УДК 517

О ВЫХОДЕ НА ПОЛИНОМ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ $|x| \to \infty$

С.В.Успенский, Б.Н.Чистяков (Новосибирск)

В работе [1] авторами установлены условия стабилизации решений некоторого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений.

Наиболее существенным в этих условиях является соотношение между показателем однородности $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ символа $p(i\xi)$ псевдодифференциального оператора, т.е. вектора, удовлетворяющего условию $p(i\xi\lambda^{\alpha})=\lambda p(i\xi)$, и размерностью пространства.

Все результаты [1] получены в предположении, что $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i>1$. Снять это условие, вообще говоря, нельзя, что показывают примеры.

В настоящей работе предполагается, что правые части уравнений удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{E_n} x^{\sigma} f(x)\,dx = 0$$

при $0\leqslant|\sigma|\leqslant\nu$, где ν - целое положительное число, удовлетворяющее неравенству $|\alpha|+\nu\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\alpha_j>1$. В этом случае показывается, что решение всегда стабилизируется к полиному, если предположить достаточно хорошее поведение правой части f на бесконечности.

Как следствие в работе получены условия стабилизации на полином при $|x|\to\infty$ функций, принадлежащих неизотропным классам L_p^{ℓ} с лиувиллевскими производными, рассмотренными П.И. Лизоркиным [2,3].

Для других классов функций аналогичные вопросы рассматривались в [4 - 14]. Схема доказательства была дана в работе авторов [1].

В данной работе мы даем подробное изложение этого результата, при этом доказательства существенно опираются на результаты авторов [1].

§ 1. Основные определения и вспомогательные результаты

Введем определения. Рассмотрим псевдодифференциальное уравнение

$$Pu = \int_{E_n} e^{ix\xi} p(i\xi)\hat{u}(\xi)d\xi = f(x), \tag{1}$$

где $p(i\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого $\xi \in E_n$ и некоторого $\nu_1 > 0$ выполняется неравенство

$$|p(i\xi)| \geq c|\xi|^{\nu_1};$$

2) существует такой вещественный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что для любого $\lambda > 0$ имеет место $p(i\xi\lambda^{\alpha}) = p(i\xi_1\lambda^{\alpha_1}, \ldots, i\xi_n\lambda^{\alpha_n}) = \lambda p(i\xi)$;

3) для любого β, $|\beta| = 0, 1, \ldots, N$, $N > 2n$, при $\xi_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, существуют и непрерывны $D^{\beta} p(i\xi)$;

4) имеет место оценка

$$\prod_{j=1}^{n} |\xi_j|^{\eta_j} |D^{\beta}(\xi^{\gamma} p(i\xi))| \leq c|\xi|^{\nu_2}, \quad \text{где } \nu_2 > 0,$$

$$\eta_j = \begin{cases} 0, & \text{если } [l_j] = l_j, \\ 1 - (l_j), & \text{если } [l_j] \neq l_j, \end{cases}$$

$$l_j = \frac{1}{\alpha_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad 0 \leq \beta_j \leq \gamma_j + [l_j] + 1;$$

$$0 \leq \gamma_j \leq [l_j] + 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим

$$(u, v) = \int_{E_n} u \cdot \bar{v}\, dE_n,$$

$\hat{f}(x)$ $(\tilde{f}(x))$ - преобразование Фурье (обратное преобразование Фурье) функции $f(x)$;

$$P^* u = \int_{E_n} e^{ix\xi} \overline{p(i\xi)} \hat{u}(\xi) d\xi; \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j}.$$

Будем говорить, что $\varphi \in S_N$, если $\varphi \in C^{\infty}(E_n) \cap L_p(E_n)$ (для любого $p > 1$),

$$\overline{p(i\xi)}\hat{\varphi}(\xi) \in C^{\infty}(E_n),$$

$$|D^{\beta}(\overline{\rho(i\xi)}\hat{\varphi}(\xi))| < C_{\varphi}(1+|\xi|)^{-N}, \quad |\beta| = 0,\dots,N.$$

Обозначим через S'_N множество функций φ, которые подчиняются условиям: $\varphi \in L_p^{loc}(E_n)$ для некоторого $1 \le p < \infty$ и для почти всех $x \in E_n$ выполняется

$$|\varphi(x)|(1+|x|)^{-N} \le K_0(x), \quad \text{где } K_0(x) \in L_1(E_n).$$

Введем обобщенное решение уравнения (1). Будем говорить, что $u \in S'_N$ является обобщенным решением уравнения (1), если для любой функции $\varphi \in S_N$ выполняется $(u, P^*\varphi) = (f, \varphi)$.

