УДК 517.518.22

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В.Г. Мазья, Т.О. Шапошникова (Ленинград)

В настоящей работе изучаются классы мультипликаторов на пространствах дифференцируемых функций целого и дробного порядков, точнее, на пространствах $W_p^\ell(R^n)$, $B_p^\ell(R^n)$ и др. Под мультипликатором понимается функция, умножение на которую не выводит из пространства. Классы мультипликаторов обозначаются через MW_p^ℓ, MB_p^ℓ и т.п. Введение в них нормы как нормы операторов умножения превращает эти классы в банаховы пространства. Основные результаты - полное описание рассматриваемых здесь пространств мультипликаторов и теоремы о следах и продолжениях мультипликаторов. В случае $\ell p \leq n$, $p>1$, характеристика пространств мультипликаторов дается в терминах различных емкостей, а при $\ell p>n$, $p>1$, а также при $p=1$ эти термины не используются.

По-видимому, первое систематическое исследование мультипликаторов в пространствах MW_2^ℓ, $0<\ell<1$, было предпринято Хиршманом [18,19]. В [18] показано, например, что если $\gamma \in MW_2^\ell$ и функция φ на R^1 удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\rho \in (0,1)$ и ограничена, то $\varphi(\gamma) \in MW_2^r$, где $0<r<\ell\rho$. В [19] найдено следующее достаточное условие принадлежности функции γ классу MW_2^ℓ, $0<\ell<1/2$, на единичной окружности C:

$$\|\gamma\|_{L_\infty(C)} + \sup\Big(\sum_k |\gamma(t_k)-\gamma(t_{k+1})|^\beta\Big)^{1/\beta} < \infty, \beta\ell<1, \ \beta>2,$$

где супремум вычисляется по всевозможным разбиениям окружности C точками t_{k}. Р. Стричартц [1] рассмотрел класс мультипликаторов в пространстве H_p^ℓ бесселевых потенциалов порядка ℓ с плотностью из L_p, $p>1$, и дал в случае $\ell p>n$ исчерпывающее описание этого класса. Именно, функция γ принадлежит пространству MH_p^ℓ в том и только том случае, если для всех точек m целочисленной решетки $\|\gamma\eta_m\|_{H_p^\ell} \leq const$, где $\eta_m(x)=\eta(x+m)$, а η - функция из $C^\infty(R^n)$, равная единице на кубе $\{x: |x_i| \leq 1\}$ и нулю вне куба $\{x:|x_i|\leq 2\}$. В [1] найдены также достаточные условия принадлежности функции классу MH_p^ℓ при $\ell p\leq n$, $p>1$, и установлены некоторые теоремы вложения для пространств мультипликаторов. В [1, 16, 18] рассмотрен вопрос о принадлежности характеристической функции подмножества R^n пространствам мультипликаторов.

Отметим еще книгу Г. Трибеля [17], в кот..., в частности, получены достаточные условия принадлежности функции классу мультипликаторов в пространстве $B^\ell_{p,q}(R^n)$.

В настоящей работе три параграфа, каждый из которых состоит из разделов. В §1 исследуются мультипликаторы в пространстве W_p^ℓ с нормой $\|D_\ell u\|_{L_p}+\|u\|_{L_p}$, где $D_\ell u=|\nabla_\ell u|$ при целом ℓ и

$$(D_\ell u)(x)=\left(\int|\nabla_{[\ell]}u(x+h)-\nabla_{[\ell]}u(x)|^p|h|^{-n-p\{\ell\}}dh\right)^{1/p}$$

при дробном ℓ. Первые семь разделов этого параграфа посвящены случаю $p>1$, а в 1.8 предполагается, что $p=1$.

В 1.1 введены обозначения. В 1.2 получены используемые в дальнейшем точечные оценки сужений бесселевых и риссовских потенциалов на подпространства, обобщающие полезную теорему Хедберга [2]. Другие вспомогательные утверждения приведены в 1.3. Описание мультипликаторов в $W_p^\ell\ (p>1)$ дано в 1.4 (ℓ - целое) и в 1.5 (ℓ - произвольное положительное число) Показано, что норма в пространстве MW_p^ℓ эквивалентна величине

$$\|\gamma\|_{L_\infty}+\sup_e\frac{\|D_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^\ell)]^{1/p}},$$

где супремум берется по всем компактным подмножествам R^n, а $cap(e,W_p^\ell)$ - емкость, порожденная нормой в W_p^ℓ. При выводе этих результатов существенно используется следствие из так называемого " сильного емкостного неравенства "

$$\int_0^\infty cap\left(\{x\in R^n:|u(x)|\geq t\},W_p^\ell\right)dt^p\leq c\|u\|^p_{W_p^\ell}$$

(лемма 1.2) (см. [3 - 5]). В разделах 1.4 и 1.5 доказано также интерполяционное неравенство

$$\|\gamma\|_{MW_p^\sigma}\leq c\|\gamma\|^{1-\sigma/\ell}_{L_\infty}\|\gamma\|^{\sigma/\ell}_{MW_p^\ell},\quad 0<\sigma<\ell.$$

Различные варианты условий, необходимых и достаточных для того, чтобы функция была мультипликатором в пространстве W_p^ℓ, обсуждаются в 1.6. В 1.7 аналогичные результаты получены для пространства ML_p^ℓ, где L_p^ℓ - пополнение $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|D_\ell u\|_{L_p}$. Пространства MW_1^ℓ и ML_1^ℓ

изучаются в 1.8. Здесь, например, доказано соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_1^\ell} \sim \|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_{x\in R^n,\, \rho\in(0,1)} \rho^{\ell-n} \|D_\ell \gamma\|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))},$$

где $\mathcal{B}_\rho(x)$ - шар с центром в точке x и радиусом ρ. Не использующие понятия емкости верхние и нижние оценки норм в пространствах мультипликаторов содержатся в 1.9. В том же разделе показано, что если $\gamma\in MW_p^\ell, p\in[1,\infty)$ и $\|\gamma^{-1}\|_{L_\infty}<\infty$, то $\gamma^{-1}\in MW_p^\ell$.

В § 2 исследуются следы и продолжения мультипликаторов. В 2.1 показано, что MW_p^ℓ и ML_p^ℓ являются пространствами следов на R^n мультипликаторов в весовых пространствах С.Л. Соболева на R^{n+m}, аналогично тому, как пространства W_p^ℓ и L_p^ℓ представляют собой пространства следов функций из весовых пространств [6, 7]. Приложения этих результатов к первой краевой задаче для эллиптического оператора в полупространстве даны в 2.2 (в предположении, что краевые условия принадлежат некоторым классам мультипликаторов в R^n, устанавливается однозначная разрешимость задачи в пространстве мультипликаторов в R_+^{n+1}). В разделе 2.3 изучаются следы функций из $MW_p^\ell(R^{n+m})$ на R^n при условии, что $\{\ell-m/p\}>0$. Доказано, что пространство следов совпадает с пространством $MW_p^{\ell-m/p}(R^n)$.

Заключительный § 3 посвящен описанию мультипликаторов в пространстве B_p^ℓ, норма в котором содержит вторые разности функции.

Основные результаты этой работы приведены без доказательства в заметках авторов [8, 17].

§ 1. Мультипликаторы в пространствах W_p^ℓ, L_p^ℓ

1.1. Обозначения.

Пусть $\mathcal{B}_\rho(x)=\{h\in R^n: |h-x|<\rho\}$, $\mathcal{B}_\rho=\mathcal{B}_\rho(0)$, $\nabla_\ell=\{\partial^\ell/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\}$. Через $c, c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от "безразмерных" параметров ℓ, n и т.п. Будем говорить, что величины a и b эквивалентны $(a\sim b)$, если $c_1 a\leq b\leq c_2 a$. Интегрирование без указания пределов распространено на R^n. Мы не различаем в обозначениях пространства скалярных и векторных функций.

Положим $(D_\ell u)(x)=|\nabla_\ell u(x)|$ при $\ell=0,1,\ldots$

и

$$(D_\ell u)(x)=\left(\int|\nabla_{[\ell]}u(x+h)-\nabla_{[\ell]}u(x)|^p|h|^{-n-p\{\ell\}}dh\right)^{1/p} \qquad (1.1)$$

при дробном $\ell>0$ и $p\in[1,\infty)$.

Обозначим через $W_p^\ell = W_p^\ell(R^n)$ пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|D_\ell u\|_p + \|u\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ - норма в L_p, $\ell>0$, $1\le p<\infty$, и через $L_p^\ell = L_p^\ell(R^n)$, $\ell p<n$, - пополнение $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|D_\ell u\|_p$.

Пусть еще $W_{p,loc}^\ell = \{u : u\eta \in W_p^\ell,\ \forall \eta \in C_0^\infty(R^n)\}$.

Будем говорить, что функция γ, заданная на R^n, принадлежит пространству $MW_p^\ell(R^n)$, если $\gamma u \in W_p^\ell(R^n)$ для всех $u \in W_p^\ell(R^n)$.

Пусть $u_n \to u$ и $\gamma u_n \to v$ в W_p^ℓ. Тогда существует такая подпоследовательность номеров $\{n_k\}_{k\ge 1}$, что для всех x из множества полной меры $u_{n_k} \to u(x)$, $\gamma(x)u_{n_k}(x) \to v(x)$ и $v=\gamma u$ почти везде в R^n. Итак, оператор $u \to \gamma u$ замкнут как оператор в W_p^ℓ. Если $\gamma \in MW_p^\ell$, то этот оператор определен на всем W_p^ℓ и поэтому, согласно теореме Банаха, ограничен. Норму оператора $u \to \gamma u$ будем считать нормой в пространстве MW_p^ℓ, т.е.

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} = \sup\{\|\gamma u\|_{W_p^\ell} : \|u\|_{W_p^\ell} \le 1\}.$$

Определим емкость $cap(e, W_p^\ell)$ компактного множества $e \subset R^n$ равенством

$$cap(e, W_p^\ell) = \inf\left\{\|u\|_{W_p^\ell}^p,\ u \in C_0^\infty(R^n),\ u \ge 1, \text{ на } e\right\}.$$

Заменяя в этих определениях W на L, получаем определение пространства ML_p^ℓ и емкости $cap(e, L_p^\ell)$.

1.2 Оценки для потенциалов.

Пусть f - неотрицательная функция из $L_p(R^{n+m})$, $m\ge 0$, $R^{n+m} = \{z=(x,y) : x\in R^n,\ y \in R^m\}$.

Через $J_r^{(n+m)} f$ обозначаем бесселев потенциал порядка r с плотностью f, т.е.

$$J_r^{(n+m)} f = g_r * f,$$

где $g_r(z) = G_r(|z|) = c K_{(n+m-r)/2}(|z|)\,|z|^{(r-n-m)/2}$

(K_ν - модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка ν). Функция G_r положительна и убывает на полуоси $(0,\infty)$; для нее имеют место следующие асимптотические формулы.

При $t \to 0$

$$G_r(t) \sim \begin{cases} t^{r-n-m}, & 0<r<n+m, \\ \log t^{-1}, & r=n+m, \\ 1, & r>n+m. \end{cases} \qquad (1.2)$$

При $t \to \infty$

$$G_r(t) \sim |t|^{(r-n-m-1)/2} e^{-t}. \tag{1.3}$$

Введем еще максимальный оператор Харди-Литтлвуда:

$$(M^{(n)}g)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\operatorname{mes}_n \mathcal{B}_r(x)} \int_{\mathcal{B}_r(x)} |g(\xi)|d\xi.$$

Хедберг [2] доказал следующее полезное неравенство:

$$(I^{(n)}_{r\theta} f)(x) \leq c\left[(I^{(n)}_r f)(x)\right]^{\theta}\left[(M^{(n)}f)(x)\right]^{1-\theta}, \tag{1.4}$$

где $0<\theta<1$, $0<r<n$, а I_r - потенциал Рисса порядка r, т.е. $I_r f = |x|^{r-n} * f$. Для дальнейшего нам понадобится следующая модификация неравенства (1.4).

Л е м м а 1.1. Для почти всех $x \in R^n$

$$(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p} f)(x,0) \leq c\left[(J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0)\right]^{\theta}\left[(M^{(n)}g)(x)\right]^{1-\theta}, \tag{1.5}$$

где $g(\xi) = \|f(\xi,\cdot)\|_{L_p(R^m)}$, $0<\theta<1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta \in (0,1]$ и $E_\delta(x) = \{\zeta = (\xi;\eta): \xi \in R^n, \eta \in R^m, (x-\xi)^2+\eta^2 > \delta^2\}$. Представим потенциал в левой части неравенства (1.5) в виде суммы двух интегралов, один из которых распростоанен на $E_\delta(x)$. Пусть $r\theta < n+m/p'$, тогда в силу (1.2)

$$\int_{R^{n+m}\setminus E_\delta(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta) f(\xi,\eta)d\xi d\eta \leq c \int_{\mathcal{B}_\delta(x)} g(\xi)\left(\int_{|\eta|<\delta} \frac{d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{p'q}}\right)^{1/p'} d\xi, \tag{1.6}$$

где $p' = p/(p-1)$ и $q = n - r\theta + m/p'$.

Ясно, что

$$\left(\int_{|\eta|<\delta} \frac{d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{p'q}}\right)^{1/p'} \leq \begin{cases} c\,|x-\xi|^{r\theta-n}, & r\theta<n, \\ c\log\dfrac{2\delta}{|x-\xi|}, & r\theta=n, \\ \delta^{r\theta-n}, & r\theta>n. \end{cases} \tag{1.7}$$

Рассмотрим, например, случай $r\theta<n$. Правая часть (1.6) не превосходит величины

$$c\int_{\mathcal{B}_\delta(x)} \frac{g(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{n-r\theta}} = c\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\delta 2^{-j}<|x-\xi|<\delta 2^{-j+1}} \frac{g(\xi)d\xi}{|x-\xi|^{n-r\theta}} \leq$$

$$\leq c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(n-r\theta)}\delta^{-n+r\theta}\int\limits_{|x-\xi|<\delta 2^{-j+1}} g(\xi)d\xi\leq c\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x).$$

Такая же оценка получается из (1.6) - (1.7) при $r\theta\geq n$.

Пусть теперь $r\theta=n+m/p'$. В силу (1.2) левая часть неравенства (1.6) не больше чем

$$c\int\limits_{\mathcal{B}_\delta(x)} g(\xi)\left(\int\limits_{|\eta|<\delta}|\log c(|x-\xi|+|\eta|)|^{p'}d\eta\right)^{1/p'}d\xi\leq$$

$$\leq c(1+|\log\delta|)\delta^{m/p'}\int\limits_{\mathcal{B}_\delta(x)} g(\xi)d\xi\leq c(1+|\log\delta|)\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x).$$

Если $r\theta>n+m/p'$, то левая часть неравенства (1.6) оценивается величиной

$$c\delta^{m/p'}\int\limits_{\mathcal{B}_\delta(x)} g(\xi)d\xi\leq c\delta^{n+m/p'}(M^{(n)}g)(x).$$

Итак, при $\delta\leq 1$

$$\int\limits_{R^{n+m}\setminus E_\delta(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\leq\begin{cases} c\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x), & r\theta<n+m/p',\\ c(1+|\log\delta|)\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x), & r\theta=n+m/p',\\ c\delta^{n+m/p'}(M^{(n)}g)(x), & r\theta>n+m/p'.\end{cases}\qquad(1.8)$$

Оценим теперь интеграл по $E_\delta(x)$. В случае $r\theta<n+m/p'$ имеем

$$\int\limits_{E_\delta(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\leq c\int\limits_{E_\delta(x)\setminus E_1(x)}\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{n-r\theta+m/p'}}+$$

$$+c\int\limits_{E_1(x)} e^{-\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}}\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{(n+1-r\theta+m/p')/2}}\leq$$

$$\leq c\delta^{-r(1-\theta)}\int\limits_{E_\delta(x)\setminus E_1(x)}\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{n-r+m/p'}}+c\int\limits_{E_1(x)} e^{-\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}}\frac{f(\xi,\eta)d\xi d\eta}{(|x-\xi|+|\eta|)^{(n+1-r+m/p')/2}}\leq$$

$$\leq c\delta^{-r(1-\theta)}(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0).$$

Точно так же проводится оценка и при $r\theta\geq n+m/p'$. В результате получаем

$$\int\limits_{E_\delta(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \le \begin{cases} c\delta^{-r(1-\theta)}(J^{(n-m)}_{r-m/p}f)(x,0), \\ \text{если } r\theta<n-m/p'; \\ c(1+|\log\delta|)(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0), \\ \qquad \text{если } r\theta=n-m/p'; \\ c(J^{(n+m)}_{r+mp}f)(x,0), \\ \qquad \text{если } r\theta>n+m/p'. \end{cases} \tag{1.9}$$

Заметим еще, что так как $G(t)=O(e^{-ct})$, то

$$\int\limits_{E_1(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \le c\int\limits_{E_1(x)} g(\xi)e^{-c|x-\xi|}d\xi =$$

$$= c\sum_{j=0}^{\infty}\ \int\limits_{2^j<|x-\xi|<2^{j+1}} e^{-c|x-\xi|}g(\xi)\,d\xi \le c\sum_{j=0}^{\infty} e^{-c2^j}2^{nj}(M^{(n)}g)(x)\le c(M^{(n)}g)(x).$$

Объединяя эту оценку с (1.8), где $\delta=1$, получаем неравенство

$$(J^{(n-m)}_{r\theta+m/p}f)(x,0)\le c(M^{(n)}g)(x). \tag{1.10}$$

В случае $r\theta>n+m/p'$

$$\int\limits_{R^{n+m}\setminus E_1(x)} g_{r\theta+m/p}(x-\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \le c\int\limits_{R^{n+m}\setminus E_1(x)} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\le c(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0),$$

что вместе с (1.9) дает оценку

$$(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p}f)(x,0)\le c(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0),\quad r\theta>n+m/p'. \tag{1.11}$$

При $r\theta<n+m/p'$ из (1.8) - (1.10) следует, что при всех $\delta\in(0,\infty)$

$$c(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p}f)(x,0)\le\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x)+\delta^{-r(1-\theta)}(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0).$$

Минимизируя правую часть по δ, приходим к (1.5).

