УДК 517.54 : 517.514

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $B^{\ell}_{p,\theta}$ ЧЕРЕЗ КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ГРАНИЦЫ

В.М.Гольдштейн (Новосибирск)

В этой работе мы продолжим исследования [1-3] условий на границу, при которых возможно продолжение функций через границу с сохранением класса. Предлагаемый метод связан с использованием емкости, квазиконформных и квазиизометрических отображений. На этом пути были получены необходимые и достаточные условия продолжения для функций классов W^{1}_{2}, L^{1}_{2}, $B^{2/3}_{3}$ из плоских односвязных областей.

Мы покажем, что выбор класса, для которого можно получить необходимые и достаточные условия продолжения фактически зависят только от емкости, индуцируемой этим классом.

С вопросом о продолжении тесно связан вопрос о полном описании гомеоморфизмов, сохраняющих пространство функций. При изучении классов $B^{\ell}_{p,\theta}$ задача продолжения и задача описания полного класса гомеоморфизмов, сохраняющих пространство, или, как мы ее будем называть дальше, задача о замене переменных, поменялись местами. Имеется в виду (см.[1]), что при изучении пространств L^{1}_{p} теорема о замене переменной была использована для доказательства достаточности в теореме продолжения. В пространствах $B^{\ell}_{p,\theta}$ в тех случаях, когда задачу о замене переменной удается решить, при ее решении используется теорема о продолжении. Технически это связано с более сложным характером норм в $B^{\ell}_{p,\theta}$.

Вопрос о продолжении функций из пространств W^{ℓ}_{p} с сохранением класса рассматривали для областей с достаточно гладкой границей С.Н.Никольский [4] и В.М.Бабич [5], а для областей с липшицевой границей А.П. Кальдерон [6], Ю.К.Солнцев [7], К.Т.Смит [8], С.В.Бесов и В.П.Ильин [9-11], В.И.Буренков [12,19] и др. Подробную библиографию и историю вопроса можно найти в цитированных выше работах.

Отметим также, что необходимые и достаточные условия продолжения функций класса BV получили Ю.Д.Бураго и В.Г.Мазья [14].

Результаты статьи распадаются на три части: в первой - изучается продолжение функций класса B_p^ℓ $(\ell<1,\ p>1)$ через границу плоской односвязной области, при условии, что граница является квазиконформной окружностью, т.е. удовлетворяет геометрическому условию (условию Альфорса) *), приводимому ниже; во-второй - показывается, что это же условие является необходимым в случае $B^\ell_{p,\theta}, \ell p=2$; третья часть посвящена применению теорем продолжения для изучения задачи о замене переменных.

§ 1. Предварительные сведения о квазиконформных гомеоморфизмах. Условие Альфорса и квазиизометрии

1.1. Гомеоморфизм φ области $G\subset R^n$ на область G' называется квазиконформным, если величина

$$q_\varphi(x_0)=\lim_{r\to 0}\frac{\sup\limits_{|x-x_0|=r}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|}{\inf\limits_{|x-x_0|=r}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|}$$

ограничена на G . Наименьшая из верхних границ $q_\varphi(x_0)$ называется метрическим коэффициентом искажения. Квазиконформный гомеоморфизм с коэффициентом искажения q будем называть q- квазиконформным.

Кривая γ называется квазиконформной окружностью(или просто квазиокружностью), если она является образом единичной окружности при некотором квазиконформном гомеоморфизме плоскости R^2 на себя.

Замкнутая жорданова кривая γ удовлетворяет условию Альфорса локально, если у любой точки $x_0\subset\gamma$ существует окрестность $V(x_0)$, в которой выполнено условие: любая тройка точек**) $\xi_1,\xi_2,\xi_3\subset\gamma\cap V(x_0)$ удовлетворлет неравенству $|\xi_1-\xi_3|\leqslant C|\xi_1-\xi_2|$.

Точка ξ_3 лежит между точками ξ_1 , ξ_2 на дуге $\gamma\cap V(x_0)$. Постоянная C не зависит от выбора точек $\xi_1,\xi_2,\xi_3\subset V(x_0)$ и выбора точки x_0 .

Теорема 1.1. <u>Для того чтобы замкнутая жорданова кривая была квазиокружностью, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Альфорса.</u>

Теорема непосредственно следует из теоремы 5 [15, с.71,77] и результатов статьи [16] .

1.2. Рассмотрим на плоскости круг $B(0,1)$ радиуса 1 с центром в точке 0 . Пусть j- инверсия относительно единичной окружности $S(0,1)$. Если

---

*) Класс областей, удовлетворяющих условию Альфорса, существенно шире класса $Lip\ 1$, для которого результат о продолжении известен.

**) Точнее, ξ_1,ξ_2,ξ_3 лежат на компоненте множества $\gamma\cap V(x_0)$, содержащей точку x_0 .

граница γ области G является квазиокружностью, то существует квазиконформный гомеоморфизм $\varphi: R^2 \to R^2$, отображающий $B(0,1)$ на область G. Тогда $\varphi \circ j \circ \varphi^{-1}$ является квазиконформным гомеоморфизмом, который переводит область G в область $\overline{R}^2 \setminus \overline{G}$ и оставляет точки кривой γ неподвижными. Мы будем говорить, что γ допускает квазиконформное отражение. Легко показать и обратное: если γ допускает квазиконформное отражение, то γ является квазиокружностью.

Введенное Л.Альфорсом [15, с.71] понятие квазиконформного отображения приводит к довольно неожиданной характеристике областей, границы которых являются квазиконформностями.

Теорема 1.2. Если существует q - квазиконформное отражение относительно замкнутой жордановой кривой γ, то существует также $C(q)$ - квазиконформное отражение, которое дифференцируемо и в некоторой окрестности кривой γ меняет евклидовы длины не более чем в $C(q)$ раз.

Теорема является аналогом леммы 3 [15, с.71] Альфорса и доказывается также.

Несколько вольной формулировке теоремы 1.2, копирующей формулировку Альфорса, можно придать более точный вид. Комбинацией теорем 1.1 и 1.2 получается следующая необходимая в дальнейшем

Теорема 1.3. Пусть граница области G будет жордановой кривой γ, удовлетворяющей локально условию Альфорса. Тогда существует дифференцируемый и квазиконформный в области G гомеоморфизм $\varphi: \overline{G} \to R^2 \setminus G$, оставляющий неподвижными точки границы. У границы γ существует такая окрестность $V(\gamma)$, что для любой пары точек $x, y \subset V(\gamma) \cap G$ справедливо неравенство

$$C^{-1} < \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|} < C.$$

Постоянная C не зависит от выбора точек $x, y \subset V(\gamma) \cap G$.

1.3. В случае неограниченной области условие Альфорса несколько упрощается.

Границу γ неограниченной области G назовем квазиконформной прямой, если γ является образом вещественной оси при некотором квазиконформном гомеоморфизме плоскости на себя.