В [15] установлено, что для любого обобщенного решения уравнения (1) справедливо

$$u_{h_1}(x) = u_{h_2}(x) + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha|}\int_{E_n} f(t)\hat{G}\left(\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)dt\,dv, \tag{2}$$

где

$$u_h(x) = \frac{h^{-|\alpha|}}{(2\pi)^n}\int_{E_n} u(t)\left(\int_{E_n} e^{-\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{4m}(4m\alpha_j)^{-1}} e^{-i\left(\frac{t-x}{h^{\alpha}}\right)\xi} d\xi\right)dt,$$

$$\hat{G}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{E_n} e^{-\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{4m}(4m\alpha_j)^{-1}} \sum_{j=1}^{n}\xi_j^{4m}(\rho(i\xi))^{-1} e^{-ix\xi}d\xi.$$

§ 2. О стабилизации к полиному при $|x| \to \infty$ функций, принадлежащих лиувиллевским классам

Лемма 1. Пусть $u \in S'_N$ - обобщенное решение уравнения (1),

$$\|(1+|x|)^{\beta} f(x); L_p(E_n)\| < \infty, \quad \frac{\beta|\alpha|}{pn} + \frac{|\alpha|}{p} > 1, \ \beta \ge 0, \ p > 1, \ |\alpha| > 1.$$

Тогда для всякого ρ, $|\rho| \ge 0$, имеет место

$$\|D^{\rho}u_{h_1}(x) - D^{\rho}u_{h_2}(x); C(E_n)\| \le c(h_1^{-\tau} + h_2^{-\tau})\|(1+|x|)^{\beta}f(x); L_p(E_n)\|,$$

где $\gamma>0,\ h_1>1,\ h_2>1$ и C - константа, не зависящая от x.

Доказательство. Используя (2), имеем

$$|D^{\rho}u_{h_1}(x)-D^{\rho}u_{h_2}(x)|\leq C\left|\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-|\alpha|-\alpha\rho}\int_{E_n}f(t)D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt\,d\sigma\right|\leq$$

$$\leq C\left|\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-2|\alpha|-\rho\alpha}\int_{E_n}D^{\rho+n}\hat{G}\left(\frac{t}{\sigma^{\alpha}}\right)\left(\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_n}f(x+u)du\right)dt\,d\sigma\right|\leq$$

(полагая $\varepsilon=\frac{\delta}{n\rho}+\frac{1}{\rho}$, $n\left(\frac{\rho}{|\alpha|}-1\right)<\delta<n(\rho-1)$, $0\leq\delta\leq\beta, \rho+n=\rho+\vec{1}$, и, применяя лемму 8 из [2], получаем)

$$\leq C\left|\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-2|\alpha|-\rho\alpha}\int_{E_n}\left|D^{\rho+n}\hat{G}\left(\frac{t}{\sigma^{\alpha}}\right)\right|\prod_{j=1}^{n}|t_j|^{1-\varepsilon}\left(\int_{E_n}|u_1|^{\frac{\delta}{n}}\cdot\ldots\cdot|u_n|^{\frac{\delta}{n}}|f(u)|^{\rho}du\right)^{\frac{1}{\rho}}dt\,d\sigma\right|\leq$$

(используя неравенство $\Pi a_j^{\gamma_j}\leq\left(\frac{\sum a_j\gamma_j}{\sum\gamma_j}\right)^{\sum\gamma_j}$ и $\delta\leq\beta$, имеем)

$$\leq C\left|\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-2|\alpha|-\rho\alpha}\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t_j|^{1-\varepsilon}}{\left(1+\frac{|t_j|}{|\sigma^{\alpha_j}|}\right)^3}dt_j\,d\sigma\right|\|(1+|x|)^{\beta}f(x);L_p(E_n)\|\leq$$

$$\leq C\left|\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-\varepsilon|\alpha|-\rho\alpha}d\sigma\right|\cdot\|(1+|x|)^{\beta}f(x);L_p(E_n)\|\leq$$

$$\leq C\left(h_1^{1-\left(\frac{|\alpha|\delta}{n\rho}+\frac{|\alpha|}{\rho}\right)}+h_2^{1-\left(\frac{|\alpha|\delta}{n\rho}+\frac{|\alpha|}{\rho}\right)}\right)\cdot\|(1+|x|)^{\beta}f(x);L_p(E_n)\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда равномерно на любом компакте из E_n имеет место $\lim_{h\to\infty}u_h(x)=\mathcal{P}_m(x)$, где $\mathcal{P}_m(x)$ - полином степени $m=(m_1,\dots,m_n)$, $m_j\leq N-1$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3 [2] и леммы 1 настоящей работы.