При $r\theta=n+m/p'$ в силу (1.8) и (1.9) для всех $\delta\in(0,1]$

$$(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p}f)(x,0)\le c(1+|\log\delta|)\left[\delta^{r\theta}(M^{(n)}g)(x)+(J^{(n+m)}_{r+m/p}f)(x,0)\right]. \tag{1.12}$$

Если $(M^{(n)}g)(x,0) \leq (J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0)$, то согласно (1.10)

$$(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p} f)(x,0) \leq c\,(J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0) \qquad (1.13)$$

и неравенство (1.5) следует из (1.10) и (1.3). Пусть $(M^{(n)}g)(x,0) > (J^{(n+m)}_{n+m/p} f)$ $(x,0)$. Положим в (1.12)

$$\delta^{r\theta} = \frac{(J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0)}{(M^{(n)}g)(x)}\,.$$

Тогда

$$(J^{(n+m)}_{r\theta+m/p} f)(x,0) \leq c\,(1+|\log\delta|)(J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0) =$$

$$= c\,(1+|\log\delta|)\,\delta^{r\theta(1-\theta)}\left[(J^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0)\right]^{\theta}\left[(M^{(n)}f)(x)\right]^{1-\theta}. \qquad (1.14)$$

Так как $\delta\in(0,1]$, то неравенство (1.5) доказано.

В случае $r\theta > n+m/p'$ оценка (1.5) непосредственно следует из (1.10) и (1.11). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1.1. Аналогичное, но более простое рассуждение приводит к следующему обобщению неравенства Хедберга (1.4):

$$(I^{(n+m)}_{r\theta+m/p} f)(x,0) \leq c\left[(I^{(n+m)}_{r+m/p} f)(x,0)\right]^{\theta}\left[(M^{(n)}g)(x)\right]^{1-\theta}, \qquad (1.15)$$

где $g(\xi) = \|f(\xi,\cdot)\|_{L_p(R^m)}$, $0<\theta<1$ и $r<n+m/p'$.

1.3. Вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1.2. Пусть μ - мера в R^n и $p\in(1,\infty)$. Точная константа C в неравенстве

$$\int |u|^p d\mu \leq C\,\|u\|^p_{W^m_p}\,,\quad u\in C_0^\infty(R^n), \qquad (1.16)$$

эквивалентна величине

$$\sup_e \frac{\mu(e)}{cap(e, W_p^m)}, \tag{1.17}$$

где e - произвольный компакт положительной емкости $cap(e, W_p^m)$. То же верно после замены W на L.

Эта лемма доказана в [5] и ранее для L_p^ℓ, $\ell p<n$, в [3] $(m=1,2)$ и в [4] (m - любое целое число).

Л е м м а 1.3. Пусть $1<p<\infty$, $0<\lambda<\mu$ и $\varphi\in L_{p\mu,loc}$, $\varphi\geq 0$. Тогда

$$\sup_e \left(\frac{\int_e \varphi^{\lambda p} dx}{cap(e, W_p^\lambda)} \right)^{1/\lambda} \leq c \sup_e \left(\frac{\int_e \varphi^{\mu p} dx}{cap(e, W_p^\mu)} \right)^{1/\mu}. \tag{1.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u\in C_0^\infty(R^n)$ и $U\in C_0^\infty(R^{n+m})$ - продолжение функции u на R^{n+m}. Здесь $m=1,2,\dots$, если λ - дробное и $m=0$ для целого λ. Обозначим через f функцию $\Lambda^{\lambda+m/p}U$, где $\Lambda=(-\Delta+E)^{1/2}$, Δ - оператор Лапласа в R^{n+m}. Тогда

$$u(x)=(J^{(n+m)}_{\lambda+m/p} f)(x,0).$$

Воспользуемся леммой 1.1 при $r=\mu$, $\theta=\lambda/\mu$ и неравенством Гёльдера:

$$\int \varphi^{\lambda p}|u|^p dx \leq c\int \varphi(x)^{\lambda p}\left[(J^{(n+m)}_{\mu+m/p}|f|)(x,0)\right]^{\lambda p/\mu}\left[(M^{(n)}g)(x)\right]^{(\mu-\lambda)p/\mu} dx \leq$$

$$\leq c\left(\int \varphi(x)^{\mu p}\left[(J^{(n+m)}_{\mu+m/p}|f|)(x,0)\right]^p dx\right)^{\lambda/\mu}\left(\int\left[(M^{(n)}g)(x)\right]^p dx\right)^{(\mu-\lambda)/\mu}.$$

Используя непрерывность оператора $M^{(n)}$ в $L_p(R^n)$ и лемму 1.2, получаем

$$\int \varphi^{\lambda p}|u|^p dx \leq c\|f\|^{(\mu-\lambda)p/\mu}_{L_p(R^{n+m})} \sup_e \left(\frac{\int_e \varphi^{\mu p}dx}{cap(e, W_p^\mu)}\right)^{\lambda/\mu} \|(J^{(n+m)}_{\mu+m/p}|f|)(\cdot,0)\|^{\lambda p/\mu}_{W_p^\mu}.$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $(J^{(n+m)}_{\mu+m/p}|f|)(x,0)$ аппроксимируется в в W_p^μ последовательностью функций из $C_0^\infty(R^n)$.) Так как последняя норма мажорируется нормой

$$\|\Lambda^{\mu+m/p} J^{(n+m)}_{\mu+m/p}|f|\|_{L_p(R^{n+m})} = \|f\|_{L_p(R^{n+m})} = \|\Lambda^{\lambda+m/p}U\|_{L_p(R^{n+m})}$$

(см. [9 , 10, гл.5]), то

$$\int \varphi^{\lambda p} |u|^p dx \le c \sup_e \left(\frac{\int_e \varphi^{\mu p} dx}{cap(e, W_p^\mu)} \right)^{\lambda/\mu} \| \Lambda^{\lambda+m/p} U \|^p_{L_p(R^{n+m})} .$$

Минимизируя правую часть по всем продолжениям U функции u, получаем

$$\int \varphi^{\lambda p} |u|^p dx \le c \sup_e \left(\frac{\int_e \varphi^{\mu p} dx}{cap(e, W_p^\mu)} \right)^{\lambda/\mu} \| u \|^p_{W_p^\lambda}$$

(см. [9 , 10, гл. 5]). Остается воспользоваться леммой 1.2.

Л е м м а 1.4. <u>Пусть</u> γ_p - <u>усреднение функции</u> $\gamma \in W^\ell_{p,loc}(R^n)$, $1<p<\infty$, <u>с ядром</u> K <u>и радиусом</u> ρ.

<u>Справедливо неравенство</u>

$$\sup_e \frac{\| D_\ell \gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^\ell)]^{1/p}} \le c \sup_e \frac{\| D_\ell \gamma \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^\ell)]^{1/p}} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Минковского, получаем

$$(D_\ell \gamma_\rho)(x) = \left(\int \left| \rho^{-n} \int K(\xi/\rho) \left[\nabla_{[\ell]} \gamma(x+y-\xi) - \nabla_{[\ell]} \gamma(x-\xi) \right] d\xi \right|^p |y|^{-n-p\{\ell\}} dy \right)^{1/p} \le$$

$$\le \rho^{-n} \int K(\xi/\rho) \left(\int |\nabla_{[\ell]} \gamma(x+y-\xi) - \nabla_{[\ell]} \gamma(x-\xi)|^p |y|^{-n-p\{\ell\}} dy \right)^{1/p} d\xi = (D_\ell \gamma)_\rho(x).$$

Для любой функции $u \in C_0^\infty(R^n)$

$$\int |u (D_\ell \gamma)_\rho|^p dx \le \int |u(x)|^p \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) [(D_\ell \gamma)(x-\xi)]^p d\xi dx =$$

$$= \rho^{-n} \int K(\xi/\rho) \int |u(x)|^p [(D_\ell \gamma)(x-\xi)]^p dx d\xi .$$

Оценивая внутренний интеграл по лемме 1.2, заключаем, что

$$\int |u(D_e\gamma)_\rho|^p dx \le c \sup_\xi \sup_e \frac{\int_e |(D_e\gamma)(x-\xi)|^p dx}{cap(e, W_p^\ell)} \|u\|^p_{W_p^\ell} \rho^{-n} \int K(\xi/\rho) d\xi =$$

$$= c \sup_e \frac{\int_e |D_e\gamma|^p dx}{cap(e, W_p^\ell)} \|u\|^p_{W_p^\ell} .$$

Еще раз ссылаясь на лемму 1.2, заканчиваем доказательство.

Л е м м а 1.5. Справедливы неравенства

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell} \le \|\gamma\|_{MW_p^\ell} \le \varliminf_{\rho\to 0} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in C_0^\infty$. Ясно, что

$$\|\gamma_\rho u\|_{W_p^\ell} = \Big(\iint \Big| \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) \nabla_{[\ell],x} (Q(x+y,\xi) - Q(x,\xi)) d\xi \Big|^p \times$$

$$\times |y|^{-n-p\{\ell\}} dy dx \Big)^{1/p} + \Big(\int \Big| \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) Q(x,\xi) d\xi \Big|^p dx \Big)^{1/p},$$

где $Q(x,\xi) = \gamma(x-\xi) u(x)$. В силу неравенства Минковского

$$\|D_\ell(\gamma_\rho u)\|_{L_p} = \Big(\iint \Big| \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) \nabla_{[\ell],x} (Q(x+y,\xi) - Q(x,\xi)) d\xi \Big|^p \times$$

$$\times |y|^{-n-p\{\ell\}} dy dx \Big)^{1/p} \le \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) \|D_\ell Q(\cdot,\xi)\|_{L_p} d\xi .$$

Аналогичная оценка верна для нормы $\|\gamma_\rho u\|_{L_p}$. Поэтому

$$\|\gamma_\rho u\|_{W_p^\ell} \le \int \rho^{-n} K(\xi/\rho) \|Q(\cdot,\xi)\|_{W_p^\ell} d\xi .$$

Так как $\|Q(\cdot,\xi)\|_{W_p^\ell} \le \|\gamma\|_{MW_p^\ell} \|u\|_{W_p^\ell}$, то левое неравенство доказано.

Правое неравенство следует из соотношений

$$\|\gamma u\|_{W_p^\ell} = \lim_{\rho\to\infty} \|\gamma_\rho u\|_{W_p^\ell} \le \varliminf_{\rho\to 0} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell} \|u\|_{W_p^\ell} .$$

Лемма доказана.

Замечание 1.2. Не всякую функцию из MW_p^l можно аппроксимировать в этом пространстве последовательностью бесконечно дифференцируемых функций из MW_p^l. Действительно, предел в MW_p^l такой последовательности есть непрерывная функция, так как $\|\gamma\|_{L_\infty} \leq \|\gamma\|_{MW_p^l}$. Однако разрывная функция $\gamma(x)=|x|^{-1}x$ принадлежит пространству MW_p^1, $p<n$, поскольку

$$\int|\nabla(|x|^{-1}xu)|^p dx \leq c_1\int(|\nabla u|^p+|x|^{-p}|u|^p)dx \leq c_2\int|\nabla u|^p dx.$$

1.4. Описание пространства мультипликаторов в W_p^l при целом l.

Лемма 1.6. Пусть $\gamma\in MW_p^l$, $1<p<\infty$, k - целое число, $1\leq k\leq[l]$. Тогда $\gamma\in L_\infty(R^n)\cap W_{p,loc}^l(R^n)$ и справедливо неравенство

$$\sup_e \frac{\|D_k\gamma\|_{L_{pl/k}(e)}}{[cap(e,W_p^l)]^{k/pl}} \leq c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{k/l}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть $u\in C_0^\infty(R^n)$, $u\geq1$ на компакте $e\subset R^n$. При любом натуральном N имеем

$$\|\gamma^N u\|_{L_p}^{1/N} \leq \|\gamma^N u\|_{W_p^l}^{1/N} \leq \|\gamma\|_{MW_p^l}\|u\|_{W_p^l}^{1/N},$$

следовательно, $\|\gamma\|_{L_\infty}\leq\|\gamma\|_{MW_p^l}$. Принадлежность функции γ классу $W_{p,loc}^l(R^n)$ очевидна.

Воспользуемся неравенством Гальярдо-Ниренберга

$$\|\gamma u\|_{W_{pl/k}^k} \leq c\|\gamma u\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\gamma u\|_{W_p^l}^{k/l} \leq c\|\gamma u\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{k/l}\|u\|_{W_p^l}^{k/l}. \tag{1.20}$$

Пусть $m=0$, если l- целое и $m=1,2,\ldots$, если l- дробное число.

Обозначим через U произвольное продолжение функции u на R^{n+m}. Так как норма $\|u\|_{W_p^l}$ эквивалентна норме

$$\inf_U\|\Lambda^{l+m/p}U\|_{L_p(R^{n+m})}$$

(см. [9, 10]), то

$$cap(e, W_p^l) \sim \inf\left\{\|\Lambda^{l+m/p} U\|^p_{L_p(R^{n+m})} : U \in C_0^\infty(R^{n+m}), U \geq 1 \text{ на } e\right\}. \quad (1.21)$$

Как известно [11,12], последний инфимум достигается на функции положительной и ограниченной константой, зависящей только от l, m, n, p. Поэтому если в определение емкости $cap(e, W_p^l)$ ввести дополнительное требование $|u| \leq C$, то получится эквивалентная функция множества. Принимая это во внимание, из (1.20) получаем

$$\|D_\kappa \gamma\|_{L_{pl/\kappa}(e)} \leq c\|\gamma\|^{1-\kappa/l}_{L_\infty} \|\gamma\|^{\kappa/l}_{MW_p^l} [cap(e, W_p^l)]^{\kappa/pl}.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.7. Пусть $1<p<\infty$, l - целое положительное число, $\gamma \in L_\infty \cap W^l_{p,loc}$ и

$$\sup_e \frac{\|D_l \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^l)]^{1/p}} < \infty.$$

Тогда $\gamma \in MW_p^l$ и справедливо неравенство

$$\|\gamma\|_{MW_p^l} \leq c\left(\|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_e \frac{\|D_l \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^l)]^{1/p}}\right). \quad (1.22)$$

Доказательство. Пусть γ_ρ - усреднение функции γ с радиусом ρ. Так как $\gamma \in L_\infty(R^n)$, то $\gamma_\rho \in MW_p^l$. В силу формулы Лейбница и леммы 1.2,

$$\|D_l(\gamma_\rho u)\|_{L_p} \leq c\sum_{j=0}^{l} \|D_j \gamma_\rho D_{l-j} u\|_{L_p} \leq c\sum_{j=0}^{l} \sup_e \frac{\|D_j \gamma_\rho\|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^j)]^{1/p}} \|u\|_{W_p^l}.$$

Отсюда с помощью (1.18) и (1.19) следует оценка

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^l} \leq c\left(\|\gamma_\rho\|_{L_\infty} + \sup_e \frac{\|D_l \gamma_\rho\|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^l)]^{1/p}} + \sum_{j=1}^{l-1} \|\gamma_\rho\|^{1-j/l}_{L_\infty} \|\gamma_\rho\|^{j/l}_{MW_p^l}\right),$$

что и доказывает (1.22) для функции γ_ρ. Применяя леммы 1.4 и 1.5, заканчиваем доказательство.

Из лемм 1.6 и 1.7 непосредственно получаем

Следствие 1.1. Пусть $1<p<\infty$, l - произвольное положительное число, κ - целое число, $0<\kappa<l$ и $\gamma \in MW_p^l$. Тогда $\gamma \in MW_p^\kappa$ и

$$\|\gamma\|_{MW_p^k} \le c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{k/l}. \tag{1.23}$$

1.5. Описание пространства мультипликаторов в W_p^l при любом $l>0$.

Лемма 1.8. Функция γ принадлежит пространству MW_p^l, $1<p<\infty$, $0<l<1$, в том и только том случае, если $\gamma \in L_\infty \cap W_{p,loc}^l$ и для любого компакта e

$$\|D_l\gamma\|_{L_p(e)}^p \le const\ cap(e, W_p^l).$$

Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_p^l} \sim \|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_e \frac{\|D_l\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^l)]^{1/p}}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|D_l(\gamma u) - uD_l\gamma\|_{L_p} \le \|\gamma\|_{L_\infty}\|u\|_{W_p^l}. \tag{1.24}$$

Отсюда и из леммы 1.2 получаем неравенство

$$\|D_l(\gamma u)\|_{L_p} \le c\left(\|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_e \frac{\|D_l\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^l)]^{1/p}}\right)\|u\|_{W_p^l},$$

которое дает требуемую оценку нормы в MW_p^l сверху.

Как отмечено в доказательстве леммы 1.6, справедливо неравенство $\|\gamma\|_{L_\infty} \le \|\gamma\|_{MW_p^l}$. Отсюда и из (1.24) получаем

$$\|uD_l\gamma\|_{L_p} \le \left(\|\gamma\|_{MW_p^l} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right)\|u\|_{W_p^l} \le 2\|\gamma\|_{MW_p^l}\|u\|_{W_p^l}.$$

Остается сослаться на лемму 1.2.

Лемма 1.9. Пусть $\gamma \in MW_p^l$, $1<p<\infty$, l - произвольное положительное число, а k - дробное число из промежутка $(0,l]$. Тогда $\gamma \in L_\infty \cap W_{p,loc}^l$, справедливо неравенство (1.23), а также неравенство

$$\sup_e \frac{\|D_k\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^k)]^{1/p}} \le c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-k/l}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{k/l}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Принадлежность функции γ классу $W^{\ell}_{p,loc}$ очевидна, а оценка $\|\gamma\|_{L_\infty} \le \|\gamma\|_{MW^{\ell}_p}$ установлена в доказательстве леммы 1.6. Так как пространство W^{κ}_p (при дробном κ) является промежуточным между L_p и W^{ℓ}_p, то

$$\|\gamma\|_{MW^{\kappa}_p} \le c\,\|\gamma\|^{1-\kappa/\ell}_{ML_p}\,\|\gamma\|^{\kappa/\ell}_{MW^{\ell}_p}. \tag{1.26}$$

Ясно, что (1.26) и (1.23) равносильны.

Из (1.23) и леммы 1.8 следует (1.25) при $0<\ell<1$.

Рассмотрим случай произвольного $\ell>0$.