Теорема 1.1$'$ (см. [15, с.71,77]). Для того чтобы кривая γ была квазиконформной прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная C такая, что для любых трех точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \subset \gamma$, из которых ξ_3 лежит между ξ_1 и ξ_2, справедливо

$$\left|\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\right|< C. \qquad (1)$$

Аналогично случаю ограниченной области определяется квазиконформное отражение.

Теорема 1.2$'$ (см. [15, с. 71]). Если существует q- квазиконформное отражение относительно неограниченной жордановой кривой γ, то существует также $C(q)$- квазиконформное отражение, которое дифференцируемо и меняет евклидовы длины не более чем в $C(q)$ раз.

Теорема 1.3$'$. Пусть граница γ неограниченной односвязной области G удовлетворяет условию Альфорса (условию (1) теоремы 1.1). Тогда существует гомеоморфизм $\varphi: G \to R^2 \setminus G$, квазиконформный, дифференцируемый в области G, оставляющий точки границы неподвижными и удовлетворяющий условию

$$P^{-1}(C) < \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|} < P(C)$$

для любых точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \subset \gamma$. Постоянная $P(C)$ зависит только от постоянной C в условии Альфорса.

Теорема 1.3 следует из теоремы 5 ([15, с.77]) и теоремы 1.2.

§ 2. Пространства $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$. Продолжение через квазиконформную границу

2.1. В обозначениях и определении классов $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ мы следуем монографии О.В.Бесова, В.П.Ильина, С.М.Никольского [17].

Будем использовать следующее обозначение конечной разности: для $x\in G$, $y \in R^n$

$$\Delta(y,G)f(x) = \begin{cases} f(x+y)-f(x) & \text{при } [x,x+y]\subset G, \\ 0 & \text{при } [x,x+y]\not\subset G. \end{cases}$$

Из различных способов определения пространства $B^{\ell}_{p,\theta}$ мы выберем технически наиболее удобный для этой статьи, учитывая, что для областей, в которых верна теорема продолжения, приводимая ниже нормировка $B^{\ell}_{p,\theta}$ эквивалентна стандартной [17, §18.6].

Определение $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$. Пространством $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ называется линейное нормированное пространство измеримых функций f, которые определены на области $G\subset R^n$ и для которых ограничена норма

$$\|f\|^{\ell}_{p,\theta,G,h} = \|f\|_{L_p(G)} + \left\{\int\limits_{|t|<h} \frac{\|\Delta(t,G)f\|^{\theta}_{L_p(G)}}{|t|^{\ell\theta+n}}\,dt\right\}^{1/\theta}.$$

Кроме пространства $B^{l}_{p,\theta}(G)$, мы будем рассматривать пространство $b^{l}_{p,\theta}(G)$ измеримых на области $G\subset R^{n}$ функций, для которых ограничена полунорма

$$\|f\|^{l}_{p,\theta,G,h} = \|f\|^{l}_{p,\theta,G,h} - \|f\|_{L_p(G)}.$$

Аналогично b^{l}_{p} будем обозначать через $B^{l}_{p}(G)$ пространство $B^{l}_{p,p}(G)$.

Введем еще два типа пространств: $\hat{B}^{l}_{p}(G)$, $\hat{b}^{l}_{p}(G)$.

Пусть

$$\hat{\Delta}(z,G)f(x)=\begin{cases} f(x+z)-f(x) & \text{при } x,x+z\in G;\\ 0 & \text{при } x \text{ или } x+z\notin G;\end{cases}$$

$$\|f\|_{\hat{B}^{l}_{p,G,\hat{h}}} = \|f\|^{l}_{p,G,\hat{h}} = \left\{\int\limits_{G}\ \int\limits_{dist_G(x,x+z)<\hat{h}} \frac{|\hat{\Delta}(z,G)f(x)|^{p}}{|z|^{lp+n}}\,dz\,dx\right\}^{1/p}.$$

При $G=R^{n}$ пространства $\hat{B}^{l}_{p}(G)=B^{l}_{p}(R^{n})$ и $\hat{b}^{l}_{p}(G)=b^{l}_{p}(G)$ *).

В случае областей с гладкой границей нормы $\|\cdot\|^{l}_{p,G,\hat{h}}$ эквивалентны при различных $\hat{h}$, то же [17] и для полунорм $\|\cdot\|^{l}_{p,G,\hat{h}}$. Числу $\hat{h}$ разрешается принимать значение ∞ (см. [17,18]).

Теорема 1. Пусть граница γ области $G\subset R^{2}$ является квазиокружностью. Тогда для всех $l<1$, $p>1$ существует линейный ограниченный оператор продолжения

$$\theta:\hat{B}^{l}_{p}(G)\to B^{l}_{p}(R^{2}),\qquad \theta u|_{G}=u.$$

Теорема 1'. Пусть граница γ области G является квазиконформной прямой. Тогда для всех $l<1$, $p>1$ существует линейный ограниченный оператор продолжения $\theta:\hat{b}^{l}_{p}(G)\to b^{l}_{p}(R^{2})$, $\theta u|_{G}=u$,

$$\|\theta u\|^{l}_{p,h,R^{2}}\le|\theta|_{h}\,\|u\|^{l}_{p,\hat{h},G}.$$

При этом норма $|\theta|_{h}$ оператора θ зависит только от h и γ. (Точнее, только от h и от постоянной C в условии Альфорса для кривой γ.)

Докажем сначала теорему 1'.

По теореме 1.3', существует гомеоморфизм $\varphi:R^{2}\setminus G\to\overline{G}$, квазиконформный, дифференцируемый в области $R^{2}\setminus G$ и оставляющий кривую γ неподвижной. При этом для любой пары точек $x,y\in G$ выполнено неравенство

$$D^{-1}(C)<\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|}<D(C), \tag{2}$$

где постоянная $D>0$ зависит только от постоянной C в условии Альфорса для кривой γ.

---

*) Здесь $dist_G(x,y)$ - это нижняя грань длин кривых, соединяющих точки x и y в области G.

Заметим также, что мера Лебега $m(\gamma)$ кривой γ равна нулю, так как γ является образом прямой при некотором квазиконформном гомеоморфизме φ из R^2 на себя. Квазиконформный гомеоморфизм переводит множество меры нуль в множество меры нуль.

Рассмотрим в R^2 функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in G, \\ f(\varphi(x)) \text{ при } x \notin G. \end{cases}$$

Нам нужно показать, что интеграл

$$IF = \int_{|t|<\hat{h}} \left(\int_{R^2} |\Delta(t,R^2)F(x)|^p dx \right) \frac{dt}{t^{\ell p+2}}$$

можно оценить через интеграл

$$If = \int_G \int_{dist(x,x+z)<\hat{h}} \frac{|\hat{\Delta}(z,G)(f(x)|^p}{|z|^{\ell p+2}} dz dx.$$

Сначала оценим разность

$$\Delta(z,R^2)F(x) = F(x+z) - F(x).$$

Выделим четыре ситуации:

а) $dist\,(x,\gamma) \geq \hat{h}$, $\quad x \in R^2 \setminus G$;

в) $dist\,(x,\gamma) \geq \hat{h}$, $\quad x \in G$;

с) $dist\,(x,\gamma) < \hat{h}$, $\quad x \in R^2 \setminus G$;

д) $dist\,(x,\gamma) < \hat{h}$, $\quad x \in G$.