Лемма 3. Пусть $u \in S'_N$ - обобщенное решение уравнения (1),

$$\|(1+|x|)^{\beta} f(x); L_p(E_n)\| < \infty, \quad \frac{\beta|\alpha|}{np} + \frac{|\alpha|}{p} > 1, \quad \beta \geq 0, \; p > 1, \; |\alpha| > 1.$$

Тогда существует полином $\mathcal{P}_m(x)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \leq N-1$, такой, что

1) при $|\alpha| \geq p$ справедливо $\lim\limits_{x_j \to \infty} (u(x) - \mathcal{P}_m(x)) = 0$ для почти всех

$$x' = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in E_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq n;$$

2) при $1 < |\alpha| < p$ выполняется

$$|u(x) - \mathcal{P}_m(x)| \leq c \prod_{j=1}^{n} \left(1 + |x_j|\right)^{-\chi} \|(1+|x|)^{\beta} f(x); L_p(E_n)\|,$$

здесь $\chi = \dfrac{\delta}{np} - \dfrac{1}{|\alpha|} + \dfrac{1}{p}$, $n\left(\dfrac{p}{|\alpha|} - 1\right) < \delta < n(p-1)$, $\delta \leq \beta$.

Доказательство. При $|\alpha| \neq p$ лемма является следствием теорем 1 и 2 [2] и леммы 1 данной работы. Если $|\alpha| = p$, то из условия леммы следует, что $f \in L_{\tau}(E_n)$, где τ - любое, большее единицы, число из промежутка $\left(\frac{np}{n+\beta}; p\right)$. Для доказательства достаточно отметить, что $1 < \tau < |\alpha|$. Лемма доказана.

Следуя П.И.Лизоркину [2], обозначим через Ψ совокупность бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\psi(\lambda)$, стремящихся к нулю вместе со всеми производными на бесконечности и у каждой из координатных плоскостей $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, так что остаются конечными выражения

$$\|\psi\|_K = \sup_{\lambda} \sup_{|l| \leq K} M_K(\lambda) |D^l \psi(\lambda)|, \quad K = 0, 1, \ldots,$$

где

$$M_K(\lambda) = \max\left\{(1+|\lambda|^2)^{K/2}, \frac{1}{\Lambda^K}\right\},$$

$$\Lambda = \min\left\{\min_i |\lambda_i|; 1\right\}.$$

Пусть $\Phi = \{\varphi : \varphi = \hat{\psi}(\lambda), \; \psi(\lambda) \in \Psi\}$. Нетрудно увидеть, что $\Phi \subset S_N \subset L_p(E_n)$. Как показано в [2], Φ плотно в $L_p(E_n)$, $p > 1$. Следовательно, справедливо

Предложение 1. Множество S_N плотно в $L_p(E_n)$, $p>1$.

Пусть $u\in S_N'$. Введем класс $L_p^{\ell}(E_n)$, $1<p<\infty$,

$$\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n),\quad \ell_j\geq 1\quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Будем говорить, что $u\in L_p^{\ell}(E_n)$, если

$$\|u\|_{L_p^{\ell}(E_n)}=\sum_{k=1}^{n}\sup_{\varphi\in\Phi}\frac{\left|\left(u,\int_{E_n}e^{ix\xi}(-i\xi_k)^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}<\infty .$$

Так как Φ плотно в $L_p(E_n)$ и $\Phi\subset S_N$, то

$$\|u\|_{L_p^{\ell}(E_n)}=\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(u,\int_{E_n}e^{ix\xi}(-i\xi_k)^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}.$$

Пусть $u\in L_p^{\ell}(E_n)$, рассмотрим

$$\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(u,\int_{E_n}e^{ix\xi}|i\xi_k|^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}=$$

(учитывая, что $\dfrac{|i\xi_k|^{\ell_k}}{(-i\xi_k)^{\ell_k}}$ - мультипликатор типа (p,p))

$$=\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(u,\int_{E_n}e^{ix\xi}(-i\xi_k)^{\ell_k}\dfrac{|i\xi_k|^{\ell_k}}{(-i\xi_k)^{\ell_k}}\cdot\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\left\|\widetilde{\dfrac{|i\xi_k|^{\ell_k}}{(-i\xi_k)^{\ell_k}}\cdot\hat{\varphi}(\xi)}\right\|_{L_{p'}}}\cdot\frac{\left\|\widetilde{\dfrac{|i\xi_k|^{\ell_k}}{(-i\xi_k)^{\ell_k}}\cdot\hat{\varphi}(\xi)}\right\|_{L_{p'}}}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}\leq$$

$$\leq cM\|u,L_p^{\ell}\|\cdot\frac{\|\varphi\|_{L_{p'}}}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}\leq cM.$$