Допустим, что неравенство (1.25) верно при всех дробных $\ell<N$, где N - целое число. Пусть $N<\ell<N+1$. Имеем

$$\|uD_\ell\gamma\|_{L_p} \le c\left(\|\gamma u\|_{W^{\ell}_p} + \sum_{j=0}^{N}\||\nabla_j\gamma|D_{\ell-j}u\|_{L_p} + \sum_{j=1}^{N}\||\nabla_j u|D_{\ell-j}\gamma\|_{L_p}\right). \tag{1.27}$$

Пусть $\Psi=\Lambda^{j}u$, где $\Lambda=(-\Delta+E)^{1/2}$. Тогда

$$(D_{\ell-j}u)(x) = (D_{\ell-j}J^{(n)}_j\Psi)(x) = (D_{\{\ell\}}J^{(n)}_j\nabla_{N-j}\Psi)(x) =$$

$$= \left(\int\left|\int\left[g_j(x+h-\xi)-g_j(x-\xi)\right]\nabla_{N-j}\Psi(\xi)d\xi\right|^p|h|^{-n-p\{\ell\}}dh\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\left|\int g_j(x-\xi)\left(\nabla_{N-j}\Psi(\xi+h)-\nabla_{N-j}\Psi(\xi)\right)d\xi\right|^p|h|^{-n-p\{\ell\}}dh\right)^{1/p}.$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$(D_{\ell-j}u)(x) \le (J^{(n)}_j D_{\ell-j}\Lambda^{j}u)(x).$$

Отсюда и из леммы 1.2 следует оценка

$$\||\nabla_j\gamma|D_{\ell-j}u\|_{L_p} \le c\sup_e \frac{\|\nabla_j\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e,W^{j}_p)]^{1/p}}\|D_{\ell-j}\Lambda^{j}u\|_{L_p}.$$

Как известно [9,10],

$$\|D_{\ell-j}\Lambda^{j}u\|_{L_p} \le c\|u\|_{W^{\ell}_p},$$

что вместе с леммами 1.3 и 1.6 дает

$$\||\nabla_j\gamma|D_{\ell-j}u\|_{L_p} \le c\|\gamma\|^{1-j/\ell}_{L_\infty}\|\gamma\|^{j/\ell}_{MW^{\ell}_p}\|u\|_{W^{\ell}_p}. \tag{1.28}$$

Еще раз применяя лемму 1.2, получаем

$$\| |\nabla_j u| D_{\ell-j}\gamma \|_{L_p} \le c \sup_e \frac{\| D_{\ell-j}\gamma \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^{\ell-j})]^{1/p}} \| u \|_{W_p^\ell} . \tag{1.29}$$

Отсюда и из (1.27) , (1.28) следует

$$\| u D_\ell \gamma \|_{L_p} \le c \left(\|\gamma\|_{MW_p^\ell} + \sum_{j=0}^{N} \|\gamma\|_{L_\infty}^{1-j/\ell} \|\gamma\|_{MW_p^\ell}^{j/\ell} + \sum_{j=1}^{N} \sup_e \frac{\| D_{\ell-j}\gamma \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^{\ell-j})]^{1/p}} \right) \| u \|_{W_p^\ell} .$$

Индукционное предположение позволяет опустить вторую сумму справа. Вспоминая неравенство $\|\gamma\|_{L_\infty} \le \|\gamma\|_{MW_p^\ell}$, приходим к оценке

$$\sup_e \frac{\| D_\ell \gamma \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^\ell)]^{1/p}} \le c \|\gamma\|_{MW_p^\ell} . \tag{1.30}$$

Для целых ℓ эта оценка очевидна.

Применяя (1.30) и (1.23) , получаем окончательно

$$\sup_e \frac{\| D_k \gamma \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^k)]^{1/p}} \le c \|\gamma\|_{MW_p^k} \le c \|\gamma\|_{L_\infty}^{1-k/\ell} \|\gamma\|_{MW_p^\ell}^{k/\ell} .$$

Лемма доказана.

Лемма 1.10. <u>Утверждение леммы 1.7 остается верным и для дробного</u> $\ell > 0$.

Доказательство . Пусть $u \in C_0^\infty(R^n)$. Имеем

$$\| D_\ell (\gamma_\rho u) \|_{L_p} \le c \left(\sum_{j=0}^{[\ell]} \| |\nabla_j u| D_{\ell-j}\gamma_\rho \|_{L_p} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \| |\nabla_j \gamma_\rho| D_{\ell-j} u \|_{L_p} \right).$$

Отсюда из оценок (1.28), (1.29) выводим

$$\| \gamma_\rho u \|_{W_p^\ell} \le c \left(\sum_{j=0}^{[\ell]} \sup_e \frac{\| D_{\ell-j}\gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^{\ell-j})]^{1/p}} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{1-j/\ell} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell}^{j/\ell} \right) \| u \|_{W_p^\ell} .$$

Применяя к слагаемым первой суммы неравенство (1.25) , получаем оценку

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell} \le c \left(\sup_e \frac{\| D_\ell \gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[cap(e, W_p^\ell)]^{1/p}} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{1-j/\ell} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\ell}^{j/\ell} \right),$$

что равносильно неравенству (1.22) для γ_ρ . Ссылка на леммы 1.4, 1.5 заканчивает доказательство.

Объединяя утверждения лемм 1.6, 1.7, 1.9, 1.10, приходим к основному результату.

Теорема 1.1. 1) Функция γ принадлежит пространству MW_p^ℓ, $1<p<\infty$, в том и только том случае, если $\gamma \in L_\infty \cap W^\ell_{p,loc}$ и для любого компакта $e \subset R^n$ положительной n-мерной меры

$$\|D_\ell \gamma\|^p_{L_p(e)} \leq const\, cap\,(e, W_p^\ell).$$

2) Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \sim \sup_e \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap\,(e, W_p^\ell)]^{1/p}} + \|\gamma\|_{L_\infty}.$$

3) Если $\gamma \in MW_p^\ell$ и $k \in (0,\ell)$, то $\gamma \in MW_p^k$ и справедливо неравенство (1.23).

1.6. Эквивалентные формулировки.

Лемма 1.11. Пусть замкнутые кубы Q_j образуют координатную решетку с шагом $n^{-1/2}$, а $2Q_j$ - концентрические и подобно расположенные открытые кубы с вдвое большей длиной ребра. Для любого компакта $e \subset R^n$ выполнено соотношение

$$cap\,(e, W_p^\ell) \sim \sum_j cap\,(e \cap Q_j, W_p^\ell).$$

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(R^n)$, $u=1$ в окрестности компакта e и $\eta_j \in C_0^\infty(2Q_j)$, $\eta_j = 1$, в окрестности куба Q_j. Из определения емкости следует, что

$$\sum_j cap\,(e \cap Q_j, W_p^\ell) \leq c \sum_j \|\eta_j u\|^p_{W_p^\ell}.$$

Непосредственно проверяется, что последняя сумма мажорируется величиной $c\|u\|^p_{W_p^\ell}$ (ср. [1, с.1041]), минимизируя которую по u, получаем нижнюю оценку для $cap\,(e, W_p^\ell)$. Требуемая оценка сверху непосредственно следует из отношения (1.21) и полуаддитивности емкости, стоящей в правой части этого соотношения (см. [11, 12]).

Следствие 1.2. Имеет место соотношение

$$\sup_e \frac{\mu(e)}{cap\,(e, W_p^\ell)} \sim \sup_{\{e:\, d(e)\leq 1\}} \frac{\mu(e)}{cap\,(e, W_p^\ell)}, \tag{1.31}$$

где $d(e)$ - диаметр e.

Доказательство. Пусть правая часть (1.31) конечна. Тогда если $cap\,(e \cap Q_j, W_p^\ell) = 0$, то $\mu(e \cap Q_j) = 0$, каков бы ни был компакт $e \subset R^n$.

Пусть $cap(e,W_p^\ell)>0$. По лемме 1.11, левая часть (1.31) не превосходит

$$c\sup_e \frac{\sum_j \mu(e\cap Q_j)}{\sum_j cap(e\cap Q_j, W_p^\ell)},$$

где суммирование распространено на те j, для которых $cap(e\cap Q_j, W_p^\ell)>0$. Поэтому

$$\frac{\mu(e)}{cap(e,W_p^\ell)} \leq c\sup_j \frac{\mu(e\cap Q_j)}{cap(e\cap Q_j, W_p^\ell)},$$

и, следовательно, левая часть (1.31) мажорируется правой. Обратная оценка очевидна.

Из теоремы 1.1 и (1.31) непосредственно получаем

Следствие 1.3. Справедливо соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \sim \sup_{\{e:d(e)\leq 1\}} \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^\ell)]^{1/p}} + \|\gamma\|_{L_\infty}, \quad 1<p<\infty.$$

Покажем еще, что при $\ell p>n$ можно дать описание пространства мультипликаторов MW_p^ℓ, не использующее понятия емкости. Такое описание получится здесь как следствие теоремы 1.1. Близкий результат для мультипликаторов в пространстве бесселевых потенциалов ранее прямым методом был установлен Стричартцом [1].

Следствие 1.4. Если $\ell p>n$, $1<p<\infty$, то

$$\sup_e \frac{\mu(e)}{cap(e,W_p^\ell)} \sim \sup_{x\in R^n} \mu(\mathcal{B}_1(x)).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sup_e \frac{\mu(e)}{cap(e,W_p^\ell)} \geq \sup_x \frac{\mu(\mathcal{B}_1(x))}{cap(\mathcal{B}_1(x),W_p^\ell)} = c\sup_x \mu(\mathcal{B}_1(x)).$$

Обратное неравенство следует из (1.31) и оценки $cap(e,W_p^\ell)\geq c$, которая получается для любого непустого компакта e как следствие вложения $W_p^\ell(R^n)$ в $L_\infty(R^n)$.

Отсюда и из теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.5. Функция γ принадлежит пространству MW_p^ℓ, $\ell p>n$, $1<p<\infty$ в том и только том случае, если $\gamma\in L_\infty\cap W_{p,loc}^\ell(R^n)$ и $\|D_\ell\gamma\|_{L_p(\mathcal{B}_1(x))}<const$ для всех $x\in R^n$.

Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \sim \sup_{x\in R^n} \|D_\ell \gamma\|_{L_p(\mathcal{B}_1(x))} + \|\gamma\|_{L_\infty} .$$

1.7. Мультипликаторы в пространстве L_p^ℓ.

Теорема 1.2. 1) Функция γ принадлежит пространству ML_p^ℓ, $\ell p<n$, $1<p<\infty$, в том и только том случае, если $\gamma\in L_\infty \cap W_{p,loc}^\ell$ и

$$\sup_e \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e, L_p^\ell)]^{1/p}} < \infty . \tag{1.32}$$

2) Справедливо соотношение

$$\|\gamma\|_{ML_p^\ell} \sim \sup_e \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e, L_p^\ell)]^{1/p}} + \|\gamma\|_{L_\infty} . \tag{1.33}$$

3) Если $\gamma\in ML_p^\ell$ и $k\in(0,\ell)$, то $\gamma\in ML_p^k$ и справедливо неравенство

$$\|\gamma\|_{ML_p^k} \leq c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-k/\ell} \|\gamma\|_{ML_p^\ell}^{k/\ell} .$$

Доказательство. Пусть $\gamma\in ML_p^\ell$. Принадлежность γ классу $W_{p,loc}^\ell$ очевидна. Так как

$$\|\gamma^N u\|_{L_{pn/(n-\ell p)}}^{1/N} \leq \left(c\|\gamma^N u\|_{L_p^\ell}\right)^{1/N} \leq \|\gamma\|_{ML_p^\ell} \left(c\|u\|_{L_p^\ell}\right)^{1/N},$$

то $\|\gamma\|_{L_\infty} \leq \|\gamma\|_{ML_p^\ell}$.

Оценка сверху величины (1.32) нормой в ML_p^ℓ проводится так же, как аналогичная оценка в случае пространства W_p^ℓ. Следует лишь в леммах 1.2 - 1.6 и 1.9 заменить W_p^ℓ на L_p^ℓ, в доказательствах лемм 1.3 и 1.9 применять потенциалы Рисса вместо потенциалов Бесселя, ссылаясь при этом на замечание 1.1 вместо леммы 1.1, под оператором Λ понимать квадратный корень из $-\Delta$.

Получим нижнюю оценку для величины (1.32). Применяя лемму 1.10 к функции $\gamma^{(\varepsilon)}(y)=\gamma(y/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, получаем для любой функции $u\in C_0^\infty(R^n)$ оценку

$$\|\gamma^{(\varepsilon)}u^{(\varepsilon)}\|_{L_p^\ell}\le c\left(\|\gamma^{(\varepsilon)}\|_{L_\infty}+\sup_e\frac{\|D_\ell\gamma^{(\varepsilon)}\|_{L_p(e_\varepsilon)}}{[cap(e_\varepsilon,W_p^\ell)]^{1/p}}\right)\left(\|u^{(\varepsilon)}\|_{L_p^\ell}+\|u^{(\varepsilon)}\|_{L_p}\right),$$

где $e_\varepsilon=\{y:y/\varepsilon\in e\}$. Эта оценка равносильна следующей:

$$\|\gamma u\|_{L_p^\ell}\le c\left(\|\gamma\|_{L_\infty}+\sup_e\frac{\|D_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{\varepsilon^{\ell-n/p}[cap(e_\varepsilon,W_p^\ell)]^{1/p}}\right)\left(\|u\|_{L_p^\ell}+\varepsilon^\ell\|u\|_{L_p}\right).$$

Остается заметить, что $cap(e_\varepsilon,W_p^\ell)\ge cap(e_\varepsilon,L_p^\ell)=\varepsilon^{n-\ell p}cap(e,L_p^\ell)$ и перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. Теорема доказана.

1.8. Мультипликаторы в $W_1^\ell(R^n)$ и $L_1^\ell(R^n)$.

В случае $p=1$ можно дать описание мультипликаторов, не использующее понятие емкости. Соответствующие теоремы основаны на следующем вспомогательном утверждении, доказанном В.Г. Мазья в работе " О суммируемости по произвольной мере функций из пространств С.Л. Соболева-Л.Н. Слободецкого " (Зап. научн. семинаров ЛОМИ, АН СССР, 1979.)

Лемма 1.12. Точные константы в неравенствах

$$\int|u|d\mu\le C_1\|u\|_{W_1^\ell},$$

$$\int|u|d\mu\le C_2\|u\|_{L_1^\ell},$$

где $u\in C_0^\infty(R^n)$ и μ - мера, эквивалентны соответственно величинам

$$K_1=\sup_{x\in R^n,\rho\in(0,1)}\rho^{\ell-n}\mu(\mathcal{B}_\rho(x)),$$

$$K_2=\sup_{x\in R^n,\rho>0}\rho^{\ell-n}\mu(\mathcal{B}_\rho(x)).$$

Теорема 1.3. 1) Функция γ принадлежит пространству MW_1^ℓ в том и только том случае, если $\gamma\in L_\infty\cap W_{1,loc}^\ell$ и для любого шара $\mathcal{B}_\rho(x)$, $\rho\in(0,1)$,

$$\|D_\ell\gamma\|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))}\le const\ \rho^{n-\ell}.$$

2) Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MW_1^\ell}\backsim\|\gamma\|_{L_\infty}+\sup_{x\in R^n,\rho\in(0,1)}\rho^{\ell-n}\|D_\ell\gamma\|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))}. \qquad (1.34)$$

3) Справедлива оценка

$$|\gamma|_{MW_1^{\sigma}} \le c\,|\gamma|_{L_\infty}^{(\ell-\sigma)/\ell}\,|\gamma|_{MW_1^{\ell}}^{\sigma/\ell}, \quad \sigma\in(0,\ell). \tag{1.35}$$

В доказательстве этой теоремы будет использована следующая

Лемма 1.13. Для любого $\sigma\in(0,\ell)$

$$\sup_{x\in R^n,\,\rho\in(0,1)} \rho^{\sigma-n}\,|D_\sigma \gamma|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))} \le c\,|\gamma|_{L_\infty}^{(\ell-\sigma)/\ell}\Bigl(|\gamma|_{L_\infty} +$$

$$+\sup_{x\in R^n,\,\rho\in(0,1)} \rho^{\ell-n}\,|D_\ell \gamma|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))}\Bigr)^{\sigma/\ell}. \tag{1.36}$$

Доказательство. Пусть $\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B}_2(0))$, $\eta=1$ на $\mathcal{B}_1(0)$ и $\eta_\rho(y)=$ $=\eta((y-x)/\rho)$. Допустим сначала, что σ - дробное число. В дальнейшем γ_ε - усреднение функции γ с радиусом ε. Ясно, что

$$\int_{\mathcal{B}_\rho(0)} |h|^{-n-\{\sigma\}}dh \int_{\mathcal{B}_\rho(x)} |\nabla_{[\sigma]}(\gamma_\varepsilon(y+h)-\gamma_\varepsilon(y))|\,dy \le |D_\sigma(\gamma_\varepsilon \eta_{2\rho}^2)|_{L_1}. \tag{1.37}$$

Воспользуемся известным неравенством

$$|f|_{W_1^\sigma} \le c\,|f|_{L_1}^{(\ell-\sigma)/\ell}\,|f|_{W_1^\ell}^{\sigma/\ell}, \quad \ell>\sigma>0.$$

Тогда

$$|D_\sigma(\gamma_\varepsilon\eta_{2\rho}^2)|_{L_1} \le c\,|\gamma_\varepsilon|_{L_\infty}^{(\ell-\sigma)/\ell}\,\rho^{n(\ell-\sigma)/\ell}\,|\gamma_\varepsilon\eta_{2\rho}^2|_{W_1^\ell}^{\sigma/\ell}. \tag{1.38}$$

Далее,

$$|\gamma_\varepsilon\eta_{2\rho}^2|_{W_1^\ell} \le c\left(\sum_{j=0}^{[\ell]} \||\nabla_j(\gamma_\varepsilon\eta_{2\rho})| D_{\ell-j}\eta_{2\rho}|_{L_1} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \||\nabla_j \eta_{2\rho}| D_{\ell-j}(\gamma_\varepsilon\eta_{2\rho})|_{L_1}\right) \le$$

$$\le c\left(\sum_{j=0}^{[\ell]} \rho^{j-\ell}\,|\nabla_j\gamma_\varepsilon|_{L_1(\mathcal{B}_{4\rho}(x))} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \rho^{-j}\,|D_{\ell-j}\gamma_\varepsilon|_{L_1(\mathcal{B}_{4\rho}(x))}\right). \tag{1.39}$$

Положим

$$A_\sigma = \sup_{x\in R^n,\,\rho\in(0,1)} \rho^{\sigma-n}\,|D_\sigma\gamma_\varepsilon|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))}, \quad A_0 = |\gamma_\varepsilon|_{L_\infty}. \tag{1.40}$$

Очевидно,

$$\int\limits_{R^n\setminus\mathcal{B}_\rho(0)} |h|^{-n-\{\sigma\}} dh \int\limits_{\mathcal{B}_\rho(x)} |\nabla_{[\sigma]} (\gamma_\varepsilon(y+h) - \gamma_\varepsilon(y))| dy \leq c\rho^{n-\sigma} A_{[\sigma]} .$$

Отсюда и из (1.37) , (1.39) получаем

$$A_\sigma \leq c \Big[A_{[\sigma]} + A_0^{(\ell-\sigma)/\ell} \Big(\sum_{j=0}^{[\ell]} \rho^{j-n} \| \nabla_j \gamma_\varepsilon \|_{L_1(\mathcal{B}_{4\rho}(x))} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{[\ell]} \rho^{\ell-j-n} \| D_{\ell-j} \gamma_\varepsilon \|_{L_1(\mathcal{B}_{4\rho}(x))} \Big)^{\sigma/\ell} \Big] \leq$$

$$\leq c \Big[A_{[\sigma]} + A_0^{(\ell-\sigma)/\ell} \Big(\sum_{j=0}^{[\ell]} (A_j + A_{\ell-j}) \Big)^{\sigma/\ell} \Big] . \qquad (1.41)$$

Если σ - целое число, то оценки (1.38) , (1.39) остаются верными и поэтому

$$A_\sigma \leq c A_0^{(\ell-\sigma)/\ell} \sum_{j=0}^{[\ell]} (A_j + A_{\ell-j})^{\sigma/\ell} . \qquad (1.42)$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$A_{[\sigma]} \leq c A_0^{(\ell-[\sigma])/\ell} \Big(\sum_{j=0}^{[\ell]} (A_j + A_{\ell-j}) \Big)^{[\sigma]/\ell} \leq c A_0^{(\ell-\sigma)/\ell} \Big(\sum_{j=0}^{[\ell]} (A_j + A_{\ell-j}) \Big)^{\sigma/\ell} ,$$

которая вместе с (1.41) показывает, что оценка (1.42) верна как для дробных, так и для целых $\sigma < \ell$. В силу (1.42)

$$A_\sigma \leq c(\delta) A_0 + \delta \sum_{j=1}^{[\ell]} (A_j + A_{\ell-j}) \qquad \forall \delta \in (0,1) .$$

Используя произвольность σ и δ , получаем отсюда, что $A_j + A_{\ell-j} \leq c(A_0 + A_\ell)$. Подставляя это неравенство (1.42) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, заканчиваем доказательство леммы.