В случае в) для $|z| < \hat{h}$ имеет место

$$\Delta(z,R^2)F(x) = f(x+z) - f(x),$$

по определению функции $F(x)$.

В случае а) справедливы равенства $F(x+z) = f(\varphi(x+z))$, $F(x) = f(\varphi(x))$, $\Delta(z,R^2)F(x) = f(\varphi(x+z)) - f(\varphi(x))$, и из (2) следует

$$\Delta(z,R^2)F(x) = f(\varphi(x) + \bar{z}(x)) - f(\varphi(x)) = \hat{\Delta}(\bar{z}(x),G)f(\varphi(x)),$$

$$P^{-1}|z| \leq dist_G(\varphi(x) + \bar{z}(x), \varphi(x)) \leq P|z|. \tag{3}$$

В случае с) отрезок α, соединяющий точки x и $x+z$, не обязан целиком лежать в области $R^2 \setminus G$.

Пусть $\hat{\alpha} = \alpha \cap [R^2 \setminus G]$. Тогда множество $(\alpha \setminus \hat{\alpha}) \cup \varphi(\hat{\alpha})$ будет кривой γ длины $\ell(\gamma) \in [P^{-1}|z|, P|z|]$. Кривая γ соединяет точки $\varphi(x+z)$ и $\varphi(x)$, если $x+z \in R^2 \setminus G$, или точки $x+z$ и $\varphi(x)$, если $x+z \in G$.

Так как

$P^{-1}|z| \leq \ell(y) \leq P\,|z|$, то $dist_G(\varphi(x+z), \varphi(x)) \leq P\,|z|$, если $x+z \in R^2 \setminus G$, и $dist_G(z+x, \varphi(x)) \leq P|z|$, если $x+z \in G$.

Пусть

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \in R^2 \setminus G, \\ x & \text{при } x \in G. \end{cases}$$

Отсюда

$$\Delta(z, R^2)F(x) = f(\hat{\varphi}(x+z)) - f(\hat{\varphi}(x)) =$$
$$= f(\hat{\varphi}(x) + \bar{z}(\bar{x})) - f(\bar{x}) = \hat{\Delta}(\bar{z}(\bar{x}), G)f(\bar{x}),\ \bar{x} = \hat{\varphi}(x),$$
$$P^{-1}|z| \leq dist_G(\bar{x} + \bar{z}(\bar{x}), \bar{x}) \leq P\,|z|. \tag{4}$$

Случай d) рассматривается аналогично, и оценка получается такая же, как и в (4) .

В интеграле IF поменяем пределы интегрирования

$$IF = \int\limits_{R^2} \int\limits_{|t|<\hat{h}} |\Delta(t, R^2)F(x)|^p \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}} . \tag{5}$$

Во внутреннем интеграле сделаем оценку в перечисленных выше четырех ситуациях:

в) если $x \in G_{\hat{h}}$, то

$$\int\limits_{|t|<\hat{h}} |\Delta(t, R^2)F(x)|^p \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}} = \int\limits_{|t|<\hat{h}} |\hat{\Delta}(t, G)f(x)|^p \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}}, \tag{6}$$

а) если $x \in (R^2 \setminus G)_{\hat{h}}$, то из (3)

$$\int\limits_{|t|<\hat{h}} |\Delta(t, R^2)F(x)|^p \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}} \leq \int\limits_{|t|<\hat{h}} \frac{|F(x+t) - F(x)|^p}{|t|^{\ell p+2}}\, dt =$$
$$= \int\limits_{|t|<\hat{h}} |f(\varphi(x+t)) - f(\varphi(x))|\ \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}} \leq$$
$$\leq M(P) \int\limits_{dist_G(\varphi(x)+z,\, \varphi(x)) < P\hat{h}} |f(\varphi(x)+z) - f(\varphi(x))|^p \frac{dz}{|z|^{\ell p+2}} . \tag{7}$$

Для случаев c) и d) оценка делается аналогично (8) .

Собирая оценки (6)(7) и соответствующие оценки для случаев c) и d) , окончательно получаем

$$\int\limits_G \int\limits_{|t|<\hat{h}} \frac{|\Delta(t,G)\ F(x)|^p}{|t|^{\ell p+2}}\, dt dx \leq M(P) \int\limits_G \int\limits_{dist_G(x, x+z) < P\hat{h}} \frac{|\hat{\Delta}(z,G)f(x)|^p}{|z|^{\ell p+2}}\, dz dx. \tag{8}$$

Заметим, что постоянная P зависит только от постоянной в условии Альфорса. Через $M(P)$ мы обозначаем любую постоянную, зависящую только от P .

Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что оценку следует начинать с интеграла

$$IF_{\frac{\hat{h}}{p}} = \int_G \left(\int_{|t|<\frac{\hat{h}}{p}} |\Delta(t, R^2) F(x)|^p dx \right) \frac{dt}{|t|^{\ell p+2}}. \tag{9}$$

Тогда из (8), (9) получаем, что

$$IF_{\frac{\hat{h}}{p}} \leq M(P) If.^{*)}$$

Для продолженной функции выбор h в индексе IF не имеет значения, так как нормы $\|\cdot\|^{\ell}_{p,\hat{h}}$ эквивалентны в R^2 при различных h, т.е. между интегралами IF_{h_1} и IF_{h_2} существуют двусторонние оценки.

Что и требовалось.

Доказательство теоремы 1. В этом случае рассмотрим вместо теоремы 1.3$'$ теорему 1.3. Пусть $V(\gamma)$ - та ограниченная окрестность квазиокружности γ, в которой существует гомеоморфизм $\varphi: V(\gamma) \cap (R^2 \setminus G) \xrightarrow{\gamma} G$, построенный в теореме 1.3. Тогда φ, квазиконформный и дифференцируемый в своей области определения, оставляет неподвижными точки γ. Кроме того, справедливо неравенство:

$$P^{-1} < \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|} < P$$

для всех $x, y \subset \gamma$. В этом случае P зависит не только от постоянной в условии Альфорса, но и от кривой γ. Для любой функции $f \in \hat{B}^{\ell}_p(G)$ продолжение строится так же, как и в теореме 1$'$, по формуле

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in G; \\ f(\varphi(x)) & \text{при } x \in \Omega \setminus G. \end{cases}$$

Здесь $\Omega = G \cup V(\gamma)$.

