УДК 517.946

ШАУДЕРОВСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С РЕБРАМИ НА ГРАНИЦЕ

В.Г.Мазья, Б.А.Пламеневский (Ленинград)

Эллиптические краевые задачи в областях с ребрами изучались в ряде работ [1-12], где были получены условия нётеровости и коэрцитивные оценки решений в весовых пространствах С.Л.Соболева, порожденных нормами в L_2 и L_p, $1<p<\infty$, а также исследовано поведение решений вблизи ребра.

В настоящей работе, которая примыкает к статье авторов [13], рассматриваются общие эллиптические задачи в весовых пространствах Гёльдера. Для двугранного угла эти пространства определяются в § 1. Здесь приводятся эквивалентные нормировки, изучаются диффеоморфизмы, сохраняющие пространства, описываются дифференциальные операторы, непрерывно действующие из одного весового пространства Гёльдера в другое.

§ 2 посвящен модельной краевой задаче в двугранном угле. Здесь приводятся теоремы об однозначной разрешимости в весовых классах Гёльдера, а также об изменении показателей веса и гладкости решений.

Основной результат работы - доказанная в § 3 теорема о нётеровости краевых задач на многообразиях с ребрами и весовых шаудеровских оценках решений таких задач при минимальных предположениях о многообразиях и коэффициентах.

§ 1. Весовые пространства в двугранном угле

1°. Пространства $N_\delta^{h,\alpha}$. Пусть (r,ω) - полярные координаты на евклидовой плоскости $\{y\}, y=(y_1,y_2), \alpha\in(0,2\pi)$ и K - угол $\{y: 2|\omega|<\alpha\}$ со сторонами $\gamma^\pm=\{y: 2\omega=\pm\alpha,\ |y|>0\}$. Обозначим через $\mathcal{D}$ двугранный угол $K\times R^{n-2}$, $n\geqslant 3$, с гранями $\Gamma^\pm=\gamma^\pm\times R^{n-2}$ и ребром $M=\{x=(y,z): y=0,\ z\in R^{n-2}\}$.

Пусть $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ $(0<\alpha<1,\ \delta\in R^1)$ - пространство h раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{\mathcal{D}} \setminus M$ [*)] с конечной нормой

$$\|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} = \sup_{x,\xi\in\mathcal{D}} |x-\xi|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{h} \Big| |y|^{\delta-h+k} \nabla_k u(x) -$$

$$- |\eta|^{\delta-h+k} \nabla_k u(\xi) \Big| + \sup_{x\in\mathcal{D}} \sum_{k=0}^{h} |y|^{\delta-h+k-\alpha} |\nabla_k u(x)| . \qquad (1.1)$$

П р е д л о ж е н и е 1.1. Норма (1.1) эквивалентна норме

$$\sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta} \sup_{\xi\in H_x} \frac{|\nabla_h u(x) - \nabla_h u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha}} + \sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta-h-\alpha} |u(x)| , \qquad (1.2)$$

где $H_x = \{\xi \in \mathcal{D} : |x-\xi| < \min\{|y|, |\eta|\}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $|x-\xi| \geq c\,(|x-\xi| + |y| + |\eta|)$, которое справедливо при $|x-\xi| \geq \min\{|y|, |\eta|\}$, а также из неравенств $c_1|y| \leq |\eta| \leq c_2 |y|$, следующих из оценки $|x-\xi| \leq \min\{|y|, |\eta|\}$, получаем, что норма (1.1) мажорируется величиной .

$$c\left(\sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta} \sup_{\xi\in H_x} \sum_{k=0}^{h} \frac{|\nabla_k u(x) - \nabla_k u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \sup_{x\in\mathcal{D}} \sum_{k=0}^{h} |y|^{\delta-h+k-\alpha} |\nabla_k u(x)| \right). \qquad (1.3)$$

Воспользуемся следующими тремя элементарными неравенствами для функции, заданной на отрезке $[0,1]$:

$$|f'(t)| \leq c\left(\varepsilon^{\alpha} \sup_{t,\tau\in[0,1]} \frac{|f'(t)-f'(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}} + \varepsilon^{-1} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \right),$$

$$|f'(t)| \leq c\left(\varepsilon \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \varepsilon^{-1} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \right),$$

$$\frac{|f(t)-f(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}} \leq c\left(\varepsilon^{1-\alpha} \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \varepsilon^{-\alpha} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \right),$$

где $\varepsilon \in (0,1]$.

