$

при $x_j\to\infty$. Следовательно, $U_0(x)$ удовлетворяет всем условиям принадлежности к классу $\mathcal{L}^{\mu}_{p,e}(E_n)$.

Теорема доказана полностью.

Литература

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск: изд. СО АН СССР, 1962.- 252 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука,1974.- 808 с.
3. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.- М.: Наука, 1969.- 455 с.
4. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.
5. Кудрявцев Л.Д. О следах функций многих переменных и полях направлений, регулярных в бесконечности для оператора Лапласа.- Труды Мат.ин-та АН СССР, 1972, т.112, с.256-270.
6. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.-Сиб.мат.журн., 1972, т.13, №3, с.665-678.
7. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x|\to\infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.- Сиб. мат.журн.,1975, т.16, №5, с.1053-1070.
8. Успенский С.В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов.- Труды Мат.ин-та АН СССР,1972, т.117, с.292-299.
9. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^{z}(E_n)$.-Мат.сб.,1963, т.60, №3, с. 325-353.
10. Лизоркин П.И. Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности.- Труды Мат.ин-та АН СССР, 1979, т.150, с.3-318.
11. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье.-М.:Огиз,1948.- 480 с.