Нам нужно оценить два интеграла:

$$I_1 F = \int_\Omega |F(x)|^p dx, \qquad I_2 F = \left(\|F\|^{\ell}_{p,\hat{h},R^2} \right)^p.$$

Второй интеграл оценивается так же, как и в теореме 1$'$. Для первого интеграла из формулы замены переменной и из условия $m(\gamma) = 0$ получаем

$$\int_\Omega |F(x)|^p dx = \int_G |f(x)|^p dx + \int_{\Omega \setminus \bar{G}} |F(y)|^p dy =$$

$$= \|f\|^p_{L_p(G)} + \int_{\varphi(\Omega \setminus \bar{G})} |f(\varphi(x))|^p |J(x,\varphi)| dx.$$

---

*) Получая оценку, производим замену переменной x, используя неравенство для якобиана $P^{-2} < J(x,\varphi) < P^2$.

Учитывая (2), имеем $|\mathcal{J}(\varphi,x)|\leq P^2$. Поэтому окончательно можно записать

$$\|F(x)\|_{L_p(G)}\leq (1+P^{\frac{2}{p}})\|f\|_{L_p(G)}.$$

Мы построили продолжение функций из класса $\hat{B}^{\ell}_{p}(G)$ в некоторую окрестность Ω области G. Ограниченность и линейность оператора продолжения вытекает из оценок интегралов I_1F, I_2F и из способа построения оператора продолжения $\theta f = F$.

Для завершения доказательства достаточно умножить F на финитную и равную единице на G функцию $\omega\in C_0^{\infty}(\Omega)_0$. Тогда

$$\tilde{\theta} f = \omega(x)\cdot F(x) = \omega(x)\cdot(\theta f(x)).$$

Замечание. Аналогичный теореме 1 результат верен для пространства $\hat{b}^{\ell}_{p}(G)$ в области G, граница которой квазиокружность.

§ 3. Емкости в пространствах $B^{\ell}_{p,\theta}$

Во всем параграфе область $G\subset R^n$ фиксирована.

3.1. Определение емкости. Рассмотрим пару замкнутых относительно G множеств $F_0\subset G$, $F_1\subset G$. Функция u называется допустимой для пары F_0, F_1 относительно полунормы $|||\cdot|||^{\ell}_{p,\theta,G,h}$, если u непрерывна, тождественно равна нулю на F_0, тождественно равна единице на F_1 и $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,G,h}<\infty$. Множество допустимых функций выпукло.

Емкостью $C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h)$ пары F_0, F_1 относительно полунормы $|||\cdot|||^{\ell}_{p,\theta,G,h}$ в области G называется

$$\inf |||u|||^{\ell}_{p,\theta,G,h},$$

где нижняя грань берется по всем допустимым относительно этой полунормы функциям. В обозначении емкости мы будем опускать часть индексов там, где это не вызовет разночтений.

В случае, когда допустимых функций не существует, емкость полагаем равной ∞.

Для непересекающихся компактов $F_0, F_1\subset G$ емкость всегда меньше ∞, так как допустимые функции существуют. То же верно и для пары F_0, F_1, в которой замыкание одного из множеств есть компакт, и $\bar{F}_0\cap\bar{F}_1=\emptyset$.

Приведем некоторые свойства емкости

1. Монотонность. Если $F_0'\subset F_0$, а $F_1'\subset F_1$, то

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0',F_1',G,h)\leq C^{\ell}_{p,\theta}(F_0,F_1,G,h).$$

2. Непрерывность. Пусть $\{F_{1,m}\subset G\}$ - монотонно убывающая последовательность компактов, $F_1=\bigcap_{m=1}^{\infty}F_{1,m}$ и $\operatorname{dist}(F_1, R^n\setminus F_{1,m})\longrightarrow 0$

при $m \to \infty$.

Тогда для любого компакта $F_0 \subset G$, удовлетворяющего условию $F_0 \cap F_{1,m} = \emptyset$ при всех m, справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty} C^{\ell}_{p,\theta}(F_{1,m}, F_0, G, h) = C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h).$$

Доказательство. Из монотонности емкости следует

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_{1,m}, G, h) \geqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h). \tag{10}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть u - такая допустимая функция для пары F_0, F_1, что $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,G,h} - C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h) < \varepsilon$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|||u - u_\delta|||^{\ell}_{p,\theta,G,h} < \delta, \quad u_\delta = \min(1, (1+\delta)u).$$

Функция u_δ, в силу непрерывности u, будет допустимой для всех пар $F_0, F_{1,m}$, начиная с некоторого m_0. Отсюда, используя (10), при $m > m_0$ получаем

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h) \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_{1,m}, G, h) \leqslant$$

$$\leqslant |||u_\delta|||^{\ell}_{p,\theta,G,h} \leqslant |||u|||^{\ell}_{p,\theta,G,h} + \delta \leqslant C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h) + \delta + \varepsilon. \tag{11}$$

В силу произвола в выборе ε, δ, свойство доказано.

3. Существование экстремальной функции. Рассмотрим пространства $b^{\ell}_{p,\theta}$ при $p > 1$, $\theta \geqslant p$. В этом случае пространство $b^{\ell}_{p,\theta}$ равномерно выпукло*). Возьмем пару замкнутых относительно G множеств F_0, F_1. Пусть $\overline{F}_0$ - компакт, $\overline{F}_0 \cap \overline{F}_1 = \emptyset$. Тогда для пары F_0, F_1 множество $\mathcal{F}$ допустимых для емкости функций выпукло и непусто. Из равномерной выпуклости $\mathcal{F} \subset b^{\ell}_{p,\theta}$ следует существование в замыкании множества $\mathcal{F} \subset b^{\ell}_{p,\theta}$ единственной функции u_ℓ, реализующей емкость, т.е.

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, G, h) = |||u_\ell|||^{\ell}_{p,\theta,G,h}.\ ^{**)}$$

3.2. Пусть $\ell p = n$. Тогда полунорма $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,R^2,\infty}$ инвариантна при подобиях. Легко вычислить также, что полунорма $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,R^n,h}$ при преобразовании подобия $\varphi_K(x_0) = K(x - x_0)$ (x_0 - фиксированная точка) переходит в полунорму $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,R^n,h/K}$, т.е. $|||u|||^{\ell}_{p,\theta,R^n,h} = |||u \circ \varphi_{K,x_0}|||^{\ell}_{p,\theta,R^n,h:K}$.

---

*) Это следует из неравенства Кларксона.

**) При $C^{\ell}_{p,\theta}(\quad) = 0$ экстремальная функция определена с точностью до постоянной.

Следовательно, $C^{l}_{p,\theta}(F_0,F_1,h,R^n) = C^{l}_{p,\theta}(\varphi_{K,x_0}(F_0),\ldots)$.

В дальнейшем нам понадобятся три свойства емкости при $lp = n$.