Следовательно, для $u\in L_p^{\ell}(E_n)$ имеет место

$$\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(u,\int_{E_n}e^{ix\xi}\sum_{k=1}^{n}|i\xi_k|^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}<\infty .$$

По теореме об общем виде линейного функционала в L_p, существует функция $f\in L_p$ такая, что $(u, P^*\varphi)=(f,\varphi)$ для любой $\varphi\in S_N$, где

$$P^*\varphi=\int_{E_n} e^{ix\xi}\sum_{k=1}^{n}|i\xi_k|^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi .$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть $u\in L_p^{\ell}(E_n)$, $1<p<|\alpha|$. Тогда существует полином $\mathcal{P}_m(x)$, линейно-зависящий от u и такой, что

$|u(x)-\mathcal{P}_m(x)|\longrightarrow 0$, если $x_j\to\infty$ для почти всех $x'\in E_{n-1}$, $1\le j\le n$, где $m=(m_1,\ldots,m_n)$. При этом $m_j\le\ell_j-1$, когда ℓ_j - целое, и $m_j\le[\ell_j]$, когда ℓ_j - нецелое.

Доказательство. В силу леммы 3, достаточно оценить m_j.

Предположим вначале, что $\ell_j=[\ell_j]+\delta_j$, $0<\delta_j<1$. Рассмотрим

$$\sup_{0<h_i\le 1}\frac{\left\|\Delta^{(2)}_{h_i}\dfrac{\partial^{[\ell_j]-1}}{\partial x_j^{[\ell_j]-1}}\mathcal{P}_m(x)\right\|_{L_p}}{h^{1+\delta_j}}=$$

(так как S_N плотно в L_p, то имеем)

$$=\sup_{0<h\le 1}\frac{1}{h^{1+\delta_j}}\left(\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(\Delta^{(2)}_h\dfrac{\partial^{[\ell_j]-1}}{\partial x_j^{[\ell_j]-1}}\mathcal{P}_m(x),\varphi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}\right)=$$

$$=\sup_{0<h\le 1}\frac{1}{(2\pi)^n}\left(\sup_{\varphi\in S_N}\frac{1}{h^{1+\delta_j}}\frac{\left|\left(\Delta^{(2)}_h\dfrac{\partial^{[\ell_j]-1}}{\partial x_j^{[\ell_j]-1}}\mathcal{P}_m(x),\displaystyle\int_{E_n}e^{ix\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\sup_{0<h\le 1}\left(\sup_{\varphi\in S_N}\frac{\left|\left(\mathcal{P}_m(x),\displaystyle\int_{E_n}e^{ix\xi}e^{ih\xi_j}\frac{\sin^2\frac{h}{2}\xi_j}{(h\xi_j)^{1+\delta_j}}\cdot(i\xi_j)^{\ell_j}\hat{\varphi}(\xi)\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}}\right)\le$$

(так как функция $e^{ih\xi_j}\dfrac{\sin^2\frac{h}{2}\xi_j}{(h\xi_j)^{1+\delta_j}}$ является равномерно относительно h мультипликатором типа(p, p) , то функция

$$\psi(h,\xi) = e^{ih\xi_j} \frac{\sin^2\frac{h}{2}\xi_j}{(h\xi_j)^{1+\delta_j}} \hat{\varphi}(\xi) \text{ принадлежит } L_{p'} \text{ и } \|\psi\|_{L_{p'}} \leqslant M\|\varphi\|_{L_{p'}},$$

следовательно, имеем)

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{0<h\leqslant 1} \left(\sup_{\varphi\in S_N} \frac{\left|\left(\mathcal{P}_m(x), \int_{E_n} e^{ix\xi}(i\xi_j)^{\ell_j} \hat{\psi}(h,\xi)\right)\right|}{\|\psi(h,\xi)\|_{L_{p'}}} \cdot \frac{\|\psi(h,\xi)\|_{L_{p'}}}{\|\varphi(\xi)\|_{L_{p'}}} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c\| \mathcal{P}_m(x); L_p^{\ell}(E_n)\| < \infty.$$

Тем самым установлено, что $m_j \leqslant [\ell_j]$ (см. [1]).