Из этих неравенств вытекают оценки

---

*) Здесь и далее $\overline{\mathcal{D}}$ - замыкание $\mathcal{D}$ в смысле внутренней метрики $|x-\xi|$ в $\mathcal{D}$.

$$\varepsilon^{\alpha} \sup_{t,\tau\in[0,1]} \frac{|f^{(\kappa)}(t)-f^{(\kappa)}(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}} + \sup_{t\in[0,1]} |f^{(\kappa)}(t)| \le$$

$$\le C\left(\varepsilon^{h+\alpha-\kappa} \sup_{t,\tau\in[0,1]} \frac{|f^{(h)}(\tau)-f^{(h)}(t)|}{|t-\tau|^{\alpha}} + \varepsilon^{-k} \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\right).$$

Отсюда для функции f, заданной на отрезке σ длины $|\sigma|$, получаем следующее известное неравенство:

$$\varepsilon^{\alpha}|\sigma|^{\alpha} \sup_{t,\tau\in\sigma} \frac{|f^{(\kappa)}(t)-f^{(\kappa)}(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}} + \sup_{t\in\sigma}|f^{(\kappa)}(t)| \le$$

$$\le C\left(\varepsilon^{h+\alpha-\kappa}|\sigma|^{h+\alpha-\kappa} \sup_{t,\tau\in\sigma} \frac{|f^{(h)}(t)-f^{(h)}(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}} + \varepsilon^{-k}|\sigma|^{-k}\sup_{t\in\sigma}|f(t)|\right). \quad (1.4)$$

Из (1.4), где $\varepsilon=1$ и $c_1|y| \le |\sigma| \le c_2|y|$, получаем, что норма (1.3) не сильнее нормы (1.2), что и требовалось доказать.

Отметим еще несколько свойств пространства $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. Норма (1.1) эквивалентна норме

$$\| |y|^{\nu} u \|_{N_{\delta-\nu}^{h,\alpha}(\mathcal{D})},$$

где ν - любое вещественное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из определения нормы (1.1).

П р е д л о ж е н и е 1.3. Если $u\in N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, то $D^{\gamma}u \in N_\delta^{h-|\gamma|,\alpha}(\mathcal{D})$ для любого мультииндекса γ порядка $|\gamma|\le h$.

Это - очевидное следствие определения нормы (1.1).

П р е д л о ж е н и е 1.4. Если $h_1+\alpha_1 > h+\alpha$ и $h_1+\alpha_1-\delta_1 = h+\alpha-\delta$, то пространство $N_{\delta_1}^{h_1,\alpha_1}(\mathcal{D})$ непрерывно вложено в пространство $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1.1,

$$\|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le C \sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta} \sup_{\xi\in H_x} \frac{|\nabla_h u(x)-\nabla_h u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha}} +$$

$$+ \sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta-h-\alpha}|u(x)|.$$

Если $h_1 = h$, то при $\xi \in H_x$

$$|y|^{\delta} \frac{|\nabla_h u(x) - \nabla_h u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha}} \leq C \frac{|\nabla_h u(x) - \nabla_h u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha_1}} |y|^{\delta+\alpha_1-\alpha_2} \leq$$

$$\leq C \|u\|_{N_{\delta_1}^{h_1,\alpha_1}(\mathcal{D})}.$$

Если же $h_1 > h$, то при $\xi \in H_x$

$$|y|^{\delta} \frac{|\nabla_h u(x) - \nabla_h u(\xi)|}{|x-\xi|^{\alpha}} \leq C \sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{\delta+1-\alpha} |\nabla_{h+1} u(x)| =$$

$$= C \sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{h+1-h_1+\delta_1-\alpha_1} |\nabla_{h+1} u(x)| \leq C \|u\|_{N_{\delta_1}^{h_1,\alpha_1}(\mathcal{D})}.$$

Предложение доказано.

Обозначим через $N_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ множество h раз непрерывно дифференцируемых на $\Gamma^{\pm}$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{N_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})} = \sup_{x,\xi\in\Gamma^{\pm}} |x-\xi|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{h} \Big| |y|^{\delta-h+k} \nabla_k' u(x) -$$

$$- |\eta|^{\delta-h+k} \nabla_k' u(\xi) \Big| + \sup_{x\in\Gamma^{\pm}} \sum_{k=0}^{h} |y|^{\delta-h+k-\alpha} |\nabla_k' u(x)|,$$

где ∇_k' - градиент порядка k на $\Gamma^{\pm}$.

Для пространств $N_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ сохраняют силу как сами предложения 1.1-1.4, так и их доказательства.