Теорема 3.1. (Емкость шарового слоя.) Рассмотрим в R^n два концентрических шара: $B(0,r), B(0,R)$, $R > r$. Существует функция $\psi^{l}_{p,\theta}(t): R^1 \to R^1$, монотонно убывающая при $t \to \infty$, $\lim \psi^{l}_{p,\theta} = 0$ при $t \to \infty$, для которой справедливо неравенство

$$C^{l}_{p,\theta}(R^n \setminus B(0,R), \overline{B(0,r)}, R^n, h) \le \psi^{l}_{p,\theta}(R/r)$$

при всех h, R, r. Здесь $lp = n$.

Доказательство. Рассматриваемая емкость для $h = \infty$ инвариантна при подобиях и поэтому зависит только от отношения R/r. В качестве $\psi(R/r)$ возьмем эту емкость $C^{l}_{p,\theta}(R^n \setminus B(0,R), \overline{B(0,r)}, R^n, \infty)$. Не уменьшая общности, можно считать $R = 1$. Из монотонности емкости следует, что функция $\psi(t)$ монотонно убывает при $t \to \infty$.

Для $\psi(t)$ есть только две возможности: $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = a^2$ или $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. С учетом непрерывности емкости (свойство 2) реализация первой возможности означает, что $C^{l}_{p,\theta}(R^n \setminus B(0,1), \{0\}, R^n, \infty) = a^2$; и из вариантности при подобиях сразу же получаем, что

$$C^{l}_{p,\theta}(R^n \setminus B(0,R), \{0\}, R^n, \infty) = a^2$$

при всех R. Непосредственным подсчетом норм для допустимых функций можно легко убедиться, что это невозможно для рассматриваемой емкости. Для этого в качестве допустимой нужно взять функцию $u_R(x) = \frac{1}{R}\,\mathrm{dist}(x, R^n \setminus B(0,R))$.

Полученное неравенство

$$C^{l}_{p,\theta}(F_0, F_1, R^n, h) \le C^{l}_{p,\theta}(F_0, F_1, R^n, \infty)$$

завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.2. Пусть G - произвольная область в R^n, $x_0 \in G$. Тогда для любого замкнутого множества $F_1 \subset G$, $F_1 \cap \{x_0\} = \emptyset$ справедливо $C^{l}_{p,\theta}(\{x_0\}, F_1, G, h) = 0$ при $lp = n$.

Замечание. Следствие 3.2 можно получить и из того факта, что точка является устранимой особенностью в $B^{l}_{p,\theta}$ при $lp = n$.

3.3. Для дальнейшего изложения нам понадобятся две теоремы вложения.

Теорема 3.3. [17,18]. Пусть $G \subset R^n$ - область с гладкой границей. Тогда при $\ell_1 < \ell$ справедливо вложение $B^{\ell}_{p,\theta} \hookrightarrow B^{\ell_1}_{p,\theta_1}$ при любых θ_1, θ.

Теорема 3.4 (см.[17]). Пусть $G \subset R^n$ - область с гладкой границей. Тогда при $\ell p \geqslant n$ справедливо вложение $B^{\ell}_{p,1} \hookrightarrow C(G)$.

Стрелка $\hookrightarrow$ означает существование линейного ограниченного оператора вложения.

Лемма 3.5. Пусть $\ell p = n$, $f \in B^{\ell}_{p,\theta}\,(B(0,1))$. Тогда функция $f \in B^{\ell_1}_{p}\,(s(0,\tau))$ при всех $\ell_1 < \ell$ и непрерывна на сфере $s(0,\tau)$ при почти всех $\tau < 1$.

Доказательство. Вложим пространство $B^{\ell}_{p,\theta}$ в пространство $B^{\ell-\delta}_{p}$, выбрав δ настолько малым, чтобы $(\ell-\delta)\cdot p > n-1$. В пространстве $B^{\ell_1}_{p}$, $\ell_1 = \ell - \delta$, рассмотрим норму

$$\| f \| = \| f \|_{L_p(G)} + \left\{ \int\limits_{|t|<h} \left[\int |\Delta(t,G) f(x)|^p dx \right] \frac{dt}{|t|^{n+\ell_1 p}} \right\}^{1/p}. \tag{12}$$

Перепишем вторую часть нормы в виде

$$\int\limits_{|t|<h} \left[\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{s(0,\tau)} |\Delta(t,G) f(x)|^p d\sigma \right) d\tau \right] \frac{dt}{|t|^{n+\ell_1 p}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|t|<h} \left(\int\limits_{s(0,\tau)} |\Delta(t,G) f(x)|^p d\sigma \right) \frac{dt}{|t|^{n+\ell_1 p}} \right] d\tau = \int\limits_0^1 I f(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Пусть $\tilde{t}$ - вектор, соединяющий две точки сферы $s(0,\tau)$. Тогда

$$I f(\tau) \geqslant \int\limits_{|\tilde{t}|<h} \left(\int\limits_{s(0,\tau)} |\Delta(\tilde{t},G) f|^p d\sigma \right) \frac{d\tilde{t}}{|\tilde{t}|^{n+\ell_1 p}}. \tag{14}$$

Из (12) - (14) при $G = B(0,1)$ следует, что на почти всех сферах $s(0,\tau)$ функция $f \in B^{\ell_1}_{p}\,(s(0,\tau))$, и из неравенства $\ell_1 p > n-1$ и теорем 3.3, 3.4 получаем непрерывность функции f на почти всех сферах.

Аналогично доказывается лемма 3.6.

Лемма 3.6. Пусть $\ell p = n$ и последовательность функций

$\{f_n \in B^{\ell}_{p,\theta}(B(0,1))\}$ сходится в $B^{\ell}_{p,\theta}(B(0,1))$ к функции f. Тогда f_n сходится к f равномерно на сферах $s(0,r)$ при почти всех $r \in (0,1)$.

Лемма 3.7. Пусть $\ell p > n-1$, $p>1$ и T_0, T_1 – два произвольных компакта на сфере $s(0,1)$. Тогда для любого θ справедливо

$$C^{\ell}_{p,\theta}(T_0, T_1, s(0,1), h) \geq \alpha^2(n,\ell,p,h) > 0.$$

Доказательство легко следует из непрерывности экстремальной функции*) u_ℓ для рассматриваемой емкости. Непрерывность u_ℓ следует из теорем 3.3, 3.4. Заметим, что $\alpha^2(n,\ell,p,h) \geq \alpha^2(n,\ell,p,h_1)$ при $h > h_1$.

Теорема 3.8. (Емкость пары сходящихся континуумов.) Пусть $\{F^m_0, F^m_1\}$ – последовательность пар континуумов, удовлетворяющих условию $dist(F^m_1,\{0\}) + dist(F^m_0,\{0\}) \to 0$ при $m \to \infty$.

Тогда при $\ell p > n-1$, $p>1$, справедливо

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F^m_0, F^m_1, B(0,1), h) \to \infty$$

при $m \to \infty$, если $F^m_0 \cap s(0,1) \neq \emptyset$ и $F^m_1 \cap s(0,1) = \emptyset$ при $m = 1,2,\ldots$.