Пусть теперь $\ell_j = [\ell_j]$. В этом случае

$$\left\|\frac{\partial^{\ell_j}}{\partial x_j^{\ell_j}} \mathcal{P}_m(x)\right\|_{L_p} = \sup_{\varphi\in S_N} \frac{\left|\left(\frac{\partial^{\ell_j}}{\partial x_j^{\ell_j}} \mathcal{P}_m(x), \varphi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}} =$$

$$= \sup_{\varphi\in S_N} \frac{\left|\left(\mathcal{P}_m, \int_{E_n} e^{ix\xi}(i\xi_j)^{\ell_j}\hat{\varphi}(\xi)d\xi\right)\right|}{\|\varphi\|_{L_{p'}}} \leqslant c\|\mathcal{P}_m(x); L_p^{\ell}(E_n)\| < \infty.$$

Следовательно, $m_j \leqslant \ell_j - 1$.

Обозначая

$$\|u\|_{L^{\ell}_{p,\beta}(E_n)} = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\varphi\in\Phi} \frac{\left|u, \int_{E_n} e^{ix\xi}(-i\xi_k)^{\ell_k}\hat{\varphi}(\xi)d\xi)\right|}{\|(1+|x|)^{-\beta/p'}\varphi(x)\|_{L_{p'}}},$$

используя лемму 3 и проводя рассуждения, аналогичные теореме 1, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $u \in L^{\ell}_{p,\beta}(E_n)$, $1 < |\alpha| < p$,

$$\frac{\beta|\alpha|}{np}+\frac{|\alpha|}{p}>1.$$

Тогда существует полином $\mathcal{P}_m(x)$, $m=(m_1,\dots,m_n)$, такой, что

$$|u(x)-\mathcal{P}_m(x)|\le c\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{-\chi}\|u,L^{\ell}_{p,\beta}(E_n)\|,$$

где $\chi>0$, $m_j\le[\ell_j]$, если $[\ell_j]\ne\ell_j$, и $m_j\le\ell_j-1$, если $[\ell_j]=\ell_j$.

Замечание. Отметим, что для функций $u\in L^{\ell}_{p,\beta}(E_n)$, $\beta\ge 0$, условие выхода в бесконечности на полином почти по всем направлениям, параллельным координатным осям, в силу теорем 1 и 2, можно записать в виде

$$\frac{\beta|\alpha|}{pn}+\frac{|\alpha|}{p}>1,\quad \beta\ge 0,\ p>1,\ |\alpha|>1. \tag{3}$$

Пусть $u\in L^{(1)}_{p,\nu p}(E_n)$. Тогда из (3) получаем

$$\nu+\frac{n}{p}>1,\quad \nu\ge 0,\quad p>1,\ n>1. \tag{4}$$

Как показано в [4], условие (4) является необходимым и достаточным для одномерного выхода функции u на константу в бесконечности.

§ 3. О выходе на полином решений псевдодифференциального уравнения при $|\alpha|\le 1$

Определим класс $L_{p,\nu,\beta}(E_n)$, где $1<p<\infty$; ν - неотрицательное целое число, $\beta>n(p-1)+\nu p$. Функция $f(x)\in L_{p,\nu,\beta}(E_n)$, если выполнены условия:

1) $\|(1+|x|)^{\beta/p}f(x);L_p(E_n)\|<\infty$;

2) $\int\limits_{E_n}x^{\sigma}f(x)dx=0,\quad 0\le|\sigma|\le\nu.$

Лемма 4. Пусть $f(x)\in L_{p,\nu,\beta}(E_m)$, $1\le m\le n$; $\alpha_0=\min\limits_{1\le j\le n}\alpha_j$; $\sigma\ge 1$. Тогда для любого ρ, $|\rho|\ge 0$, имеет место

$$\left|\int\limits_{E_m} f(t) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t_1-x_1}{\sigma^{\alpha_1}};\ldots;\frac{t_m-x_m}{\sigma^{\alpha_m}};-\frac{x_{m+1}}{\sigma^{\alpha_{m+1}}};\ldots;-\frac{x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)dt\right| \leq \frac{C_\rho}{\sigma^{\alpha_0 \nu}}\|f;L_{p,\beta}\|. \tag{5}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть $n=1$, рассмотрим

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt\right| = \left|\int\limits_{-\infty}^{0} f(t) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt + \int\limits_{0}^{\infty} f(t) D^{\beta}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt\right| \leq$$

(интегрируя по частям в каждом слагаемом $\nu+1$ - раз, учитывая условия 1) и 2), получаем)

$$\leq \left|\frac{1}{\sigma^{\alpha(\nu+1)}}\int\limits_{-\infty}^{0} D^{\rho+\nu+1}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{t} f(u)(t-u)^{\nu}du\right)dt\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{\sigma^{\alpha(\nu+1)}}\int\limits_{0}^{\infty} D^{(\rho+\nu+1)}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)\left(\int\limits_{t}^{\infty} f(u)(u-t)^{\nu}du\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{\sigma^{\alpha(\nu+1)}}\|f, L_{p,\beta}\| \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|D^{(\rho+\nu+1)}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)\right| dt \leq \frac{C}{\sigma^{\alpha\nu}}\|f; L_{p,\beta}(E_1)\|.$$