Замечание 1.3. Из доказательства леммы следует, что справедлива оценка (1.36) , в которой требование $\rho \in (0,1)$ заменено на $\rho \in (0,\infty)$.

Доказательство теоремы 1.3. Достаточность. Имеем

$$|D_\ell(\gamma u)|_{L_1} \le c\left(\sum_{j=0}^{[\ell]} \| |\nabla_j u| D_{\ell-j}\gamma|_{L_1} + \sum_{j=0}^{[\ell]} \| |\nabla_j \gamma| D_{\ell-j} u|_{L_1}\right). \tag{1.43}$$

Обозначим через A_σ, $\sigma > 0$, левую часть неравенства (1.36) и положим $A_0 = |\gamma|_{L_\infty}$. В силу леммы 1.12

$$\| |\nabla_j u| D_{\ell-j}\gamma|_{L_1} \le c A_{\ell-j} |u|_{W_1^\ell}. \tag{1.44}$$

Рассуждая дословно так же, как в начале третьей части доказательства леммы 1.9, получаем, что

$$(D_{\ell-j} u)(x) \le \left(J_j^{(n)} D_{\ell-j} \Lambda^j u\right)(x).$$

Отсюда и из леммы 1.12 следует оценка

$$\| |\nabla_j \gamma| D_{\ell-j} u|_{L_1} \le c A_j |D_{\ell-j} \Lambda^j u|_{L_1}. \tag{1.45}$$

Как известно [9,10],

$$|D_{\ell-j} \Lambda^j u|_{L_1} \le c |u|_{W_1^\ell}.$$

Теперь из (1.43), (1.44) и (1.45) вытекает

$$|D_\ell(\gamma u)|_{L_1} \le c \sum_{j=0}^{[\ell]} (A_{\ell-j} + A_j) |u|_{W_1^\ell}.$$

Применяя лемму 1.13, заканчиваем доказательство достаточности.

Необходимость. Принадлежность функции γ классу $L_\infty(R^n) \cap W_{1,loc}^{[\ell]}(R^n)$ и оценка $|\gamma|_{L_\infty} \le |\gamma|_{MW_1^\ell}$ установлены в лемме 1.6.

Пусть $0 < \ell \le 1$. Тогда

$$|\eta_\rho D_\ell \gamma|_{L_1} \le |D_\ell(\gamma \eta_\rho)|_{L_1} + |\gamma|_{L_\infty} |D_\ell \eta_\rho|_{L_1},$$

где η_ρ - функция, определенная в доказательстве леммы 1.13. Отсюда

$$|D_\ell \gamma|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))} \le 2|\gamma|_{MW_1^\ell} |\eta_\rho|_{W_1^\ell} \le c\rho^{n-\ell} |\gamma|_{MW_1^\ell},$$

и требуемая оценка снизу для нормы в MW_1^ℓ получена. Неравенство (1.35) получается из соотношения (1.34) и леммы 1.13.

Допустим, что теорема доказана для всех $\ell \le N$. Пусть $N < \ell \le N+1$. Имеем

$$|u D_\ell \gamma|_{L_1} \le c\left(|\gamma u|_{W_1^\ell} + \sum_{j=0}^{N} \| |\nabla_j \gamma| D_{\ell-j} u|_{L_1} + \sum_{j=0}^{N} \| |\nabla_j u| D_{\ell-j}\gamma|_{L_1}\right).$$

Повторяя соответствующее рассуждение из доказательства достаточности, отсюда получаем

$$\| u D_\ell \gamma \|_{L_1} \le c\left(\|\gamma\|_{MW_1^\ell} + \sum_{j=0}^{N} A_j + \sum_{j=1}^{N} A_{\ell-j} \right) \| u \|_{W_1^\ell} .$$

Полагая здесь $u = \eta_\rho$ и применяя индукционное предположение, получаем неравенство

$$A_\ell \le c\left(\|\gamma\|_{MW_1^\ell} + \sum_{j=0}^{N} \|\gamma\|_{L_\infty}^{(\ell-j)/\ell} \|\gamma\|_{MW_1^\ell}^{j/\ell} + \sum_{j=1}^{N} \|\gamma\|_{L_\infty}^{j/\ell} \|\gamma\|_{MW_1^\ell}^{(\ell-j)/\ell} \right).$$

Верхняя оценка для A_ℓ и с ней соотношение (1.34) доказаны. Из (1.34) и леммы 1.13 получаем неравенство (1.35) . Теорема доказана.

Теорема 1.4. 1) Функция γ принадлежит пространству ML_1^ℓ в том и только том случае, если $\gamma \in L_\infty \cap W_{1,loc}^\ell$ и для любого шара $\mathcal{B}_\rho(x)$

$$\| D_\ell \gamma \|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))} \le const\, \rho^{\ell-n} .$$

2) Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{ML_1^\ell} \sim \|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_{x\in R^n,\, \rho>0} \rho^{\ell-n} \| D_\ell \gamma \|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))} .$$

3) Справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{ML_1^\ell} \le c \|\gamma\|_{L_\infty}^{(\ell-\sigma)/\ell} \|\gamma\|_{ML_1^\ell}^{\sigma/\ell} , \qquad \sigma\in(0,\ell).$$

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 1.3. При этом следует заменить W_1^ℓ на L_1^ℓ , использовать потенциалы Рисса вместо потенциалов Бесселя, замечание 1.3 вместо леммы 1.13 и под оператором Λ понимать корень квадратный из $-\Delta$.

Замечание 1.4. В случае $\ell \ge n$ формулировка теоремы 1.3 упрощается, так как

$$\sup_{x\in R^n,\, \rho\in(0,1)} \rho^{\ell-n} \| D_\ell \gamma \|_{L_1(\mathcal{B}_\rho(x))} = \sup_x \| D_\ell \gamma \|_{L_1(\mathcal{B}_1(x))} .$$

Если $\ell = n$, то, по теореме 1.4,

$$\|\gamma\|_{ML_1^\ell} \sim \|\gamma\|_{L_\infty} + \| D_\ell \gamma \|_{L_1} .$$

В силу той же теоремы при $\ell > n$ единственным мультипликатором является константа.

1.9. Некоторые свойства мультипликаторов.

Лемма 1.14. Пусть $\gamma \in MW_p^l$, $p\in[1,\infty)$ и α - любой мультииндекс порядка, не превосходящего l. Тогда оператор умножения на функцию $D^\alpha\gamma$ непрерывен как оператор из W_p^l в $W_p^{l-|\alpha|}$ и для всех $u\in C_0^\infty$

$$\|uD^\alpha\gamma\|_{W_p^{l-|\alpha|}} \leq c\|\gamma\|_{MW_p^l}\|u\|_{W_p^l}.$$

Верно аналогичное утверждение, в котором W заменено на L.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай шкалы W_p^l. Пусть $u\in C_0^\infty(R^n)$.

Если $[l]=0$, то $\alpha=0$ и утверждение очевидно. Допустим, что предложение доказано при условии, что $[l]=1,2,\ldots,N-1$. Пусть $[l]=N$. Имеем

$$\|uD^\alpha\gamma\|_{W_p^{l-|\alpha|}} \leq \|D^\alpha(u\gamma)\|_{W_p^{l-|\alpha|}} + c\sum_{0<\beta\leq|\alpha|}\|D^\beta u D^{\alpha-\beta}\gamma\|_{W_p^{l-|\alpha|}}.$$

Ясно, что

$$\|D^\alpha(u\gamma)\|_{W_p^{l-|\alpha|}} \leq \|u\gamma\|_{W_p^l} \leq \|\gamma\|_{MW_p^l}\|u\|_{W_p^l}.$$

Так как $\gamma\in MW_p^l$, то, по теореме 1.1, $\gamma\in MW_p^{l-|\beta|}$ и, по индукционному предположению, оператор умножения на $D^{\alpha-\beta}\gamma$ непрерывен как оператор из $W_p^{l-|\beta|}$ в $W_p^{l-|\alpha|}$. Следовательно,

$$\|D^\beta u D^{\alpha-\beta}\gamma\|_{W_p^{l-|\alpha|}} \leq c\|\gamma\|_{MW_p^{l-|\beta|}}\|D^\beta u\|_{W_p^{l-|\beta|}} \leq c\|\gamma\|_{MW_p^l}\|u\|_{W_p^l}.$$

Доказательство закончено.

Теорема 1.5. Если $\gamma\in MW_p^l$, $p\in[1,\infty)$ и $\|\gamma^{-1}\|_{L_\infty}<\infty$, то $\gamma^{-1}\in MW_p^l$. Справедливы оценки

$$\|\gamma^{-1}\|_{MW_p^l} \leq c\|\gamma^{-1}\|_{L_\infty}^{2^{[l]+1}}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{2^{[l]+1}-1},$$

если $\{l\}>0$, и

$$\|\gamma^{-1}\|_{MW_p^l} \leq c\|\gamma^{-1}\|_{L_\infty}^{2^l}\|\gamma\|_{MW_p^l}^{2^l-1},$$

если $\{l\}=0$.

Здесь можно заменить W на L.

Доказательство. Для $l=0$ утверждение очевидно. Пусть $0<l<1$. Ясно, что

$$\|\gamma^{-1}u\|_{W_p^\ell} \le c\,\|\gamma^{-1}\|^2_{L_\infty}\left(\|\gamma D_\ell u\|_{L_p} + \|uD_\ell\gamma\|_{L_p}\right) + \|\gamma^{-1}u\|_{L_p}.$$

В силу леммы 1.2 и теоремы 1.1

$$\|uD_\ell\gamma\|_{L_p} \le c\sup_e \frac{\|D_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^\ell)]^{1/p}}\|u\|_{W_p^\ell} \le c\|\gamma\|_{MW_p^\ell}\|u\|_{W_p^\ell}.$$

Поэтому

$$\|\gamma^{-1}u\|_{W_p^\ell} \le c\,\|\gamma^{-1}\|^2_{L_\infty}\|\gamma\|_{MW_p^\ell}\|u\|_{W_p^\ell}.$$

Допустим, что предложение доказано для всех ℓ таких, что $[\ell] = 1, 2, \dots, N-1$. Пусть $[\ell] = N$. Имеем

$$\|\gamma^{-1}u\|_{W_p^\ell} = \|\nabla(\gamma^{-1}u)\|_{W_p^{\ell-1}} + \|\gamma^{-1}u\|_{L_p} \le$$

$$\le \|\gamma^{-2}u\nabla\gamma\|_{W_p^{\ell-1}} + \|\gamma^{-1}\nabla u\|_{W_p^{\ell-1}} + \|\gamma^{-1}u\|_{L_p}.$$

Используя лемму 1.14, получаем

$$\|\gamma^{-2}u\nabla\gamma\|_{W_p^{\ell-1}} \le \|\gamma^{-1}\|^2_{MW_p^{\ell-1}}\|u\nabla\gamma\|_{W_p^{\ell-1}} \le$$

$$\le c\|\gamma^{-1}\|^2_{MW_p^{\ell-1}}\|\gamma\|_{MW_p^\ell}\;\|u\|_{W_p^\ell}.$$

Поэтому

$$\|\gamma^{-1}u\|_{W_p^\ell} \le c\,\|\gamma^{-1}\|^2_{MW_p^{\ell-1}}\|\gamma\|_{MW_p^\ell}\|u\|_{W_p^\ell}.$$

(Здесь мы воспользовались очевидным неравенством $\|\gamma^{-1}\|_{MW_p^{\ell-1}}\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \ge 1$.)

Применяя индукционное предположение, заканчиваем доказательство для шкалы W_p^ℓ. При переходе к L_p^ℓ доказательство не меняется, следует лишь вместо теоремы 1.1 использовать теорему 1.2.

Следствие 1.6. Пусть $\ell p < n$. Тогда

$$\sup_{x\in R^n,\,\rho\in(0,1)} \rho^{\ell-n/p}\|D_\ell\gamma\|_{L_p(\mathcal{B}_\rho(x))} \le c\|\gamma\|_{MW_p^\ell},$$

$$\sup_{x\in R^n, \rho>0} \rho^{\ell-n/p} \|D_\ell \gamma\|_{L_p(\mathcal{B}_\rho(x))} \le c\|\gamma\|_{ML_p^\ell}.$$

Доказательство. Эти оценки непосредственно следуют из теорем 1.1, 1.2 и соотношений

$$\operatorname{cap}(\mathcal{B}_\rho, W_p^\ell) \sim \rho^{n-\ell p} \quad \text{, если } \rho\in(0,1),$$
$$\operatorname{cap}(\mathcal{B}_\rho, L_p^\ell) = c\rho^{n-\ell p}.$$

Следствие 1.7. Пусть $\ell p<n$, $p\in(1,\infty)$. Тогда

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \le c\left(\sup_{\{e:d(e)\le 1\}} \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{mes}_n e]^{1/p-\ell/n}} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right),$$

$$\|\gamma\|_{ML_p^\ell} \le c\left(\sup_e \frac{\|D_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{mes}_n e]^{1/p-\ell/n}} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right).$$

Доказательство. Подставляя в неравенство

$$\|u\|_{L_{pn/(n-\ell p)}} \le c\|u\|_{L_p^\ell}, \quad u\in C_0^\infty(R^n),$$

произвольную функцию, удовлетворяющую неравенству $u\ge 1$ на компакте e, выводим оценку

$$\operatorname{cap}(e, L_p^\ell) \ge c(\operatorname{mes}_n e)^{1-\ell p/n}.$$

Отсюда, из следствия 1.3 и теоремы 1.2 получается требуемое утверждение.

Приведем еще верхние оценки для нормы в MW_p^ℓ , вытекающие из следствия 1.7 и не содержащие супремумов по компактам

$$\|\gamma\|_{MW_p^\ell} \le c\left(\sup_{x\in R^n} \|D_\ell \gamma\|_{L_{n/\ell}(\mathcal{B}_1(x))} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right),$$

$$\|\gamma\|_{ML_p^\ell} \le c\left(\|D_\ell \gamma\|_{L_{n/\ell}} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right).$$

Применяя неравенство Минковского, получаем, что правая часть последнего неравенства при дробном ℓ мажорируется нормой

$$c\left[\left(\int \|\nabla_{[\ell]} \gamma(x+h) - \nabla_{[\ell]}\gamma(x)\|^p_{L_{n/\ell}} |h|^{-n-p\{\ell\}} dh\right)^{1/p} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right].$$

Как показано в [13] ,*) при $p \geq 2$, $n > p[\ell]$

$$\|D_\ell \gamma\|_{L_{n/\ell}} \leq c\|(-\Delta)^{\ell/2}\gamma\|_{L_{n/\ell}},$$

поэтому если $p\ell < n$ и $p \geq 2$, то

$$\|\gamma\|_{ML_p^\ell} \leq c\left(\|(-\Delta)^{\ell/2}\gamma\|_{L_{n/\ell}} + \|\gamma\|_{L_\infty}\right).$$

§ 2. Следы и продолжения мультипликаторов

2.1. MW_p^ℓ и ML_p^ℓ как пространства следов.

Пусть $R^{n+m} = \{z = (x,y) : x \in R^n,\ y \in R^m\}$, $m > 0$.

Для функций $U \in C_0^\infty(R^{n+m})$ введем норму

$$\langle U \rangle_{\kappa,p,\beta} = \left(\int_{R^{n+m}} |y|^{p\beta} |\nabla_{\kappa,z} U|^p dz\right)^{1/p}.$$

Легко видеть, что $\langle U\rangle_{\kappa-r,p,\beta-r} \leq c\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta}$ при $\kappa > r$.

Обозначим через $W^\kappa_{p,\beta}$ и $L^\kappa_{p,\beta}$ пополнения пространства $C_0^\infty(R^{n+m})$ по нормам $\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta} + \|U\|_{L_p(R^{n+m})}$ и $\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta}$.