Доказательство. Рассмотрим сферы $s(0,r)$. При почти всех $r<1$ экстремальная функция u_m пары F^m_0, F^m_1 принадлежит классу $B^{\ell_1}_p(s(0,r))$. Постоянная ℓ_1 выбрана так, чтобы $\ell_1 p$ было больше $n-1$. Фиксируем какое-нибудь такое r. Пусть $T_0 = T^m_{0,r} = F^m_0 \cap s(0,r)$, $T_1 = T^m_{1,r} = F^m_1 \cap$ $\cap\, s(0,r)$. Нас интересуют только те сферы $s(0,r)$, для которых $T^m_{0,r}$ и $T^m_{1,r}$ непусты.

Функция $u_m|_{s(0,r)}$ является допустимой в $B^{\ell_1}_p$ для пары T_0, T_1, так как она непрерывна и равна нулю на T_0 и равна единице на T_1.

Применим к сфере $s(0,r)$ подобие $\psi_{1/r} = \frac{x}{r}$.

Функция $\tilde{u}_m = u_m(\psi_{1/r}(x)) \in B^{\ell_1}_p(s(0,1))$, и из леммы 3.7 получаем

---

*) Если о существовании экстремальной функции ничего не известно, то вместо нее можно рассматривать допустимую функцию с нормой, близкой к емкости.

$$\| \tilde{u}_m \|^{\ell_1}_{p,\theta,h/\tau} \geqslant C_p^{\ell_1}\left(\psi_{1/\tau}(T_0),\ \psi_{1/\tau}(T_1),\ s(0,1),\ \frac{h}{\tau}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha^2(n,\ell_1,p,h/\tau) \geqslant \alpha^2(n,\ell_1,p,h).$$

Отсюда и из (14) непосредственным подсчетом получаем

$$\int\limits_{|t|<h}\left[\int\limits_{B(0,1)} |\Delta(t,B(0,1))\,u_m(x)|^p dx\right]\frac{dt}{|t|^{n+\ell_1 p}} \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_0^1\left[\int\limits_{|\tilde{t}|<h}\left(\int\limits_{s(0,\tau)} |\Delta(\tilde{t},B(0,1))u_m(x)|^p d\sigma\right)\frac{dt}{|t|^{n+\ell_1 p}}\right]d\tau \geqslant$$
$$\geqslant M\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{\alpha^2(n,\ell_1,p,h)}{\tau^{n+\ell_1 p-2(n-1)}}\,d\tau. \qquad (15)$$

Здесь $\tilde{t}$ - вектор длины $|\tilde{t}|<h$, соединяющий точки сферы,

$$\tau_0 = \min(\tau,\ s(0,\tau)\cap T_0 \neq \emptyset,\ \ s(0,\tau)\cap T_1 \neq \emptyset).$$

Так как $\ell_1 p > n-1$, то $n+\ell_1 p-2(n-1) > 1+\delta$ и из условий теоремы следует, что при $\operatorname{dist}(F_0^m,\{0\})+\operatorname{dist}(F_1^m,\{0\}) \to 0$ правая часть в неравенстве (15) стремится к ∞. Отсюда следует

$$\lim_{m\to\infty} C_p^{\ell_1}(F_0^m, F_1^m, B(0,1), h) \to \infty.$$

Теперь достаточно вспомнить определение емкости и применить теорему 3.3, чтобы получить желаемый результат.

Теорема 3.9. (Оценка для емкости Тейхмюллера.) Пусть континуумы F_0, F_1 соединяют две концентрические сферы $s_1 = s(0,1)$ и $s_2 = s(0,2)$. Тогда для $\ell p > n-1$ при любом θ справедливо неравенство

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_0, F_1, B(0,2), h) \geqslant \gamma(n,\ell,p,h) > 0.$$

Предположим противное. Тогда существует последовательность непрерывных функций $u_m \in B^{\ell}_{p,\theta}$, сходящихся к нулю в полунорме $b^{\ell}_{p,\theta,h}$ и равных нулю на F_0 и единице на F_1. Эта последовательность обязана равномерно сходиться к некоторой функции u на почти всех сферах $s(0,\tau)$, что следует из леммы

3.6. Но тогда на каждой из этих сфер колебание предельной функции должно быть равно единице, так как все сферы $s(0,r)$ пересекают множества F_0 и F_1, т.е. $u_m \not\to 0$ на почти всех сферах $s(0,r)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 4. Необходимые условия продолжения для плоских областей

4.1. Для рассмотрения указанных условий нам потребуется

Предложение 4.1. Если область $G \subset \bar{R}^2$ локально-связна в каждой граничной точке, то ее граница будет жордановой кривой.

Доказательство основано на исследовании свойств конформной метрики [19] и теореме Римана о конформном отображении односвязных плоских областей.

Область $G \subset R^2$ удовлетворяет условию продолжения для $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, если для какого-нибудь h существует ограниченный оператор продолжения

$$\theta : B^{\ell}_{p,\theta}(G) \to B^{\ell}_{p,\theta}(R^2), \qquad \theta u|_G = u,$$

$$\|\theta u\|^{\ell}_{p,\theta,R^2,h} \leq \|\theta\|_h \|u\|^{\ell}_{p,\theta,G,h}.$$

Область G удовлетворяет двустороннему условию продолжения, если области G и $R^2 \setminus G$ одновременно удовлетворяют условию продолжения.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная плоская односвязная область G удовлетворяла двустороннему условию продолжения для $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, $\ell p = 2$, $p > 1$, необходимо, чтобы граница области была квазиокружностью (т.е. локально удовлетворяла условию Альфорса, сформулированному в § 1).

Доказательство состоит из нескольких этапов.

I. Если область удовлетворяет условию продолжения, то ее граница локально-связна в каждой граничной точке.

Предположим обратное. Возьмем точку $x_0 \subset \partial G$, в которой область не является локально-связной. Это означает существование такого круга $B(x_0, r_0)$, что при $r < r_0$ во всяком круге $B(x_0, r)$ существуют две точки $x_1(r), x_2(r) \in G$, которые нельзя соединить кривой, лежащей в $B(x_0, r_0) \cap G$. Очевидно, $|x_1(r) - x_2(r)| \to 0$ при $r \to 0$.

Соединим точки $x_1(r)$ и $x_2(r)$ кривой

$$\gamma_\tau : [0,1] \to G, \ \gamma_\tau(0) = x_1(\tau), \quad \gamma_\tau(1) = x_2(\tau).$$

Пусть $t_0 = \max\{t : \gamma_\tau([0,t]) \subset B(x_0, \tau_0/2)\}$,

$$t_1 = \min\{t : \gamma_\tau([t,1]) \subset B(x_0, \tau_0/2)\},$$

$$F_{0,\tau} = \gamma_\tau([0,t_0]), \qquad F_{1,\tau} = \gamma_\tau([t_1,1]).$$

По теореме 3.8, имеем

$$\lim_{\tau \to 0} C^{\ell}_{p,\theta}(F_{0,\tau}, F_{1,\tau}, R^2, h) = \infty. \tag{16}$$

Рассмотрим связную компоненту $G_{0,\tau}$ множества $B(x_0,\tau_0) \cap G$, содержащую $x_1(\tau)$, и связную компоненту $G_{1,\tau}$ множества $B(x_0,\tau_0) \cap G$, содержащую $x_2(\tau)$. По предположению, $G_{1,\tau} \cap G_{0,\tau} = \emptyset$.