Пусть теперь неравенство (5) верно для $n-1$. Оценим интеграл вида

$$\int\limits_{E_n} f(t) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt$$

(остальные интегралы будут оцениваться аналогично). Будем предполагать, что $\alpha_0 = \alpha_n$. Рассмотрим

$$\left|\int\limits_{E_n} f(t) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt\right| = \left|\int\limits_{E_{n-1}} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t';t_n) D^{\rho}\hat{G}\left(\frac{t'-x'}{\sigma^{\alpha'}};\frac{t_n-x_n}{\sigma^{\alpha_n}}\right)dt_n\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{E_{n-1}} dt' \int\limits_{-\infty}^{0} f(t'; t_n) D^{\rho} \hat{G} \left(\frac{t'-x'}{v^{\alpha'}}; \frac{t_n - x_n}{v^{\alpha_n}} \right) dt_n + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{E_{n-1}} dt' \int\limits_{0}^{\infty} f(t'; t_n) D^{\rho} \hat{G} \left(\frac{t'-x'}{v^{\alpha'}}; \frac{t_n - x_n}{v^{\alpha_n}} \right) dt_n \right| \leq$$

(интегрируя по частям, получаем)

$$\leq \left| \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{1}{v^{\alpha_n \kappa}} \int\limits_{E_{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{\kappa} f(t', u) du \right) D^{(\rho+\kappa)} \hat{G} \left(\frac{t'-x'}{v^{\alpha'}}; - \frac{x_n}{v^{\alpha_n}} \right) dt' \right| +$$

$$+ \frac{1}{v^{\alpha_n(\nu+1)}} \int\limits_{E_{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{t_n} |u^{\nu} f(t', u)| du \right) \left| D^{(\rho+\kappa+1)} \hat{G} \left(\frac{t'-x'}{v^{\alpha'}}; \frac{t_n - x_n}{v^{\alpha_n}} \right) \right| dt' +$$

$$+ \frac{1}{v^{\alpha_n(\nu+1)}} \int\limits_{E_{n-1}} \left(\int\limits_{t_n}^{\infty} |u^{\nu} f(t', u)| du \right) \left| D^{(\rho+\kappa+1)} \hat{G} \left(\frac{t'-x'}{v^{\alpha'}}; \frac{t_n - x_n}{v^{\alpha_n}} \right) dt' \right| \leq$$

(учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^{\kappa} f(t', u) du \in L_{\rho, \nu-\kappa, \beta-\kappa\rho}(E_{n-1})$, по предположению индукции, получаем)

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{\nu} \frac{C_{\kappa}}{v^{\alpha_n \kappa} v^{\alpha_n(\nu-\kappa)}} \left\| (1+|x|)^{\beta/\rho} f,\ L_{\rho}(E_n) \right\| +$$

$$+ \frac{C}{v^{\alpha_n(\nu+1)}} \left\| (1+|x|)^{\beta/\rho} f,\ L_{\rho}(E_n) \right\| \int\limits_{E_n} \left| D^{(\rho+\kappa+1)} \hat{G} \left(\frac{t-x}{v^{\alpha}} \right) \right| dt \leq$$

$$\leqslant \frac{C}{v^{\alpha_n \nu}} \left\| (1+|x|)^{\beta/p} f,\ L_p(E_n) \right\| .$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 5. Пусть $u \in S'_N$ - обобщенное решение уравнения (1) и $f(x) \in L_{p,\nu,\beta}(E_n)$, $|\alpha| + \alpha_0 \nu > 1$. Тогда для всякого ρ, $|\rho| \geqslant 0$, справедливо

$$\| D^{\rho} u_{h_1}(x) - D^{\rho} u_{h_2}(x); C(E_n) \| \leqslant C \left(h_1^{-\tau} + h_2^{-\tau} \right) \cdot \| f, L_{p,\beta}(E_n) \| ,$$

где $\tau > 0$, $h_1 > 1$, $h_2 > 1$ и C - константа, не зависящая от x.

Доказательство. Используя предыдущую лемму и представление (2), получаем

$$| D^{\rho} u_{h_1}(x) - D^{\rho} u_{h_2}(x) | \leqslant C \int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha| - \alpha\rho - \alpha_0 \nu} dv \cdot \| f, L_{p,\beta}(E_n) \| \leqslant$$

$$\leqslant C \left(h_1^{-\tau} + h_2^{-\tau} \right) \| f, L_{p,\beta}(E_n) \| ,$$

где

$$\tau = |\alpha| + \alpha\rho + \alpha_0 \nu - 1 .$$

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда на любом компакте из E_n при $h \to \infty$ равномерно $u_h(x) \to \mathcal{P}_m(x)$, где $\mathcal{P}_m(x)$ - полином.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3 работы [2] и из леммы 5 настоящей работы.