Как известно [6,7] , пространство $W_p^\ell(R^n)$ при нецелых ℓ представляет собой пространство следов на R^n функций из $W^\kappa_{p,\beta}$, где $\kappa > \ell$, $\beta = \kappa - \ell - m/p$ и

$$\|u\|_{W_p^\ell(R^n)} \sim \inf_{\{U\}} \|U\|_{W^\kappa_{p,\beta}(R^{n+m})}, \tag{2.1}$$

где $U \in C_0^\infty(R^{n+m})$ - любое продолжение функции $u \in C_0^\infty(R^n)$ на R^{n+m}. Следующие две теоремы показывают, что $MW_p^\ell(R^n)$ является пространст-

---

*) Для того чтобы воспользоваться результатом работы [13], следует представить $D_\ell\gamma$ в виде

$$c\left(\int_0^\infty \int_{\mathcal{B}_1} |\nabla_{[\ell]}\gamma(x+\rho y) - \nabla_{[\ell]}\gamma(x)|^p dy \frac{d\rho}{\rho^{1+p\{\ell\}}}\right)^{1/p}.$$

вом следов на R^n функций из пространства $MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})$ мультипликаторов в $W^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})$.

Теорема 2.1. Пусть $\{l\}>0$, $\Gamma\in MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})$, $\beta=\kappa-l-m/p$, $\gamma(x)=\Gamma(x,0)$. Тогда $\gamma\in MW^{l}_{p}(R^{n})$ и справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{MW^{l}_{p}(R^{n})}\le c\,\|\Gamma\|_{MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})}. \tag{2.2}$$

То же верно при $pl<n$, если W заменить на L.

Доказательство. Пусть $U\in C_0^{\infty}(R^{n+m})$, $U(x,0)=u(x)$. В силу (2.1)

$$\|\gamma u\|_{W^{l}_{p}(R^{n})}\le c\,\|\Gamma U\|_{W^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})}\le c\,\|\Gamma\|_{MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})}\|U\|_{W^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})}.$$

Используя (2.1) и произвольность функции U, получаем (2.2).

Доказательство остается верным, если W заменить на L.

Следуя Стейну [14], введем оператор, продолжения $R^n\longrightarrow R^{n+m}$ равенствам

$$\Gamma_*(x,y)=\int\zeta(t)\gamma(x+|y|t)\,dt, \tag{2.3}$$

где $\zeta\in C^{\infty}(R^n)\cap L(R^n)$, $\int\zeta(x)\,dx=1$.

Теорема 2.2. Пусть $\{l\}>0$, $\nabla_s\gamma\in MW^{l}_{p}(R^n)$ и Γ_* -продолжение функции γ на R^{n+m}, определенное формулой (2.3), где

$$\int(1+|x|)^{l+s}\sum_{j=0}^{\kappa+s}\sup_{\partial B_{|x|}}|\nabla_{j,x}\zeta|(1+|x|)^{j}\,dx=C<\infty, \tag{2.4}$$

$$\int x^{\alpha}\zeta(x)\,dx=0,\quad 0<|\alpha|\le[l]+s. \tag{2.5}$$

Тогда $\nabla_{s,z}\Gamma_*\in MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})$, $\beta=\kappa-l-m/p$, и справедлива оценка

$$\|\nabla_{s,z}\Gamma_*\|_{MW^{\kappa}_{p,\beta}(R^{n+m})}\le cC\,\|\nabla_{s,x}\gamma\|_{MW^{l}_{p}(R^{n})}. \tag{2.6}$$

При $pl<n$ это утверждение остается справедливым, если всюду W заменить на L.

Доказательству теоремы предпошлем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. Пусть r - дробное число, ω - m - мерный мультииндекс, $|\omega|<r$ и

$$R_\omega(h,x)=D^\omega y(x+h)-\sum_{|\nu|<r-|\omega|} D^{\nu+\omega} y(x)\frac{h^\nu}{\nu!} . \qquad (2.7)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_{R^n}|h|^{p(|\omega|-r)-n}|R_\omega(h,x)|^p dh\right)^{1/p}\leq c\,(D_r y)(x). \qquad (2.8)$$

Доказательство. Из тождества

$$R_\omega(h,x)=([r]-|\omega|)\int_0^1\sum_{|\nu|=[r]-|\omega|}\frac{h^\nu}{\nu!}\Big[(D^{\nu+\omega}y)(x+th)-$$
$$-D^{\nu+\omega}y(x)\Big](1-t)^{[r]-|\omega|-1}dt$$

и неравенства Минковского следует, что левая часть оценки (2.8) не превосходит величины

$$c\int_0^1\left(\int_{R^n}|h|^{-p\{r\}-n}\sum_{|\alpha|=[r]}|(D^\alpha y)(x+th)-(D^\alpha y)(x)|^p dh\right)^{1/p}dt,$$

которая эквивалентна $(D_r y)(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. В предположениях теоремы 2.2 справедлива оценка

$$\left(\int_{R^m}|y|^{p(q-r)-m}|\nabla_{q,z}\Gamma_*|^p dy\right)^{1/p}\leq c\,C(D_r y)(x), \qquad (2.9)$$

где r - дробное число, $0<r<q\leq k+1,\ r\leq \ell+1$.

Доказательство. Пусть τ,σ,ρ,ω - m - мерные мультииндексы, связанные следующим образом: $|\tau|+|\sigma|=q$, $\rho=0$, $\omega=\tau$, если $|\tau|\leq r$ и $\rho=\tau-\omega$, ω - любой мультииндекс порядка $[r]$ такой, что $\omega<\tau$, если $|\tau|>r$. Имеем

$$D_x^\tau D_y^\sigma\int\zeta(t)y(x+|y|t)dt=D_x^\rho D_y^\sigma\int\zeta(t)D_x^\omega y(x+|y|t)dt=$$

$$=D_y^\sigma\left(|y|^{-n-|\rho|}\int(D^\rho\zeta)\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)D^\omega y(\xi)d\xi\right)=$$

$$=D_y^\sigma\left(|y|^{-n-|\rho|}\int(D^\rho\zeta)\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)R_\omega(\xi-x,x)d\xi\right),$$

где R_ω - функция, определенная равенством (2.7). Здесь мы воспользовались тождеством

$$D_y^\sigma\left(|y|^{-n-|\rho|}\int (D^\rho\zeta)\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)(\xi-x)^\nu d\xi\right)=D_y^\sigma\left(|y|^{|\nu|-|\rho|}\right)\int D^\rho\zeta(\xi)\xi^\nu d\xi=0. \quad (2.10)$$

Ясно, что

$$\left|D_y^\sigma\left(|y|^{-n-|\rho|}(D^\rho\zeta)\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)R_\omega(\xi-x,x)\right)\right|\leq$$

$$\leq |y|^{r-|\rho|-|\sigma|-|\omega|}\varphi\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)\frac{|R_\omega(\xi-x,x)|}{|\xi-x|^{r-|\omega|+n}},$$

где φ - функция, допускающая оценку

$$|\varphi(\xi)|\leq c|\xi|^{r-|\omega|+n}\sum_{i=0}^{|\sigma|}|\nabla_{i+|\rho|}\zeta(\xi)|\left(|\xi|^i+1\right). \quad (2.11)$$

Так как $|\rho|+|\omega|=|\tau|$, $|\tau|+|\sigma|=q$,

то

$$\int_{R^m}|y|^{p(q-r)-m}|D_x^\tau D_y^\sigma\Gamma_*|^p dy\leq c\int_{R^m}\left(\int_{R^n}\varphi\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)\frac{|R_\omega(\xi-x,x)|}{|\xi-x|^{r-|\omega|+n}}d\xi\right)^p\frac{dy}{|y|^m}.$$

Переходя к сферическим координатам, запишем правую часть в виде

$$c\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\left(\int_0^\infty\int_{\partial B_1}\varphi\left(\frac{t}{\lambda}\theta\right)\frac{|R_\omega(t\theta,x)|}{t^{r-|\omega|}}\frac{dt}{t}d\theta\right)^p.$$

Эта величина не больше чем

$$c\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda}\left(\int_0^\infty Q\left(\frac{t}{\lambda}\right)g(t)\frac{dt}{t}\right)^p\leq c\left(\int_0^\infty Q(t)\frac{dt}{t}\right)^p\int_0^\infty g(t)^p\frac{dt}{t},$$

где

$$Q(t)=\sup_{|\theta|=1}\varphi(t\theta),\quad g(t)=t^{|\omega|-r}\int_{\partial B_1}|R_\omega(t\theta,x)|d\theta.$$

Отсюда и из (2.11) получаем

$$\int_{R^m}|y|^{p(q-r)-m}|D_x^\tau D_y^\sigma\Gamma_*|^p dy\leq$$

$$\leq c\left(\int_{R^n}|\xi|^{r-|\omega|}\sum_{i=0}^{|\sigma|}(|\xi|+1)^i\sup_{\partial B_{|\xi|}}|\nabla_{i+|\rho|}\zeta(\xi)|d\xi\right)^p\int_{R^n}|h|^{p(|\omega|-r)-n}|R_\omega(h,x)|^p dh.$$

Ссылка на лемму 2.1 заканчивает доказательство.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть χ - любой m - мерный мультииндекс порядка s. Ясно, что

$$\langle U D_y^{\chi} \Gamma_* \rangle_{\kappa,p,\beta} \leq c \sum_{|\varepsilon|+|\mu|+|\nu|=\kappa} \langle D_z^{\nu} U D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* \rangle_{0,p,\beta}. \qquad (2.12)$$

При $|\mu| < s$ имеем

$$D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_*(z) = D_y^{\chi+\varepsilon} |y|^{-n} \int \zeta\left(\frac{\xi - x}{|y|}\right)\Big[D_\xi^{\mu} \gamma(\xi) - \\ - \sum_{|\varkappa| \leq s-|\mu|-1} \frac{(\xi - x)^{\varkappa}}{\varkappa!} D^{\varkappa+\mu} \gamma(x)\Big] d\xi, \qquad (2.13)$$

а в случае $|\mu| \geq s$

$$D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_*(z) = D_x^{\mu_1} D_y^{\chi+\varepsilon}\left(|y|^{-n} \int \zeta\left(\frac{\xi - x}{|y|}\right) D_\xi^{\mu_2} \gamma(\xi) d\xi\right),$$

где $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $|\mu_1| > 0$, $|\mu_2| = s$. Поэтому в обоих случаях

$$|D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_*(z)| \leq c\, C \| \nabla_s \gamma \|_{L_\infty} |y|^{-|\mu|-|\varepsilon|}. \qquad (2.14)$$

Отсюда при $|\nu| > \ell$ получаем

$$\langle D_z^{\nu} U D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* \rangle_{0,p,\beta} \leq c\, C \| \nabla_s \gamma \|_{L_\infty} \langle U \rangle_{|\nu|,p,|\nu|-\ell-m/p}^{\leq} \\ \leq c\, C \| \nabla_s \gamma \|_{L_\infty} \langle U \rangle_{\kappa,p,\beta}. \qquad (2.15)$$

Пусть теперь $|\nu| < \ell$. Ясно, что

$$\langle D_z^{\nu} U D_x^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* \rangle_{0,p,\beta} \leq \langle R_\nu D_z^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* \rangle_{\kappa,p,\beta} + \\ + c \sum_{j=0}^{[\ell]-|\nu|} \left(\int_{R^{n+m}} |y|^{p(\kappa-\ell+j)-m} |D_z^{\mu} D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_*(z)|^p |(\nabla_{j,y} D_z^{\nu} U)(x,0)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.16)$$

где

$$R_\nu(z) = D_z^{\nu} U(z) - \sum_{|\tau| \leq [\ell]-|\nu|} (D_y^{\tau} D_z^{\nu} U)(x,0) \frac{y^{\tau}}{\tau!} - \\ = ([\ell]-|\nu|+1) \sum_{|\tau| = [\ell]-|\nu|+1} \frac{y^{\tau}}{\tau!} \int_0^1 (D_y^{\tau} D_z^{\nu} U)(x,ty)(1-t)^{[\ell]-|\nu|} dt.$$

В силу (2.14) и неравенства Минковского

$$<R_\nu D_z^\mu D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* >_{\kappa,p,\beta} \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{L_\infty} \left(\int |y|^{p(1-\{\ell\})-m} \left(\int_0^1 |(\nabla_{[\ell]+1,z} U)(x,ty)| dt \right)^p dz \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{L_\infty} <U>_{[\ell]+1,p,1-\{\ell\}-m/p} \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{L_\infty} <U>_{\kappa,p,\beta}.$$

По лемме 2.2 (при $q=|\mu|+s+|\varepsilon|$, $r=\ell+s-j-|\nu|$) сумма в правой части неравенства (2.16) не больше чем

$$c\sum_{j=0}^{[\ell]-|\nu|} \left(\int_{R^n} |(\nabla_{j,y} D_z^\nu U)(x,0)|^p \left[(D_{\ell-j-|\nu|} \nabla_1 \gamma)(x) \right]^p dx \right)^{1/p}, \tag{2.17}$$

что в силу леммы 1.2 при $p>1$ мажорируется величиной

$$cC \sum_{j=0}^{[\ell]-|\nu|} \sup_e \left(\frac{\int_e |D_{\ell-j-|\nu|} \nabla_1 \gamma|^p dx}{cap(e, W_p^{\ell-j-|\nu|})} \right)^{1/p} \|(\nabla_{j+\nu,z} U)(\cdot,0)\|_{W_p^{\ell-j-|\nu|}(R^n)},$$

которая по теореме 1.1 не превосходит

$$cC \|\nabla_1 \gamma\|_{MW_p^\ell(R^n)} \|U\|_{W_{p,\beta}^\kappa(R^{n+m})}. \tag{2.18}$$

Такая же оценка получается при $p=1$ из леммы 1.12 и теоремы 1.3. Итак, при $|\nu|<\ell$

$$<D_z^\nu U D_x^\mu D_y^{\chi+\varepsilon} \Gamma_* >_{0,p,\beta} \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{MW_p^\ell(R^n)} \|U\|_{W_{p,\beta}^\kappa(R^{n+m})}.$$

Подставляя эту оценку и (2.15) в (2.12), получаем

$$<U D_y^\chi \Gamma_* >_{\kappa,p,\beta} \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{MW_p^\ell(R^n)} \|U\|_{W_{p,\beta}^\kappa(R^{n+m})}.$$

Согласно оценке (2.14), где $|\mu|=|\varepsilon|=0$, $|D_y^\chi \Gamma_*| \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{L_\infty}$, поэтому

$$\|U D_y^\chi \Gamma_*\|_{L_p(R^{n+m})} \leq cC \|\nabla_1 \gamma\|_{L_\infty} \|U\|_{L_p(R^{n+m})}.$$

Утверждение теоремы, относящееся к пространству W_p^ℓ, доказано.

В случае $p\ell<n$, $p>1$, сумма (2.17) может быть, по лемме 1.2, оценена величиной

$$
cC\sum_{j=0}^{[\ell]-|\nu|} \sup_{e}\left(\frac{\int_e |D_{\ell-j-|\nu|}\nabla_1\gamma|^p dx}{cap(e, L_p^{\ell-j-|\nu|})}\right)^{1/p} \|(\nabla_{j+\nu,z}U)(\cdot,0)\|_{L_p^{\ell-j-|\nu|}(R^n)}. \tag{2.19}
$$

В силу неравенства

$$
\|(\nabla_{j+\nu,z}U)(\cdot,0)\|_{L_p^{\ell-j-|\nu|}(R^n)} \leq c\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta}
$$

(см. [6,7,10]) и теоремы 1.2, величина (2.19) не больше, чем

$$
cC\|\nabla_1\gamma\|_{ML_p^{\ell}(R^n)}\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta}.
$$

Используя лемму 1.12 и теорему 1.3, получаем такую же оценку и при $p=1$. Поэтому в случае $p\ell<n$ имеет место неравенство

$$
\langle U\nabla_{1,y}\Gamma_*\rangle_{\kappa,p,\beta} \leq cC\|\nabla_1\gamma\|_{ML_p^{\ell}(R^n)}\langle U\rangle_{\kappa,p,\beta}. \tag{2.20}
$$

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если в формулировке леммы 2.2 положить $m=1$ и заменить R^m на $R_+^1=\{y: y\geq 0\}$, то она останется справедливой и без условия (2.5). Для этого следует проверить только равенство

$$
D_y^{\sigma}(y^{|\nu|-|\rho|})\int D^{\rho}\zeta(\xi)\xi^{\nu}d\xi=0. \tag{2.21}
$$

При $|\nu|<|\rho|$, используя (2.4) и интегрируя по частям, получаем, что интеграл (2.21) равен нулю. В случае $|\nu|\geq|\rho|$ тождественно равна нулю функция $D_y^{\sigma}(y^{|\nu|-|\rho|})$, так как

$$
\sigma>\sigma+[r]-q-[r]-|\tau|-[r]-|\omega|-|\rho|\geq|\nu|-|\rho|.
$$

В доказательстве теоремы 2.2 условие (2.5) используется лишь в равенстве (2.13). Так как $|\dot\chi|+|\varepsilon|=1+|\varepsilon|>1-|\mu|-1\geq|\chi|$, то при $m=1$ и $y\in R_+^1$ равенство (2.13) остается верным и без условия (2.5). Поэтому имеет место

Теорема 2.3. <u>Пусть</u> $\{\ell\}>0$, $p\geq 1$ <u>и</u> $\nabla_1\gamma\in MW_p^{\ell}(R^n)$. <u>Пусть еще</u> Γ_* - <u>продолжение функции</u> γ <u>на</u> $R_+^{n+1}=\{z=(x,y): x\in R^n,\ y>0\}$, <u>определенное формулой (2.3), где функция</u> ζ <u>подчинена только условию (2.4). Тогда</u> $\nabla_{1,z}\Gamma_*\in MW_{p,\beta}^{\kappa}(R_+^{n+1})$, $\beta=\kappa-\ell-1/p$, <u>и справедлива оценка</u>

$$
\|\nabla_{1,z}\Gamma_*\|_{MW_{p,\beta}^{\kappa}(R_+^{n+1})}\leq cC\|\nabla_{1,x}\gamma\|_{MW_p^{\ell}(R^n)}.
$$

<u>То же утверждение верно и при</u> $p\ell<n$ <u>после замены</u> W <u>на</u> L.

2.2. Приложение к первой краевой задаче в полупространстве.