Пусть $\psi : R^2 \to R$ - бесконечно дифференцируемая финитная функция, $\psi(x) \equiv 0$ при $x \notin B(x_0, \tau_0)$, $\psi(x) \equiv 1$ при $x \in B(x_0, \tau_0/2)$. Пусть $T_h = \| \psi(x) \|^{\ell}_{p,\theta,R^2,h}$. Функция $\varphi_\tau(x) = \psi(x)$ при $x \in G \setminus G_{0,\tau}$, $\varphi_\tau(x) \equiv 0$ при $x \in G_{0,\tau}$ является допустимой для пары континуумов $F_{0,\tau}$, $F_{1,\tau}$. Очевидно,

$$C^{\ell}_{p,\theta}(F_{0,\tau}, F_{1,\tau}, G, h) \le \| \varphi_\tau \|^{\ell}_{p,\theta,G,h} \le T_h.$$

Возьмем то h, для которого оператор продолжения θ ограничен. Тогда $C^{\ell}_{p,\theta}(F_{0,\tau}, F_{1,\tau}, R^2, h) \le \|\theta\|_h T_h$, что противоречит (16), т.е. область G локально-связна.

II. Пусть для любого C существует тройка точек $\xi_{1,C}, \xi_{2,C}, \xi_{3,C}$, для которой $|\xi_{1,C} - \xi_{3,C}| > C|\xi_{1,C} - \xi_{2,C}|$. Точка $\xi_{3,C}$ лежит между $\xi_{1,C}$ и $\xi_{2,C}$. Из-за локальности условия Альфорса расстояния между точками $\xi_{1,C}, \xi_{2,C}, \xi_{3,C}$ можно считать меньшими некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Подбором точек $\xi_{1,C}, \xi_{2,C}$ добьемся, что отрезок γ_C, соединяющий эти точки, целиком лежит в одной из областей G или $R^2 \setminus \bar{G}$.

Рассмотрение в обеих ситуациях будет одинаковым. Поэтому ограничимся случаем $\gamma_C \subset G$, γ_C разбивает G на две части G_0 и G_1, $G_0 \ni \xi_{3,C}$. Из середины $\xi_{4,C}$ отрезка γ_C проведем две окружности

$$s_0 = s\left(\xi_{4,c}, \frac{\sqrt{c}}{2}|\xi_{1,c} - \xi_{2,c}|\right) \quad \text{и} \quad s_1 = s\left(\xi_{4,c}, |\xi_{4,c} - \xi_{3,c}|\right).$$

Отношение радиусов кругов $B_0 = B\left(\xi_{4,c}, \frac{\sqrt{c}}{2}|\xi_{1,c} - \xi_{2,c}|\right)$ и $B_1 = \left(\xi_{4,c}, |\xi_{4,c} - \xi_{3,c}|\right)$ стремится к нулю при $c \to \infty$.

При достаточно близких точках $\xi_{1,c}, \xi_{2,c}, \xi_{3,c}$ сфера s_1 пересекает G_1 и $diam\,(G_1 \setminus B_1) > |\xi_{4,c} - \xi_{3,c}|$.

Из теоремы 3.1 легко следует, что

$$C^{\ell}_{p,\theta}\left([G_0 \cup B_0] \cap G, G_1 \setminus B_1, G, h\right) < 2\psi^{\ell}_{p,\theta}(\sqrt{c}). \tag{17}$$

Здесь ψ - функция, построенная в теореме 3.1. Так как $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то емкость $C^{\ell}_{p,\theta}(\,\cdot\,)$ при $c \to \infty$ стремится к нулю.

Допустимые функции для этой емкости обращаются в нуль на G_0. Следовательно, экстремальная функция*) u_ℓ обращается в нуль на G_0. Аналогично доказывается, что $u_\ell \equiv 1$ на $G_1 \setminus B_1$. Из (17) имеем неравенство

$$\|u_\ell\|^{\ell}_{p,\theta,G,h} \leq 2\,\psi^{\ell}_{p,\theta}(\sqrt{c}). \tag{18}$$

Из условия продолжения получаем

$$\|\theta u_\ell\|^{\ell}_{p,\theta,R^2,h} \leq 2\,\|\theta\|_h\,\psi^{\ell}_{p,\theta}(\sqrt{c}). \tag{19}$$

Функция θu_ℓ аппроксимируется в $B^{\ell}_{p,\theta}(R^2)$ функциями $\{u_m\}$, допустимыми для пары $\overline{G_0}, \overline{G_1 \setminus B_1}$ (с любой точностью).

Из теоремы 3.9 и поведения емкости $C^{\ell}_{p,\theta,R^2,h}$, $\ell p = 2$, при подобиях следует

$$C^{\ell}_{p,\theta,G,h}\left([G_0 \cup B_0] \cap G, G_1 \setminus B_1, G, h\right) - \|u_\ell\|^{\ell}_{p,\theta,G,h} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|\theta\|_h}\|\theta u_\ell\|^{\ell}_{p,\theta,R^2,h} \geq \frac{1}{\|\theta\|_h}\left(\|u_m\|^{\ell}_{p,\theta,R^2,h} - \varepsilon\right) \geq$$

---

*) Рассуждение сохраняет силу, если вместо экстремальной рассмотреть допустимую функцию, норма которой близка к емкости.

$$\geq \frac{1}{\|\theta\|_h} C^{\ell}_{p,\theta,R^2,h}\left(\bar{G}_0, \overline{G_1 \setminus B_1}, R^2, h\right) - \frac{\varepsilon}{\|\theta\|} \geq \gamma(h) - \frac{\varepsilon}{\|\theta\|_h} \quad . \tag{20}$$

Здесь $\gamma(h)$ - постоянная из теоремы 3.9. Сравнивая (17) и (20), получаем противоречие, доказывающее теорему.

Теорема $2'$. Для того чтобы неограниченная, плоская, односвязная область удовлетворяла двустороннему условию продолжения для $B^{\ell}_{p,\theta}(G), \ell p = 2$, $p > 1$, необходимо, чтобы граница области была квазиконформной прямой (т.е. удовлетворяла условию Альфорса).

Сравнивая теоремы 1, 2 и $1'$, $2'$, мы видим, что при $\theta = p$, $\ell p = 2$ условия на границу, сформулированные в этих теоремах, будут необходимыми и достаточными для пространств $\hat{B}^{\ell}_p$, $\hat{b}^{\ell}_p$.