Теорема 3. Пусть $u \in S'_N$ - обобщенное решение уравнения (1),

$$f(x) \in L_{p,\nu,\beta}(E_n), \quad |\alpha| + \alpha_0 \nu > 1, \quad 0 < |\alpha| < p .$$

Тогда существует полином $\mathcal{P}_m(x)$, принадлежащий ядру оператора P степени $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \leqslant N - 1$, и такой, что

$$|u(x)-\mathscr{P}_m(x)| \leqslant c\prod_{j=1}^{n}\left(1+|x_j|\right)^{-\chi}\|f;L_{p,\beta}(E_n)\|,$$

где $\chi>0$.

Доказательство. В силу леммы 5 и леммы 5 из [15] , для почти всех $x\in E_n$ имеет место

$$u(x)-\mathscr{P}_m(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|}\int_{E_n}f(t)\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)dt\,d\sigma. \qquad (6)$$

Кроме того, нетрудно показать, что при выполнении условий теоремы сходимость в правой части (6) равномерная. Тем самым для доказательства теоремы достаточно получить оценку

$$\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\,d\sigma,$$

не зависящую от h . Имеем

$$\left|\int_0^{\infty}\sigma^{-|\alpha|}\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\,d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{1/|\alpha|m}}^{\infty}\sigma^{-|\alpha|}\left|\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\right|d\sigma\;+$$

$$+\int\limits_{0}^{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}}\sigma^{-|\alpha|}\left|\int_{E_n}\hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)f(t)\,dt\right|d\sigma=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2,$$

здесь m - некоторое положительное число.

Оценим $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$:

$\mathcal{J}_1 \leqslant$ (в силу леммы 4)

$$\leq C \int\limits_{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}}^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\alpha_0\nu} d\sigma \| f ; L_{p,\beta}(E_n) \| \leq C \prod_{j=1}^{n} (1+|x_j|)^{-\frac{(|\alpha|+\alpha_0)\nu-1}{|\alpha|m}} \times$$

$$\times \| f ; L_{p,\beta}(E_n) \| \leq C \prod_{j=1}^{n} (1+|x_j|)^{-\chi} \| f ; L_{p,\beta}(E_n) \| ,$$

где $\chi > 0$,

$$J_2 \leq \int\limits_0^{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}} \sigma^{-|\alpha|} \int\limits_{E_n} \left| \hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) \right| \prod_{j=1}^{n} |t_j|^{-\frac{\delta}{pn}} \cdot \prod_{j=1}^{n} |t_j|^{\frac{\delta}{pn}} |f(t)| \, dt \, d\sigma \leq$$

(здесь $0 < \delta < n(p-1)$; применяя неравенство Гёльдера, получаем)

$$\leq \int\limits_0^{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}} \sigma^{-|\alpha|} \left[\int\limits_{E_n} \left| \hat{G}\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) \right|^{p'} \prod_{j=1}^{n} |t_j|^{-\frac{\delta p'}{pn}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} d\sigma \| f, L_{p,\beta}(E_n) \| \leq$$

$$\leq C \int\limits_0^{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}} \sigma^{-|\alpha|} \prod_{j=1}^{n} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_j}{\left(1 + \frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)^{[\ell_j]+1} |t_j|^{\frac{\delta p'}{pn}}} \right]^{\frac{1}{p'}} d\sigma \| f, L_{p,\beta} \| \leq$$

(заменив $\dfrac{t_j}{\sigma^{\alpha_j}} = t_j'$, имеем)

$$\leq C \int\limits_0^{\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha|m}}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{p} - \frac{\delta}{np}|\alpha|} \prod_{j=1}^{n} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_j}{\left(1 + \left|t_j - \frac{x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right|\right)^{[\ell_j]+1} |t_j|^{\frac{\delta p'}{pn}}} \right]^{\frac{1}{p'}} d\sigma \| f, L_{p,\beta} \| \leq$$

$$\left(\text{обозначив } \tilde{x}_j = \begin{cases} x_j , & |x_j| \geq 1, \\ 1 , & |x_j| < 1, \end{cases} \quad \text{получаем} \right)$$

$$\leq C \int_0^{\prod_{j=1}^n (1+|x_j|)^{\frac{1}{|\alpha| m}}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-\frac{\delta|\alpha|}{pn}} dv \prod_{j=1}^n \left[\int_{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right]}^{\frac{1}{2}\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|} \frac{dt_j}{\left(1+\left|t_j-\frac{x_j}{v^{\alpha_j}}\right|\right)^{1+[\ell_j]} |t_j|^{\frac{\delta p'}{np}}} + \right.$$

$$\left. + \int_{|t_j|>\frac{1}{2}\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|} \frac{dt_j}{\left(1+\left|t_j-\frac{x_j}{v^{\alpha_j}}\right|\right)^{1+[\ell_j]} |t_j|^{\frac{\delta p'}{np}}} \right]^{\frac{1}{p'}} dv \| f, L_{p,\beta} \| \leq$$