Рассмотрим в полупространстве R_+^{n+1} краевую задачу

$$L(D)U = 0 \qquad \text{при } y \geq 0,$$

$$\partial^j U / \partial y^j = \varphi_j \qquad \text{при } y = 0,\ j = 0, \dots, m-1.$$

Здесь L - однородный дифференциальный эллиптический оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами.

Теорема 2.4. Пусть $\nabla_{m-1-j}\varphi_j \in MW_p^{\ell}(R^n)$, где $0<\ell<1, 1\leq p<\infty$. Тогда существует одно и только одно решение задачи Дирихле такое, что $\nabla_{m-1} U \in MW_{p,\kappa-\ell-1/p}^{\kappa}(R_+^{n+1})$, $\kappa \geq 1$. Для этого решения справедлива оценка

$$\| \nabla_{m-1} U \|_{MW^{\kappa}_{p,\kappa-\ell-1/p}(R_+^{n+1})} \leq K \sum_{j=0}^{m-1} \| \nabla_{m-1-j}\varphi_j \|_{MW_p^{\ell}(R^n)},$$

где K - постоянная, зависящая от оператора L, а также от n, p, m, κ, ℓ. То же верно при $p\ell < n$, если W заменить на L.

Доказательство. Если $U \in MW^{\kappa}_{p,\kappa-\ell-1/p}(R_+^{n+1})$ - решение однородной задачи, то $\| \nabla_{m-1} U \|_{L_\infty(R_+^{n+1})} < \infty$ и, следовательно, $U = 0$ (см., например, [15 с.35]).

Как известно [15, гл.1,§ 2], существование решения следует уже из предположения $\nabla_{m-1-j}\varphi_j \in L_\infty(R^n)$ для любого $j = 0, 1, \dots, m-1$. Решение удовлетворяет равенству

$$D_x^{\alpha} \frac{\partial^i}{\partial y^i} U(x,y) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\beta|=m-1-j} \int_{R^n} K_{i,j,\beta}(x-\xi, y) D_\xi^{\beta} \varphi_j(\xi)\, d\xi,$$

где $0 \leq i \leq m-1$, α - любой мультииндекс порядка $m-1-i$, а $K_{i,j,\beta}(z)$ - положительные однородные функции степени $-n$, гладкие вне начала координат и такие, что $K_{i,j,\beta}(x,0) = 0$ при $x \neq 0$. Из этих условий получается оценка

$$(|x|^2+y^2)^{1/2} |\nabla_x K_{i,j,\beta}(x,y)| + |K_{i,j,\beta}(x,y)| \leq c y (|x|^2+y^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

которая показывает, что для функции $\zeta(x) = K_{i,j,\beta}(x,1)$ выполнено условие (2.4) при $s=0$, $0<\ell<1$. Остается воспользоваться теоремой (2.2).

2.3. Следы функций из $MW_p^{\ell}(R^{n+m})$ на R^n.

В этом разделе показано, что пространство сужений функций из $MW_p^{\ell}(R^{n+m})$ ($\ell p > n$, $\ell - m/p$ - дробное) на R^n совпадает с пространством

$MW_p^{\ell-m/p}(R^n)$.

Теорема 2.5. Пусть $\ell p>m$, $\ell-m/p$ - дробное, $1\le p<\infty$, $\Gamma\in MW_p^{\ell}(R^{n+m})$ и $\gamma(x)=\Gamma(x,0)$. Тогда $\gamma\in MW_p^{\ell-m/p}(R^n)$ и справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{MW_p^{\ell-m/p}(R^n)}\le c\|\Gamma\|_{MW_p^{\ell}(R^{n+m})}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $U\in C_0^\infty(R^{n+m})$, $U(x,0)=u(x)$. Имеем

$$\|\gamma u\|_{W_p^{\ell-m/p}(R^n)}\le c\|\Gamma U\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})}\le c\|\Gamma\|_{MW_p^{\ell}(R^{n+m})}\|U\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})}.$$

Используя произвольность функции U , получаем (2.22) .

Далее мы будем использовать оператор продолжения $R^n\to R^{n+m}$, определенный формулой (2.3) . Будем считать, что ядро ζ удовлетворяет условиям (2.4) и (2.5) при $k=[\ell]$, $s=1$.

Теорема 2.6. Если $\gamma\in MW_p^{\ell-m/p}(R^n)$, $\ell p>m$, $\ell-m/p$ - дробное, $1\le p<\infty$, то $\Gamma_*\in MW_p^{\ell}(R^{n+m})$ и справедлива оценка

$$\|\Gamma_*\|_{MW_p^{\ell}(R^{n+m})}\le cC\|\gamma\|_{MW_p^{\ell-m/p}(R^n)}. \tag{2.23}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 2.3. Пусть $\sigma\in(0,\ell]$. Тогда

$$\left(\int_{2|\eta|<|y|}|\nabla_{[\sigma],y}\Gamma_*(x,y+\eta)-\nabla_{[\sigma]}\Gamma_*(x,y)|^p|\eta|^{-m-p\{\sigma\}}d\eta\right)^{1/p}\le$$

$$\le cC|y|^{-\sigma}\|\gamma\|_{L_\infty}, \tag{2.24}$$

$$\left(\int_{R^n}|\nabla_{[\sigma],x}\Gamma_*(x+h,y)-\nabla_{[\sigma]}\Gamma_*(x,y)|^p|h|^{-n-p\{\sigma\}}dh\right)^{1/p}\le cC|y|^{-\sigma}\|\gamma\|_{L_\infty}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Обозначим левые части неравенств (2.24), (2.25) через A_y и B_x . Очевидно,

$$A_y\le\|\gamma\|_{L_\infty}\left\{\int_{2|\eta|<|y|}\left(\int_{R^n}\left|\nabla_{[\sigma],y}\left[\zeta\left(\frac{\xi-x}{|y+\eta|}\right)|y+\eta|^{-n}-\zeta\left(\frac{\xi-x}{|y|}\right)|y|^{-n}\right]\right|d\xi\right)^p|\eta|^{-m-p\{\sigma\}}d\eta\right\}^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\leq \|\gamma\|_{L_\infty}\left\{ \int\limits_{2|\eta|<|y|} \frac{|\eta|^p d\eta}{|\eta|^{m+p\{\sigma\}}} \left(\int\limits_0^1 dz \int\limits_{R^n} |\varphi^{([\sigma]+1)}_{\xi-x}\left[|y|+z(|y+\eta|-|y|)\right]| d\xi \right)^p \right\}^{1/p},$$

где $\varphi_{\xi-x}(t) = \dfrac{\partial^{[\ell]}}{\partial t^{[\ell]}} \left(t^{-n} \zeta\left(\dfrac{\xi-x}{t}\right)\right)$. Поэтому

$$A_y \leq cC\|\gamma\|_{L_\infty}\left\{ \int\limits_{2|\eta|<|y|} |\eta|^{p(1-\{\sigma\})-m} d\eta \left(\int\limits_0^1 (|y|+z(|y+\eta|-|y|))^{-[\sigma]-1} dz \right)^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq cC\|\gamma\|_{L_\infty}|y|^{-\sigma}.$$

Неравенство (2.24) доказано. В выражении B_x сделаем замену переменных $\xi - x = |y|\Xi$, $h = |y|H$. Тогда

$$B_x \leq |y|^{-\sigma}\left\{ \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^n} |\nabla_{[\sigma],\Xi}\left[\zeta(\Xi+H)-\zeta(\Xi)\right]| d\Xi \right)^p |H|^{-n-p\{\sigma\}} dH \right\}^{1/p}.$$

Разобьем интеграл по H на два, первый из которых распространен на шар $\mathcal{B}_1$. Имеем

$$\int\limits_{\mathcal{B}_1} \leq \int\limits_{\mathcal{B}_1} \left(\int\limits_{R^n} \left| \sum_{i=1}^n H_i \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \Xi_i} \nabla_{[\sigma],\Xi}\zeta(\Xi+zH)dz \right| d\Xi \right)^p |H|^{-n-p\{\sigma\}} dH \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{R^n} |\nabla_{[\sigma]+1}\zeta(\Xi)| d\Xi \right)^p \int\limits_{\mathcal{B}_1} |H|^{-n+(1-\{\sigma\})p} dH \leq cC^p.$$

Наконец,

$$\int\limits_{R^n\setminus\mathcal{B}_1} \leq \int\limits_{R^n\setminus\mathcal{B}_1} \left(|\nabla_{[\sigma]}\zeta(\Xi+H)| + |\nabla_{[\sigma]}\zeta(\Xi)| \right) d\Xi \Big)^p |H|^{-n-p\{\sigma\}} dH =$$

$$= 2^p \left(\int\limits_{R^n} |\nabla_{[\sigma]}\zeta(\Xi)| d\Xi \right)^p \int\limits_{R^n\setminus\mathcal{B}_1} |H|^{-n-p\{\sigma\}} dH \leq cC^p.$$

Лемма доказана.

Обозначим через d_j число различных производных порядка j по переменным $y_1, \dots, y_m$, и пусть $[W_p^\sigma(R^n)]^{d_j}$ - прямое произведение d_j экземпляров пространства $W_p^\sigma(R^n)$. Как известно, существует оператор продолжения $\mathcal{E}$, определенный на вектор-функциях $(\varphi_0, \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{[\ell-m/p]})$, где $\vec{\varphi}_j$ - d_j - мерная вектор-функция, действующий в пространство скалярных функций и обладающий следующими свойствами:

1) $\mathcal{E}$ непрерывен как оператор:

$$\prod_{j=0}^{[\ell-m/p]} \left[W_p^{[\ell-j-m/p]}(R^n)\right]^{d_j} \longrightarrow W^{\kappa}_{p,\kappa-\ell}(R^{n+m}); \tag{2.26}$$

2) имеют место равенства

$$(\nabla_j \mathcal{E}\vec{\varphi})(x,0) = \vec{\varphi}_j(x), \quad j=0,1,\ldots,[\ell-m/p].$$

В дальнейшем используется тот факт, что пространство $W^{[\ell]+1}_{p,1-\{\ell\}}(R^{n+m})$ вложено в пространство $W_p^{\ell}(R^{n+m})$ (см. [7]), а также применяется обобщенное неравенство Харди

$$\int_{R^m} |y|^{-p\ell}|V|^p dy \leq c\|V\|^p_{W_p^{\ell}(R^m)}, \tag{2.27}$$

где V - функция из $W_p^{\ell}(R^n)$, удовлетворяющая условиям

$$(\nabla_j V)(x,0) = 0, \quad j=0,1,\ldots,[\ell-m/p]. \tag{2.28}$$

Мы будем применять следующую эквивалентную нормировку пространства $W_p^{\ell}(R^{n+m})$:

$$\|U\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})} \sim \Big(\int_{R^n} dx \int_{R^m} dy \int_{R^m} |\nabla_{[\ell],y} U(x,y+\eta) - \nabla_{[\ell],y} U(x,y)|^p |\eta|^{-m-p\{\ell\}} d\eta\Big)^{1/p} + \Big(\int_{R^m} dy \int_{R^n} dx \int_{R^n} |\nabla_{[\ell],x} U(x+h,y) - \nabla_{[\ell],x} U(x,y)|^p |h|^{-n-p\{\ell\}} dh\Big)^{1/p} + \|U\|_{L_p(R^{n+m})}. \tag{2.29}$$

Доказательство теоремы 2.5. Достаточно ограничиться случаем дробного ℓ, так как этот результат для целых ℓ является частным случаем теорем 2.1 и 2.2 $(\beta=0)$.

Пусть $U \in C_0^{\infty}(R^{n+m})$ и

$$\vec{\varphi}(x) = \big(U(x,0), (\nabla_y U)(x,0), \ldots, (\nabla_{[\ell-m/p],y} U)(x,0)\big).$$

Введем еще функцию $V = U - \mathcal{E}\vec{\varphi}$, где $\mathcal{E}$ - оператор продолжения, о котором шла речь перед доказательством. Тогда

$$\|\Gamma_* U\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})} \leq \|\Gamma_* \mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})} + \|\Gamma_* V\|_{W_p^{\ell}(R^{n+m})}.$$

Так как $W^{[\ell]+1}_{p,1-\{\ell\}}(R^{n+m}) \subset W^{\ell}_{p}(R^{n+m})$, то первое слагаемое справа не превосходит $c\,\|\Gamma_*\,\mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W^{[\ell]+1}_{p,1-\{\ell\}}(R^{n+m})}$, что по теореме 2.2 не меньше чем $c\,C\,\|\gamma\|_{MW_p^{\ell-m/p}}\|\mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W^{[\ell]+1}_{p,1-\{\ell\}}(R^{n+m})}$. Поскольку оператор $\mathcal{E}$ осуществляет непрерывное отображение (2.26), то справедливо неравенство

$$\|\Gamma_*\,\mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})} \le c\,C\,\|\gamma\|_{MW_p^{\ell-m/p}(R^n)} \sum_{j=0}^{[\ell-m/p]} \|(\nabla_{j,y}U)(\cdot,0)\|_{W_p^{\ell-m/p-j}(R^n)}.$$

Поэтому

$$\|\Gamma_*\,\mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})} \le c\,C\,\|\gamma\|_{MW_p^{\ell-m/p}(R^n)}\,\|U\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})}. \tag{2.30}$$

Докажем неравенство

$$\|\Gamma_* V\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})} \le c\,C\,\|\gamma\|_{L_\infty}\,\|V\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})}. \tag{2.31}$$

Нетрудно видеть, что

$$\Big(\int_{R^n} dx \int_{R^m} dy \int_{2|\eta|>|y|} \big|\nabla_{[\ell],y}(\Gamma_* V)(x,y+\eta) -$$

$$- (\nabla_{[\ell],y}(\Gamma_* V))(x,y)\big|^p |\eta|^{-m-p\{\ell\}} d\eta\Big)^{1/p} \le c\Big(\int_{R^{n+m}} |\nabla_{[\ell],y}(\Gamma_* V)|^p |y|^{-p\{\ell\}} dz\Big)^{1/p}, \tag{2.32}$$

что в силу (2.14), где $s=0$, $\mu=0$, не превосходит

$$c\sum_{j=0}^{[\ell]}\Big(\int_{R^{n+m}} |\nabla_{[\ell]-j,y}\Gamma_*|^p |\nabla_{j,y}V|^p |y|^{-p\{\ell\}} dz\Big)^{1/p} \le c\,C\,\|\gamma\|_{L_\infty}\sum_{j=0}^{[\ell]}\Big(\int_{R^{n+m}} |\nabla_{j,y}V|^p |y|^{(j-\ell)p} dz\Big)^{1/p}.$$

Отсюда и из (2.27) следует, что левая часть неравенства (2.32) не больше чем $c\,C\,\|\gamma\|_{L_\infty}\|V\|_{W^{\ell}_{p}(R^{n+m})}$. Выражение

$$\Big(\int_{R^n} dx \int_{R^m} dy \int_{2|\eta|<|y|} \big|\nabla_{[\ell],y}\big[(\Gamma_* V)(x,y+\eta) - (\Gamma_* V)(x,y)\big]\big|^p |\eta|^{-m-p\{\ell\}} d\eta\Big)^{1/p}$$

мажорируется величиной

$$c\sum_{j=0}^{[\ell]}\Big(\int_{R^n} dx \int_{R^m} dy \int_{2|\eta|<|y|} |(\nabla_{[\ell]-j,y}\Gamma_*)(x,y+\eta)|^p\,|\nabla_j\,(V(x,y+\eta) -$$

$$-V(x,y))|^p|\eta|^{-m-p\{\ell\}}d\eta+c\sum_{j=0}^{[\ell]}\int_{R^n}dx\int_{R^m}dy|(\nabla_{j,y}V)(x,y)|^p\int_{2|\eta|<|y|}|\nabla_{[\ell]-j,y}\Gamma_*(x,y+\eta)-$$

$$-\Gamma_*(x,y)|^p|\eta|^{-m-p\{\ell\}}d\eta\Big)^{1/p}. \qquad (2.33)$$

Так как $|(\nabla_{[\ell]-j,y}\Gamma_*)(x,y+\eta)|\leq cC\|\gamma\|_{L_\infty}|y|^{j-[\ell]}$, то первая сумма не превосходит

$$cC\|\gamma\|_{L_\infty}\sum_{j=0}^{[\ell]-1}\Big(\int_{R^n}dx\int_{R^m}|y|^{p(j-[\ell])}\int_{2|\eta|<|y|}|\eta|^{-m+p(1-\{\ell\})}\Big(\int_0^1|\nabla_{j+1,y}V(x,y+$$

$$+t\eta)|dt\Big)^p d\eta\Big)^{1/p}+cC\|\gamma\|_{L_\infty}\|V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (2.29) . Далее имеем

$$\int_{R^m}|y|^{(j-[\ell])p}\int_{2|\eta|<|y|}|\eta|^{-m+p(1-\{\ell\})}\Big(\int_0^1|\nabla_{j+1,y}V(x,y+t\eta)|dt\Big)^p d\eta dy\leq$$

$$\leq c\int_0^1 dt\int_{R^m}|\eta|^{-m+p(1-\{\ell\})}\int_{|y|>2|\eta|}|y|^{(j-[\ell])p}|\nabla_{j+1,y}V(x,y+t\eta)|^p dy d\eta\leq$$

$$\leq c\int_{R^m}|\eta|^{-m+p(1-\{\ell\})}\int_{|\chi|>|\eta|}|\chi|^{(j-[\ell])p}|\nabla_{j+1,\chi}V(x,\chi)|^p d\chi d\eta=$$

$$=c\int_{R^m}|\chi|^{p(j+1-\ell)}|\nabla_{j+1,\chi}V(x,\chi)|^p d\chi\leq c\|V(x,\cdot)\|^p_{W_p^\ell(R^m)},$$

что согласно неравенству (2.27) при почти всех $x\in R^n$ не превосходит $c\|V(x,\cdot)\|^p_{W_p^\ell(R^m)}$. Итак, первая сумма в (2.33) не больше чем $cC\|V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}$. Используя (2.24) , получаем для второй суммы (2.33) мажоранту

$$c C \| y \|_{L_\infty} \sum_{j=0}^{[\ell]} \left(\int_{R^{n+m}} |(\nabla_{j,y} V)(z)|^p |y|^{(j-\ell)p} dz \right)^{1/p},$$

которая в силу неравенства (2.27) не превосходит $cC\|y\|_{L_\infty} \|V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}$.