В теоремах 1, 11 можно заменить пространство $\hat{B}^{\ell}_p$ $(B^{\ell}_{p,\theta})$ на $\hat{b}^{\ell}_p$, $b^{\ell}_{p,\theta}$.

§ 5. Замена переменных в пространстве $B_3^{2/3}(G)$

Для $B_3^{2/3}(R^2)$ доказана инвариантность при квазиконформных преобразованиях [20].

5.1. Квазиконформная норма. Пусть $\varphi : B(0,1) \longrightarrow G$ - квазиконформный гомеоморфизм из шара $B(0,1)$ на односвязную область G. Отображение φ^{-1} индуцирует оператор $(\varphi^{-1})^* u = u \circ \varphi^{-1}$, $(\varphi^{-1})^* : b_3^{2/3}(B(0,1)) \longrightarrow M(G)$, где $M(G)$ - пространство измеримых функций. Введем в образе $B^{2/3}_{3,\varphi}(G) = (\varphi^{-1})^* (B_3^{2/3}(B(0,1))$ норму по правилу

$$\| u \|^{2/3}_{3,h,\varphi} = \| u \|^{2/3}_{3,\varphi,G,h} = \| \varphi^* u \|^{2/3}_{3,B(0,1),h} .$$

Нам известно [20], что любая квазиконформная полунорма в $b_3^{2/3}(R^2)$ эквивалентна стандартным полунормам в пространстве $B_3^{2/3}(R^2)$.

Теорема 5.1. Пусть граница ограниченной области G удовлетворяет локальному условию Альфорса с постоянной C. Тогда для всякого квазиконформного гомеоморфизма $\varphi : B(0,1) \longrightarrow G$ пространства $B^{2/3}_{3,\varphi,G}$ и $\hat{b}^{2/3}_{3,G}$ совпадают. Более того, справедлива оценка

$$\| u \|^{2/3}_{3,\varphi,\hat{h}} \leq P(C, q(\varphi), \hat{h}) \| u \|^{2/3}_{3,\hat{h}} .$$

Доказательство. По теореме Альфорса, существует квазиконформный гомеоморфизм $\tilde{\varphi} : R^2 \longrightarrow R^2$ такой, что $\tilde{\varphi}|_{B(0,1)} = \varphi$ и $q(\tilde{\varphi}) \leq$ $\leq P(C, q(\varphi))$, где постоянная P зависит только от постоянной C в условии Альфорса и $q(\varphi)$.

Для шара $B(0,1)$ существует оператор продолжения θ: $b_3^{2/3}(B(0,1)) \longrightarrow b_3^{2/3}(R^2)$. Норма $\|\theta\|_h$ оператора θ зависит только от выбора h.

Доказательство теоремы следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} b_3^{2/3}(B(0,1)) & \xleftrightarrow[\varphi^*,(\varphi^{-1})^*]{} & b_{3,\varphi}^{2/3}(G) \\ \big\downarrow \theta & & \big\uparrow \mu = (\tilde{\varphi}^{-1})^* \circ \theta \circ \varphi^* \\ b_3^{2/3}(R^2) & \xrightarrow{(\tilde{\varphi}^{-1})^*} & b_3^{2/3}(R^2) \end{array} \qquad (21)$$

Коммутативность диаграммы (21) вытекает из совпадения $\tilde{\varphi}$ и φ на $B(0,1)$ и из теоремы о продолжении, утверждающей, что $\mu(b_3^{2/3}(R^2)) = \hat{b}_3^{2/3}(G)$.

Ограниченность оператора μ очевидна.

Из этой диаграммы имеем

$$\|u\|_{3,\hat{h},\varphi}^{2/3} = \|(\varphi^{-1})^* u\|_{3,\hat{h},B(0,1)}^{2/3} \leq$$
$$\leq \|\theta\|_h \|(\tilde{\varphi}^{-1})^* u\|_{3,\hat{h},R^2}^{2/3} \|\mu\| \leq \|\theta\|_h P(C, q(\varphi)) \|u\|_{3,\hat{h}}^{2/3}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть G и G_1 - две ограниченные односвязные области, удовлетворяющие условию Альфорса. Тогда всякий квазиконформный гомеоморфизм $\varphi : G \longrightarrow G_1$ индуцирует ограниченный оператор $\varphi^* : \hat{b}_3^{2/3}(G_1) \longrightarrow \hat{b}_3^{2/3}(G)$. При этом норма $\|\varphi^*\|_h$ оператора φ^* зависит только от $q(\varphi)$ и от постоянной в условии Альфорса.

Литература

1. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.- Успехи мат. наук, 1979, т.34, № 1, с.17-62.
2. Гольдштейн В.М. Критерий продолжения функций одного из классов Бесова для плоских областей.- Докл. АН СССР, 1979, т.447, №1, с.18-21.

3. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Функциональные характеристики квазиизометрических отображений - Сиб.мат.журн., 1976, т.17, № 4, с. 768-773.

4. Никольский С.М. К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом.- Докл. АН СССР, 1953, т.88, № 3, с.409-411.

5. Бабич В.М. К вопросу о распространении функций.- Успехи мат.наук, 1953, т. 8, № 2, с.111-113.

6. Calderon A.P. Lebesque spaces of differential function. In: Conf. on Partial Differential Equations. Univ. California, 1966, p. 18-32.

7. Солнцев Ю.К. Об оценке смешанной производной в $\mathcal{L}_p(G)$.- Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1961, т.64, с.221-238.

8. Smith K.T. Inequalities for formally positive integro-differential forms. - Bull. Amer. Math. Soc., 1961, v. 67, № 4, p. 368-370.

9. Бесов С.В., Ильин В.П. Расширение класса областей в теоремах вложения.- Мат.сб., 1968, т.13, №4, с.483-495.

10. Бесов С.В. Продолжение функций из пространств $\mathcal{L}_p^\ell$ и W_p^ℓ.- Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1967, т.89, с.2-17.

11. Бесов С.В. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С.Л. Соболева.- Мат.сб., 1967, т.73, №4, с.585-599.

12. Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференциальных функций.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.140, с.27-67.

13. Буренков В.И. О продолжении функций с сохранением полунормы.-Докл. АН СССР, 1976, т.228, №4, с.779-782.

14. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами - Записки научных семинаров ЛОМИ, 1967, №3, с.1-67.

15. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям.- М.: Мир, 1969, с.132.

16. Rickman S. Characterization of quasiconformal arcs. - Ann. Acad. Sci. Fenn., 1966, A I, № 395, p. 1-15.

17. Бесов С.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.-478 с.

18. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973.- 336 с.

19. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях.- Докл.АН СССР, 1978, т.238, № 5, с.18-20.

20. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М. Новый функциональный инвариант для квазиконформных гомеоморфизмов.- В кн.: Некоторые вопросы современной теории функций (Материалы конф. по совр. теории функций, Новосибирск, март 1976 г.) - Новосибирск: Наука Сиб.отд., 1976, с.18-21.