(в первом слагаемом делаем замену $t_j = \left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right| t_j'$)

$$\leq \int_0^{C\prod_{j=1}^n |\tilde{x}_j|^{\frac{1}{|\alpha| m}}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-\frac{\delta}{pn}|\alpha|} dv \prod_{j=1}^n \left[\frac{\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|}{\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|^{\frac{\delta p'}{pn}} \left(1+\frac{1}{2}\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|\right)^{1+[\ell_j]}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt_j}{|t_j|^{\frac{\delta p'}{np}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|^{\frac{\delta p'}{np}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_j}{\left(1+\left|t_j-\frac{x_j}{v^{\alpha_j}}\right)^{1+[\ell_j]}\right.} \right]^{\frac{1}{p'}} dv \, \| f; L_{p,\beta} \| \leq$$

(заменяя во втором слагаемом $t_j - \frac{x_j}{v^{\alpha_j}} = t_j'$ и учитывая, что

$$\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right| \cdot \left(1+\frac{1}{2}\left|\frac{\tilde{x}_j}{v^{\alpha_j}}\right|\right)^{-(1+[\ell_j])} \leq C$$

, получаем)

$$\leq \frac{C}{\prod_{j=1}^n |\tilde{x}_j|^{\frac{\delta}{pn}}} \int_0^{c\prod_{j=1}^n |\tilde{x}_j|^{\frac{1}{|\alpha| m}}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}} dv \cdot \| f; L_{p,\beta}(E_n) \| =$$

(так как $\frac{|\alpha|}{p} < 1$, то)

$$= \frac{C}{\prod_{j=1}^{n} |\tilde{x}_j|^{\frac{\delta}{np} - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{|\alpha|} - \frac{1}{p}\right)}} \cdot \| f; L_{p,\beta}(E_n) \| \leq$$

(выбирая m так, чтобы $\frac{\delta}{np} - \frac{1}{m}\left(\frac{1}{|\alpha|} - \frac{1}{p}\right) > 0$, имеем)

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \left(1 + |x_j|\right)^{-\chi} \| f; L_{p,\beta}(E_n) \| ,$$

где $\chi > 0$.

Теорема доказана.

Литература

1. Успенский С.В., Чистяков Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений.- Сиб. мат.журн., 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.
2. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1969, т.105, с.89-167.
3. Лизоркин П.И. Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1979, т.150, с.174-197.
4. Портнов В.Р. К вопросу о выходе на константу функций из пространств $W^{(l)}_{p,\nu}$.-Докл.АН СССР, 1974, т.215, № 3, с.550-553.
5. Седов В.Н. О функциях, обращающихся на ∞ в полином.- В кн.: Труды Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения. Баку, 1966, с.204-212.
6. Никольский Ю.С. Граничные свойства функций из весовых классов.- Докл. АН СССР, 1965, т.164, № 3, с.503-506.
7. Лиголкина Т.С. О плотности финитных функций в весовых классах.- Мат. заметки, 1967, т. 2, № 1, с.53-60.
8. Бесов С.В. Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плотность финитных функций.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1969, т.105, с.3-14.
9. Никольский Ю.С. Поведение дифференцируемых функций из весовых классов на бесконечности.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1972, т.117, с.244-255.
10. Кудрявцев Л.Д. О параметрических неравенствах для функций многих пе-

ременных.- Докл. АН СССР, 1972, т.202, № 6, с.1261-1264.

11. Кудрявцев Л.Д. Свойства граничных значений функций из весовых пространств и их приложения к краевым задачам.- В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., Наука, 1972, с.259-265.

12. Кудрявцев Л.Д. О следах функций многих переменных и полях направлений, регулярных в бесконечности для оператора Лапласа.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1972,т.112, с.256-270.

13. Никольский Ю.С. Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами.-Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1974, с.182-198.

14. Калябин Г.А. Оценки для функций с конечной полунормой О.В.Бесова.- Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 4, с.713-717.

15. Успенский С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности.-Сиб.мат.журн.,1972, т.13, № 3, с.665-678.