Для того чтобы получить оценку величины

$$\left(\int_{R^m} dy \int_{R^n} dx \int_{R^n} |\nabla_{[\ell],x} \big((\Gamma_* V)(x+h,y) - (\Gamma_* V)(x,y) \big)|^p |h|^{-n-p\{\ell\}} dh \right)^{1/p}, \tag{2.34}$$

достаточно оценить интегралы

$$\int_{R^m} dy \int_{R^n} |(\nabla_{j,x} V(x,y)|^p \int_{R^n} |\nabla_{[\ell]-j,x} (\Gamma_*(x+h,y) - \Gamma_*(x,y))|^p |h|^{-n-p\{\ell\}} dh dx,$$

$$\int_{R^m} dy \int_{R^n} |(\nabla_{[\ell]-j,x} \Gamma_*)(x,y)|^p \int_{R^n} |\nabla_{j,x} (V(x+h,y) - V(x,y))|^p |h|^{-n-p\{\ell\}} dh dx.$$

Первый из них оценивается с помощью леммы 2.3 и неравенства (2.27) величиной $c\left(C\|y\|_{L_\infty} \|V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}\right)^p$. Второй интеграл не превосходит

$$cC^p \|y\|_{L_\infty}^p \int_{R^n} dx \int_{R^n} |h|^{-n-p\{\ell\}} \int_{R^m} |y|^{(j-[\ell])p} |\nabla_{j,x} (V(x+h,y) - V(x,y))|^p dy dh \leqslant$$

$$\leqslant cC^p \|y\|_{L_\infty}^p \int_{R^n} dx \int_{R^n} |h|^{-n-p\{\ell\}} \int_{R^m} |\nabla_{[\ell],x} (V(x+h,y) - V(x,y))|^p dy dh \leqslant$$

$$\leqslant c\left(C\|y\|_{L_\infty} \|V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}\right)^p.$$

Здесь мы воспользовались неравенством (2.27) и соотношением (2.29). Неравенство (2.31) доказано.

Полагая в (2.30) $y=1$, $\Gamma_*=1$, получаем оценку $\|\mathcal{E}\vec{\varphi}\|_{W_p^\ell(R^{n+m})} \leqslant \leqslant c\|U\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}$, которая вместе с (2.31) и равенством $V = U - \mathcal{E}\vec{\varphi}$ показывает, что

$$\|\Gamma_* V\|_{W_p^\ell(R^{n+m})} \leqslant cC\|y\|_{L_\infty} \|U\|_{W_p^\ell(R^{n+m})}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2.2. Очевидные изменения в доказательстве теоремы 2.5 приводят к следующему результату.

Теорема 2.7. Если $\gamma\in ML_p^{\ell-m/p}(R^n)$, $m+n>\ell p>m$, $\ell-m/p$ - дробное, $1\leq p<\infty$, то $\Gamma_*\in ML_p^{\ell}(R^{n+m})$ и справедлива оценка

$$\|\Gamma_*\|_{ML_p^{\ell}(R^{n+m})}\leq c\,C\,\|\gamma\|_{ML_p^{\ell-m/p}(R^n)}.$$

§ 3. Мультипликаторы в пространстве B_p^{ℓ}

3.1. Вспомогательные утверждения.

Представим произвольное положительное число ℓ в виде $\ell=\kappa+\alpha$, где $\alpha\in(0,1]$, а κ - целое неотрицательное число. Введем функцию

$$(C_\ell u)(x)=\left(\int|\nabla_\kappa u(x+2h)-2\nabla_\kappa u(x+h)+\nabla_\kappa u(x)|^p|h|^{-n-p\alpha}dh\right)^{1/p}$$

и обозначим через $B_p^\ell=B_p^\ell(R^n)$ пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|C_\ell u\|_{L_p}+\|u\|_{L_p}$. Пусть еще $B_{p,loc}^\ell=\{u: u\eta\in B_p^\ell,\ \forall\eta\in C_0^\infty(R^n)\}$. Дословно так же, как определялись пространство мультипликаторов MW_p^ℓ и емкость $cap(e,W_p^\ell)$, вводятся пространство MB_p^ℓ и емкость $cap(e,B_p^\ell)$. Здесь мы ограничимся случаем $p\in(1,\infty)$.

Как известно, при $\alpha\neq1$ пространства W_p^ℓ и B_p^ℓ совпадают по составу элементов и их нормы эквивалентны. Следовательно, если $\alpha\neq1$, то $MW_p^\ell=MB_p^\ell$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\sup_e\frac{\|D_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,W_p^\ell)]^{1/p}}\sim\sup_e\frac{\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}}. \qquad (3.1)$$

Соотношение (3.1) следует из оценок

$$(2-2^\alpha)D_\ell\gamma\leq C_\ell\gamma\leq(2+2^\alpha)D_\ell\gamma,$$

которые, в свою очередь, с очевидностью получаются из тождества

$$2[\varphi(x+h)-\varphi(x)]=-[\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)]+[\varphi(x+2h)-\varphi(x)]. \qquad (3.2)$$

Из (3.1) и теоремы 1.1 следует, что при $\alpha<1$

$$\|\gamma\|_{MB_p^\ell}\sim\sup_e\frac{\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}}+\|\gamma\|_{L_\infty}. \qquad (3.3)$$

В этом разделе показано, что то же соотношение верно при $\alpha=1$, т.е. при всех $\ell>0$.

Лемма 3.1. Для любой функции $u\in C_0^\infty(R^n)$ справедливо неравенство

$$\int_0^\infty cap\,(M_t, B_p^\ell)\,dt^p \leq c\,\|u\|^p_{B_p^\ell},$$

где $M_t = \{x \in R^n : |u(x)| \geq t\}$, $\ell > 0$, $p > 1$.

Доказательство. Положим $m=1$ или $m=2$ так, чтобы число $\ell + m/p$ было нецелым. Обозначим через U продолжение функции u на R^{n+m} из класса $C_0^\infty(R^n)$ такое, что

$$\|U\|_{W_p^{\ell+m/p}(R^{n+m})} \leq C\,\|u\|_{B_p^\ell(R^n)}. \tag{3.4}$$

Как показано в [5] ,

$$\int_0^\infty cap\Big(\{z : |U(z)| \geq t\}, W_p^{\ell+m/p}(R^{n+m})\Big)\,dt^p \leq c\,\|U\|^p_{W_p^{\ell+m/p}(R^{n+m})}. \tag{3.5}$$

Так как последняя емкость мажорирует $c\,cap\,(M_t, B_p^\ell)$, то из (3.4) и (3.5) следует утверждение леммы.

Отсюда получаем очевидное

Следствие 3.1 . Пусть μ -мера в R^n . Точная константа C в неравенстве

$$\int |u|^p d\mu \leq C\,\|u\|^p_{B_p^\ell}, \quad u \in C_0^\infty(R^n),$$

эквивалентна величине

$$\sup_e \frac{\mu(e)}{cap\,(e, B_p^\ell)},$$

где e - произвольный компакт положительной емкости $cap(e, B_p^\ell)$.

Сформулируем леммы 3.2 - 3.4, аналогичные леммам 1.3 - 1.6 и доказываемые точно так же, с той разницей, что в их доказательствах роль пространства W_p^ℓ играет B_p^ℓ и вместо леммы 1.2 используется следствие 3.1.

Лемма 3.2. Пусть $0 < \lambda < \mu$ и $\varphi \in L_{p\mu, loc}$, $\varphi \geq 0$. Тогда

$$\sup_e \left(\frac{\int_e \varphi(x)^{\lambda p} dx}{cap\,(e, B_p^\lambda)} \right)^{1/\lambda} \leq c \sup_e \left(\frac{\int_e \varphi(x)^{\mu p} dx}{cap\,(e, B_p^\mu)} \right)^{1/\mu}.$$

Лемма 3.3. Пусть γ_ρ - усреднение $\gamma \in B^\ell_{p,loc}(R^n)$ с радиусом ρ . Справедливо неравенство

$$\sup_e \frac{\|C_\ell \gamma_p\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, B_p^\ell)]^{1/p}} \le c \sup_e \frac{\|C_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, B_p^\ell)]^{1/p}} .$$

Лемма 3.4. Справедливы неравенства

$$\|\gamma_p\|_{MB_p^\ell} \le \|\gamma\|_{MB_p^\ell} \le \varliminf_{p \to 0} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell} .$$

Лемма 3.5. Пусть $u \in C_0^\infty(R^n)$ и σ- измеримая функция в R^n. Тогда

$$\iint |\Delta_h \sigma(x) \Delta_h u(x)|^p |h|^{-n-p} dh dx \le c \sup_e \frac{\|D_\delta \sigma\|^p_{L_p(e)}}{\mathrm{cap}(e, W_p^{\kappa-1+\delta})} \|u\|^p_{B_p^\kappa} , \qquad (3.6)$$

где $\kappa = 1, 2, \ldots$ и $\delta \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть $U \in C_0^\infty(R^{n+m})$ - продолжение функции u на R^{n+m}, где m таково, что $\kappa < n + m/p'$. Обозначим через f функцию $\Lambda^{\kappa+m/p} U$, где $\Lambda = (-\Delta + E)^{1/p}$, Δ - оператор Лапласа в R^{n+m} .Тогда

$$u(x) = \int_{R^{n+m}} g_{\kappa+m/p}(x-\xi, \eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta .$$

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{(\xi,\eta) : 4|h| < |x-\xi| + |\eta| < 1\}$,

$$\mathfrak{M}_2 = \{(\xi,\eta) : |x-\xi| + |\eta| < \min(1, 4|h|)\},$$

$$\mathfrak{M}_3 = \{(\xi,\eta) : |x-\xi| + |\eta| > \max(1, 4|h|)\},$$

$$\mathfrak{M}_4 = \{(\xi,\eta) : 4|h| > |x-\xi| + |\eta| > 1\} .$$

Ясно, что

$$|\Delta_h u(x)| \le \int_{R^{n+m}} |g_{\kappa+m/p}(x+h-\xi, \eta) - g_{\kappa+m/p}(x-\xi, \eta)| |f(\xi,\eta)| d\xi d\eta .$$

Представим последний интеграл в виде суммы четырех интегралов по $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_4$. Имеем

$$\int_{\mathfrak{M}_1} \le c|h| \int_{\mathfrak{M}_1} t_\theta^{-(n-\kappa+1+m/p')} |f(\xi,\eta)| d\xi d\eta ,$$

где $t_\theta = \sqrt{(x+\theta h-\xi)^2 + \eta^2}$, . $\theta \in (0,1)$. Ясно, что $t_\theta \ge c\sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}$ на множестве $\mathfrak{M}_1$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_1} \le c|h|^{1-\delta} \int\limits_{\mathfrak{M}_1} t_0^{-(n-k+1+m/p'-\delta)} |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \le$$

$$\le c|h|^{1-\delta} \left(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)} |f|\right)(x,0). \tag{3.7}$$

Для интеграла по $\mathfrak{M}_2$ получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_2} \le \int\limits_{\mathfrak{M}_2} \left(t_1^{-(n-k+m/p')} + t_0^{-(n-k+m/p')}\right) |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \le$$

$$\le c|h|^{1-\delta} \int\limits_{\mathfrak{M}_2} \left(t_1^{-(n-k+m/p'+1-\delta)} + t_0^{-(n-k+m/p'+1-\delta)}\right) |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_2} \le c|h|^{1-\delta} \left[\left(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)} |f|\right)(x+h,0) + \left(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)} |f|\right)(x,0)\right].$$

Используя асимптотику (1.3) , выводим оценку

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_3} \le c|h| \int\limits_{\mathfrak{M}_3} e^{-t_0/2} |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_3} \le c|h|^{1-\delta} \int\limits_{\mathfrak{M}_3} t_0^{(k-n-m/p'-1+\delta)/2} e^{-t_0/4} |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \le$$

$$\le c|h|^{1-\delta} \left(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)} |F|\right)\left(\frac{x}{4}, 0\right), \tag{3.8}$$

где $F(\xi,\eta) = f(4\xi, 4\eta)$. Аналогично

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_4} \le c \int\limits_{\mathfrak{M}_4} \left(e^{-t_1/2} + e^{-t_0/2}\right) |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta \le$$

$$\le c|h|^{1-\delta} \int\limits_{\mathfrak{M}_4} \left[t_1^{(k-n-m/p'-1+\delta)/2} e^{-t_1/4} + t_0^{(k-n-m/p'-1+\delta)/2} e^{-t_0/4}\right] |f(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta,$$

и поэтому

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_4} \leq c|h|^{1-\delta}\left[(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)\left(\frac{x+h}{4},0\right)+(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)\left(\frac{x}{4},0\right)\right]. \quad (3.9)$$

Складывая оценки (3.7) - (3.9) и замечая, что $g_r(az) \geq g_r(z)$ при $a<1$, получаем оценку

$$|\Delta_h u(x)| \leq c|h|^{1-\delta}\left[(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)\left(\frac{x+h}{4},0\right)+(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)\left(\frac{x}{4},0\right)\right].$$

Отсюда

$$\iint |\Delta_h v(x)\Delta_h u(x)|^p |h|^{-n-p} dh\,dx \leq$$

$$\leq c\int\left[(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)\left(\frac{x}{4},0\right)\right]^p \int |\Delta_h v(x)|^p |h|^{-n-p\delta} dh\,dx =$$

$$= c_1\int\left[(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)(x,0)\right]^p \int |\Delta_h v(4x)|^p |h|^{-n-p\delta} dh\,dx.$$

Лемма 1.2 дает

$$\iint |\Delta_h v(x)\Delta_h u(x)|^p |h|^{-n-p} dh\,dx \leq c\sup_e \frac{\int\limits_e\int |\Delta_h v(4x)|^p |h|^{-n-p\delta} dh\,dx}{cap(e, W_p^{k-1+\delta})} \times$$

$$\times \|(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)(\cdot,0)\|^p_{W_p^{k-1+\delta}}. \quad (3.10)$$

Ясно, что

$$\int\limits_e\int |\Delta_h v(4x)|^p |h|^{-n-p\delta} dh\,dx = c\int\limits_{4e}\int |\Delta_h v(x)|^p |h|^{-n-p\delta} dh\,dx, \quad (3.11)$$

$$cap(e, W_p^{k-1+\delta}) \geq c\,cap(4e, W_p^{k-1+\delta}), \quad (3.12)$$

где $4e = \{x : x/4 \in e\}$. Заметим еще, что

$$\|(\Lambda^{-(k-1+m/p+\delta)}|F|)(\cdot,0)\|_{W_p^{k-1+\delta}} \leq$$

$$\leq \|F\|_{L_p(\dot{R}^{n+m})} = 4^{-(n+m)}\|f\|_{L_p(R^{n+m})} = 4^{-(n+m)}\|\Lambda^{k+m/p}U\|_{L_p(R^{n+m})}.$$

Отсюда и из (3.10) - (3.12) следует оценка

$$\iint|\Delta_h v(x)\Delta_h u(x)|^p|h|^{-n-p}\,dhdx \le c\sup_e \frac{\|D_\delta v\|^p_{L_p(e)}}{\operatorname{cap}(e, W_p^{k-l+\delta})}\|\Lambda^{k+m/p}U\|_{L_p(R^{n+m})}.$$

Минимизируя последнюю норму по всем продолжениям U, заканчиваем доказательство.

3.2. Характеристика мультипликаторов в B_p^ℓ.

Лемма 3.6. Пусть $\gamma \in MB_p^\ell$, где ℓ - положительное число. Тогда $\gamma \in L_\infty \cap B_{p,loc}^\ell$, справедливо неравенство

$$\|\gamma\|_{MB_p^\sigma} \le c\|\gamma\|^{1-\sigma/\ell}_{L_\infty}\|\gamma\|^{\sigma/\ell}_{MB_p^\ell}, \quad 0<\sigma<\ell, \tag{3.13}$$

а также неравенство

$$\sup_e \frac{\|C_\sigma\gamma\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e, B_p^\sigma)]^{1/p}} \le c\|\gamma\|^{1-\sigma/\ell}_{L_\infty}\|\gamma\|^{\sigma/\ell}_{MB_p^\ell}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Принадлежность γ пространству L_∞ доказывается так же, как в лемме 1.6, а включение $\gamma \in B_{p,loc}^\ell$ очевидно.

1°. Пусть $\ell = 1$. Непосредственно проверяется тождество

$$\Delta_h^{(2)}(\gamma_\rho u) = \gamma_\rho\Delta_h^{(2)}u + u\Delta_h^{(2)}\gamma_\rho + \Delta_{2h}\gamma_\rho\Delta_{2h}u - 2\Delta_h\gamma_\rho\Delta_h u, \tag{3.15}$$

где γ_ρ - усреднение γ с радиусом усреднения ρ. Поэтому

$$\|uC_1\gamma_\rho\|_{L_p} \le \|\gamma_\rho u\|_{B_p^1} + \|\gamma_\rho C_1 u\|_{L_p} +$$

$$+\left(\iint|\Delta_{2h}\gamma_\rho(x)\Delta_{2h}u(x)|^p|h|^{-n-p}dhdx\right)^{1/p} + 2\left(\iint|\Delta_h\gamma_\rho(x)\Delta_h u|^p|h|^{-n-p}dhdx\right)^{1/p} \le$$

$$\le \|\gamma_\rho u\|_{B_p^1} + \|\gamma_\rho C_1 u\|_{L_p} + 4\left(\iint|\Delta_h\gamma_\rho(x)\Delta_h u(x)|^p|h|^{-n-p}dhdx\right)^{1/p}.$$

Применяя лемму 3.5 и оценку $\|\gamma_\rho\|_{L_\infty} \le \|\gamma_\rho\|_{MB_p^1}$, получаем

$$\|uC_1\gamma_\rho\|_{L_p} \le c\left(\|\gamma_\rho\|_{MB_p^1} + \sup_e \frac{\|D_\sigma\gamma_\rho\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e, W_p^\sigma)]^{1/p}}\right)\|u\|_{B_p^1}, \quad 0<\sigma<1.$$

Отсюда и из теоремы 1.1 следует оценка

$$\sup_{e} \frac{\| C_1 \gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e, B_p^1)]^{1/p}} \le c \left(\|\gamma_\rho\|_{MB_p^1} + \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\sigma} \right). \tag{3.16}$$

Так как $MW_p^\sigma = MB_p^\sigma$ и семейство пространств B_p^s образует интерполяционную шкалу, то

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^\sigma} \le \|\gamma_\rho\|_{B_p^1}^{\frac{\sigma-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\varepsilon}^{\frac{1-\sigma}{1-\varepsilon}}, \qquad 0<\varepsilon<\sigma,$$

что вместе с неравенством (1.23) дает оценку

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^\sigma} \le \|\gamma_\rho\|_{MB_p^1}^{\frac{\sigma-\varepsilon}{1-\varepsilon}} \|\gamma_\rho\|_{MW_p^\varepsilon}^{\frac{\varepsilon(1-\sigma)}{\sigma(1-\varepsilon)}} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{\frac{(\sigma-\varepsilon)(1-\sigma)}{\sigma(1-\varepsilon)}}.$$

Иначе говоря,

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^\sigma} \le \|\gamma_\rho\|_{MB_p^1}^{\sigma} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{1-\sigma}. \tag{3.17}$$

Отсюда и из (3.1) следует

$$\sup_{e} \frac{\| C_1 \gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e, B_p^1)]^{1/p}} \le c \|\gamma_\rho\|_{MB_p^1}. \tag{3.18}$$

Применяя лемму 3.4 , получаем из (3.17) неравенство (3.13) для $\ell=1$ и из (3.18) оценку

$$\varlimsup_{\rho\to+0} \sup_{e} \frac{\| C_1 \gamma_\rho \|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e, B_p^1)]^{1/p}} \le c \|\gamma\|_{MB_p^1}.$$

Замечая, что $\|C_1(\gamma_\rho-\gamma)\|_{L_p(R^n)} \to 0$ при $\rho\to+0$, приходим к неравенству (3.14) при $\sigma=\ell=1$. Неравенство (3.14) для дробных σ и $\ell=1$ вытекает из (3.17) и соотношения (3.3) .

2°. Пусть лемма доказана для всех целых положительных чисел, не превосходящих $\ell-1$. В силу тождества (3.15) имеем

$$\|u C_\ell \gamma_\rho\|_{L_p(e)} \le \|\gamma_\rho u\|_{B_p^\ell} + c \sum_{|\alpha|+|\beta|=\ell-1} \|C_1(\mathcal{D}^\alpha \gamma_\rho \mathcal{D}^\beta u)\|_{L_p} +$$

$$+ \| \nabla_{\ell-1} \gamma_\rho C_1 u\|_{L_p} + 4 \left(\iint |\Delta_h \nabla_{\ell-1} \gamma_\rho(x)| |\Delta_h u(x)|^p |h|^{-n-p} dh\, dx \right)^{1/p}.$$

Еще раз применяя (3.15), отсюда получаем

$$\|uC_\ell\gamma_\rho\|_{L_p} \le \|\gamma_\rho u\|_{B_p^\ell} + c\sum_{j=0}^{\ell-1}\|\,|\nabla_j\gamma_\rho|C_{\ell-j}u\|_{L_p} +$$

$$+c\sum_{j=1}^{\ell-1}\|\,|\nabla_j u|C_{\ell-j}\gamma_\rho\|_{L_p} + c\sum_{j=0}^{\ell-1}\left(\iint|\Delta_h\nabla_j\gamma_\rho(x)|^p|\Delta_h\nabla_{\ell-1-j}u|^p|h|^{-n-p}dh\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.19}$$

Пусть $\psi = \Lambda^j u$, где $\Lambda = (-\Delta + E)^{1/2}$. Тогда

$$(C_{\ell-j}u)(x) = (C_{\ell-j}J_j^{(n)}\psi)(x) = \Big(\int\Big|\int\big[g_j(x-\xi+2h) - 2g_j(x-\xi+h) +$$

$$+g_j(x-\xi)\big]\nabla_{\ell-1-j}\psi(\xi)d\xi\Big|^p|h|^{-n-p}dh\Big)^{1/p} =$$

$$=\Big(\int\Big|\int g_j(x-\xi)\big(\nabla_{\ell-1-j}\psi(\xi+2h) - 2\nabla_{\ell-1-j}\psi(\xi+h) + \nabla_{\ell-1-j}\psi(\xi)\big)d\xi\Big|^p|h|^{-n-p}dh\Big)^{1/p}.$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$(C_{\ell-j}u)(x) \le (J_j^{(n)}C_{\ell-j}\Lambda^j u)(x).$$

Отсюда и из леммы 1.2 выводим оценку

$$\|\,|\nabla_j\gamma_\rho|C_{\ell-j}u\|_{L_p} \le c\sup_e\frac{\|\nabla_j\gamma_\rho\|_{L_p(e)}}{[\operatorname{cap}(e,W_p^j)]^{1/p}}\|C_{\ell-j}\Lambda^j u\|_{L_p}. \tag{3.20}$$

Как известно [9, 10],

$$\|C_{\ell-j}\Lambda^j u\|_{L_p} \le c\|u\|_{B_p^\ell}. \tag{3.21}$$

Так как семейство пространств B_p^σ образует интерполяционную шкалу и $W_p^{j+\varepsilon} = B_p^{j+\varepsilon}$ при $\varepsilon\in(0,1)$, то

$$\|\gamma_\rho\|_{MW_p^{j+\varepsilon}} \le c\|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j+\varepsilon-1}{\ell-1}}\|\gamma_\rho\|_{MB_p^1}^{\frac{\ell-j-\varepsilon}{\ell-1}}, \tag{3.22}$$

$$\|\gamma_\rho\|_{MB_p^1} \le \|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell}^{\frac{1-\sigma}{\ell-\sigma}}\|\gamma_\rho\|_{MB_p^\sigma}^{\frac{\ell-1}{\ell-\sigma}}. \tag{3.23}$$

Объединяя (3.17) и (3.23), получаем, что

$$\|\gamma_p\|_{MB_p^1} \le \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{1/\ell} \|\gamma_p\|_{L_\infty}^{(\ell-1)/\ell} .$$

Подставляя последнее неравенство в (3.22), приходим к неравенству

$$\|\gamma_p\|_{MW_p^{j+\varepsilon}} \le c\,\|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j+\varepsilon}{\ell}} \|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j-\varepsilon}{\ell}} . \qquad (3.24)$$

Применяя (1.19), выводим

$$\sup_e \frac{\|\nabla_j \gamma_p\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^j)]^{1/p}} \le c\,\|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\varepsilon}{j+\varepsilon}} \|\gamma_p\|_{MB_p^{j+\varepsilon}}^{\frac{j}{j+\varepsilon}} ,$$

что вместе с (3.24) дает

$$\sup_e \frac{\|\nabla_j \gamma_p\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^j)]^{1/p}} \le c\,\|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j}{\ell}} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j}{\ell}} .$$

Отсюда и из (3.20), (3.21) следует оценка

$$\|\,|\nabla_j \gamma_p|\, C_{\ell-j}\, u\|_{L_p} \le c\,\|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j}{\ell}} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j}{\ell}} \|u\|_{B_p^\ell} . \qquad (3.25)$$

Применяя следствие 3.1, получаем

$$\|\,|\nabla_j u|\, C_{\ell-j}\gamma_p\|_{L_p} \le c \sup_e \frac{\|C_{\ell-j}\gamma_p\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, B_p^{\ell-j})]^{1/p}} \|u\|_{B_p^\ell} , \quad 1 \le j \le \ell-1.$$

Отсюда и из индукционного предположения заключаем

$$\|\,|\nabla_j u|\, C_{\ell-j}\gamma_p\|_{L_p} \le c\,\|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{j}{\ell}} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{\ell-j}{\ell}} \|u\|_{B_p^\ell} . \qquad (3.26)$$

Для оценки третьей суммы в правой части (3.19) воспользуемся леммой 3.5 при $k=1+j$ и $\delta=\varepsilon$. Имеем

$$\left(\iint |\Delta_h \nabla_j \gamma_p(x)|^p |\Delta_h \nabla_{\ell-1-j} u|^p |h|^{-n-p} dh\,dx\right)^{1/p} \le c \sup_e \frac{\|D_{j+\varepsilon}\gamma_p\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^{j+\varepsilon})]^{1/p}} \|u\|_{B_p^\ell} .$$

Из (3.24) и теоремы 1.1 следует, что правая часть не превосходит

$$c\,\|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j+\varepsilon}{\ell}} \|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j-\varepsilon}{\ell}} \|u\|_{B_p^\ell} .$$

Объединяя эту оценку с (3.25) и (3.26), выводим из (3.19), что

$$\|uC_\ell \gamma_\rho\|_{L_p} \le c\Big(\|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{j/\ell} \|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell}^{(\ell-j)/\ell} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\ell-1} \|\gamma_\rho\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j-\varepsilon}{\ell}} \|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j+\varepsilon}{\ell}} \Big)\|u\|_{B_p^\ell}.$$

Следовательно,

$$\sup_e \frac{\|C_\ell \gamma_\rho\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}} \le c\|\gamma_\rho\|_{MB_p^\ell}. \tag{3.27}$$

Положим в (3.24) $j+\varepsilon=\sigma$ и воспользуемся последним неравенством при $\ell=\sigma$. Тогда для всех $\sigma\in(0,\ell]$ получим оценки (3.13), (3.14) для функции γ_ρ. Применяя лемму 3.4 и сходимость $C_\ell\gamma_\rho$ к $C_\ell\gamma$ в $L_p(R^n)$, заканчиваем доказательство неравенств (3.13), (3.14) для целых ℓ.

3°. Пусть ℓ - положительное дробное число. Если σ - также дробное число, $\sigma<\ell$, то неравенства (3.13), (3.14) следуют из совпадения пространств MW_p^ℓ и MB_p^ℓ и соотношения (3.1). Если σ -целое число, то для любого $\varepsilon\in(0,1)$, $\varepsilon<\ell-\sigma$, имеем $MB_p^{\sigma+\varepsilon}=MW_p^{\sigma+\varepsilon}$, откуда

$$\|\gamma\|_{MB_p^\sigma} \le c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}} \|\gamma\|_{MB_p^{\sigma+\varepsilon}}^{\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}} \le c\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-\frac{\sigma}{\ell}} \|\gamma\|_{MB_p^\ell}^{\frac{\sigma}{\ell}}.$$

Неравенство (3.13) при дробных ℓ доказано.

Применяя лемму 3.4 и сходимость $C_\ell\gamma_\rho$ к $C_\ell\gamma$ в $L_p(R^n)$ из неравенства (3.27) при $\ell=\sigma$ получаем

$$\sup_e \frac{\|C_\sigma\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\sigma)]^{1/p}} \le c\|\gamma\|_{B_p^\sigma},$$

что вместе с (3.13) дает (3.14) при целых σ и дробных ℓ. Лемма доказана.

Лемма 3.7. <u>Пусть</u> ℓ - <u>целое положительное число</u>, $\gamma\in L_\infty\cap B_{p,loc}^\ell$ <u>и</u>

$$\sup_e \frac{\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}} < \infty.$$

<u>Тогда</u> $\gamma\in MB_p^\ell$ <u>и справедливо неравенство</u>

$$\|\gamma\|_{MB_p^\ell} \le c\Big(\|\gamma\|_{L_\infty} + \sup_e \frac{\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}}\Big). \tag{3.28}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы

3.6, покажем, что

$$\|\gamma_p u\|_{B_p^\ell} \le c\Big(\sum_{j=0}^{\ell-1}\| |\nabla_j \gamma_p| C_{\ell-j} u\|_{L_p} + \sum_{j=0}^{\ell-1}\| |\nabla_j u| C_{\ell-j}\gamma_p\|_{L_p} +$$
$$+\sum_{j=0}^{\ell-1}\Big(\iint |\Delta_h \nabla_j \gamma_p(x)|^p |\Delta_h \nabla_{\ell-1-j} u|^p |h|^{-n-p} dh dx\Big)^{1/p}\Big).$$

Каждое из слагаемых правой части было оценено в доказательстве предыдущей леммы. Поэтому

$$\|\gamma_p u\|_{B_p^\ell} \le c\sum_{j=0}^{\ell-1}\Big(\|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{j}{\ell}} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{\ell-j}{\ell}} + \|\gamma_p\|_{L_\infty}^{\frac{\ell-j-\varepsilon}{\ell}} \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}^{\frac{j+\varepsilon}{\ell}}\Big)\|u\|_{B_p^\ell},$$

где $\varepsilon\in(0,1)$. Замечая, что $\|\gamma_p\|_{L_\infty} < \|\gamma_p\|_{MB_p^\ell}$, и ссылаясь на леммы 3.3, 3.4, заканчиваем доказательство.

Объединяя утверждения лемм 3.6, 3.7, приходим к основному результату этого раздела.

Теорема 3.1. 1) Функция γ принадлежит пространству MB_p^ℓ в том и только том случае, если $\gamma\in L_\infty\cap B^\ell_{p,loc}$ и для любого компакта $e\subset R^n$

$$\|C_\ell \gamma\|^p_{L_p(e)} < const\ cap(e, B_p^\ell).$$

2) Имеет место соотношение

$$\|\gamma\|_{MB_p^\ell} \sim \sup_e \frac{\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)}}{[cap(e,B_p^\ell)]^{1/p}} + \|\gamma\|_{L_\infty}.$$

3) Если $\gamma\in MB_p^\ell$ и $\sigma\in(0,\ell)$, то $\gamma\in MB_p^\sigma$ и справедливо неравенство (3.13) .

3.3. Мультипликаторы в пространстве b_p^ℓ.

Определим пространство b_p^ℓ, $1<p<\infty$, $\ell>0$, как пополнение $C_0^\infty(R^n)$ по норме $\|C_\ell u\|_p$. Введем емкость $cap(e,b_p^\ell) = \inf\{\|C_\ell u\|_{L_p}: u\in C_0^\infty(R^n),\ u\ge 1$ на $e\}$. Пространство мультипликаторов в b_p^ℓ обозначим Mb_p^ℓ .

Теорема 3.2. 1) Функция γ принадлежит пространству Mb_p^ℓ, $p\ell<n$, в том и только том случае, если $\gamma\in L_\infty\cap B^\ell_{p,loc}$ и для всех компактов $e\subset R^n$

$$\|C_\ell\gamma\|_{L_p(e)} < const\ [cap(e,b_p^\ell)]^{1/p}. \tag{3.29}$$

2) Справедливо соотношение

$$\|\gamma\|_{MB_p^\ell} \sim \sup_e \frac{\|C_\ell \gamma\|_{L_p(e)}}{[\mathrm{cap}(e, B_p^\ell)]^{1/p}} + \|\gamma\|_{L_\infty}. \tag{3.30}$$

3) Если $\gamma \in MB_p^\ell$ и $\sigma \in (0,\ell)$, то $\gamma \in MB^\sigma$ и справедливо неравенство

$$\|\gamma\|_{MB_p^\sigma} \leq c\,\|\gamma\|_{L_\infty}^{1-\frac{\sigma}{\ell}} \|\gamma\|_{MB_p^\ell}^{\frac{\sigma}{\ell}}. \tag{3.31}$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in MB_p^\ell$. Принадлежность γ классу $B_{p,loc}^\ell$ очевидна. Поскольку

$$\|\gamma^N u\|_{L_{\frac{pn}{n-\ell p}}} \leq \left(c\|\gamma^N u\|_{B_p^\ell}\right)^{1/N} \leq \|\gamma\|_{MB_p^\ell}\left(c\|u\|_{B_p^\ell}\right)^{1/N},$$

то $\|\gamma\|_{L_\infty} \leq \|\gamma\|_{MB_p^\ell}$.

Оценка сверху величины (3.29) нормой в MB_p^ℓ проводится так же, как аналогичная оценка в случае пространства B_p^ℓ. Необходимо лишь в леммах 3.1-3.5 и следствии 3.1 заменить B_p^ℓ на b_p^ℓ, в доказательствах лемм 3.6, 3.7 применять потенциалы Рисса вместо потенциалов Бесселя, под оператором Λ понимать квадратный корень из $-\Delta$. Нижняя оценка величины (3.29) выводится так же, как аналогичная оценка в случае пространства L_p^ℓ в 1.7.

Литература

1. Strichartz R.S. Multipliers on fractional Sobolev spaces.- Journal of Math. and Mech., 1967, v. 16, № 9, p. 1031-1060.
2. Hedberg L.I. On certain convolution inequalities.- Proc.Amer.Math. Soc., 1972, v. 36, № 2, p. 505-510.
3. Мазья В.Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных. - В кн.: Проблемы матем. анализа, 1972, № 3, 33-68.
4. Adams D.R. On the existence of capacitary strong type estimates in R^n.- Ark.mat., 1976, v. 14, № 1, p. 125-140.
5. Мазья В.Г. О емкостных оценках сильного типа для "дробных" норм.- Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.матем.ин-та АН СССР, 1977, т.70, с.161-168.

6. Лизоркин П.И. Граничные свойства функций из "весовых классов"-Докл. АН СССР, 1960, т.132, № 3, с.514-517.
7. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов.-Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1961, т.60, с.282-303.
8. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О.О мультипликаторах в пространствах функций с дробными производными.- Докл.АН СССР,1979, т.244,№5,с.1065-1068.
9. Aronszajn N., Mulla F., Szeptycky P. On spaces of potentials connected with L^p classes.- Ann.Inst.Fourier, 1963, v. 13, f. 2, p.211--306.
10. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. - 342с.
11. Meyers N.G. A theory of capacities for potentials of functions in Lebesque classes.- Math.Scand., 1970, v. 26, f.2, p.255-292.
12. Мазья В.Г., Хавин В.П. Нелинейная теория потенциала.- Успехи мат. наук, 1972, т.27, №6, с.67-138.
13. Polking J.C. A Leibnitz formula for some differentiation operators of fractional order.- Indiana Univ.Math.Journal, 1972, v. 21, № 11, p. 1019-1030.
14. Stein E.M. The characterization of functions arising as potentials. II.- Bull.Amer.Math.Soc., 1962, v. 68,№ 6, p.577-582.
15. Агмон С.,Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ., 1962.- 205с.
16. Triebel H. Multiplication properties of Besov spaces.- Annali di Matem.Pura ed Appl., 1977, t. 114, p.87-102.
17. Triebel H. Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type, Teubner- Texte zur Mathematik, Leipzig, 1978.
18. Hirschman I.I. Multiplier transformations. II.- Duke Math.Journ., 1961, v. 28, № 1, p.45-56.
19. Hirschman I.I. Multiplier transformations. III.- Proc.Amer.Math. Soc., 1962, v. 13, № 6, p. 851-857.