П р е д л о ж е н и е 1.5. Если $\varphi \in N_{\delta}^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})$, $j = 0,\dots,h$, то существует такая функция $u \in N_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^q u}{\partial \nu_{\pm}^q} = 0, \quad q = 0,\dots,h;\ q \neq j; \quad \frac{\partial^j u}{\partial \nu_{\pm}^j} = \varphi \quad \text{на } \Gamma^{\pm}, \\ &\frac{\partial^q u}{\partial \nu_{\mp}} = 0, \quad q = 0,1,\dots,h, \quad \text{на } \Gamma^{\mp}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

и справедлива оценка

$$\|u\|_{N_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \leq C \|\varphi\|_{N_{\delta}^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})}.$$

Здесь $\nu_{\pm}$ - нормаль к $\Gamma^{\pm}$ и C - положительная постоянная, не зависящая от φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $\operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_1^{\pm} = \{x \in \Gamma^{\pm} : 1 < |y| < 2\}$. Ясно, что для таких функций норма в $N_{\delta}^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ эквивалентна норме

$$\|\varphi\|_{C^{h-j,\alpha}(\Gamma_1^{\pm})} = \sup_{x,\xi\in\Gamma_1^{\pm}} |x-\xi|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{h-j} |\nabla_k' \varphi(x) - \nabla_k' \varphi(\xi)| +$$
$$+ \sup_{x\in\Gamma_1^{\pm}} \sum_{k=0}^{h} |\nabla_k' \varphi(x)|.$$

Следовательно, существует h раз дифференцируемая функция с носителем на множестве $\mathcal{D}_1 = \{x\in\mathcal{D} : 1/2 < |x| < 4\}$, удовлетворяющая условиям (1.5) и такая, что

$$\|u\|_{C^{h,\alpha}(\mathcal{D}_1)} \le C \|\varphi\|_{C^{h-j,\alpha}(\Gamma_1)},$$

где

$$\|u\|_{C^{h,\alpha}(\mathcal{D}_1)} = \sup_{x,\xi} |x-\xi|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{h} |(\nabla_k u)(x) -$$
$$- (\nabla_k u)(\xi)| + \sum_{k=0}^{h} \sup_{x\in\mathcal{D}} |\nabla_k u(x)|.$$

Эта оценка равносильна доказываемому неравенству. Случай

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x\in\Gamma^{\pm} : 2^{\mu} < |y| < 2^{\mu+1}\}, \quad \mu = 0, \pm 1, \ldots,$$

сводится к рассмотренному с помощью преобразования подобия: $y \to 2^{\mu} y$, $z \to 2^{\mu} z$.

Обозначим через $\{\zeta_\mu\}_{\mu=-\infty}^{+\infty}$ разбиение единицы на K, подчиненное покрытию угла K множествами $\{y\in K : 2^{\mu-1} < |y| < 2^{\mu+1}\}$ и удовлетворяющее условиям

$$|D^{\alpha} \zeta_\mu(y)| \le c\, 2^{-|\alpha|\mu}, \quad \mu = 0, \pm 1, \ldots, \quad |\alpha| = 0, 1, \ldots .$$

Пусть φ - произвольная функция из $N_\delta^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ и u_μ - функция из $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ с носителем в $\{x\in\mathcal{D} : 2^{\mu-2} < |y| < 2^{\mu+2}\}$, для которой выполнены условия (1.5) (где роль функции φ играет $\zeta_\mu \varphi$) и имеет место неравенство

$$\|u_\mu\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le C \|\zeta_\mu \varphi\|_{N_\delta^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})}.$$

Тогда для функции $u = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} u_\mu$ выполнены условия (1.5) и неравенства

$$\|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le C_1 \sup_{\mu} \|u_\mu\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le C_2 \|\varphi\|_{N_\delta^{h-j,\alpha}(\Gamma^{\pm})}.$$

Предложение доказано.

Из предложения 1.5 следует, в частности, что пространство $N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ можно отождествить с пространством следов на $\Gamma^{\pm}$ функций из $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Отметим еще, что для пространств $N_\delta^{l,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ справедливы утверждения, аналогичные предложениям 1.1-1.5.

2°. Пространства $C^{h,\alpha}$. В этом пункте рассматриваются некоторые свойства пространств $C^{h,\alpha}$, используемые в дальнейшем при изучении пространств $N_{\delta}^{h,\alpha}$.

Пусть U - подобласть R^n с компактным замыканием, d_U - диаметр U (относительно внутренней метрики в U) и

$$[v]_{\alpha,U} = \sup_{x^{(1)},x^{(2)}\in U} \frac{|v(x^{(1)})-v(x^{(2)})|}{|x^{(1)}-x^{(2)}|^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1.$$

Обозначим через $C^{h,\alpha}(U)$ пространство h раз дифференцируемых в U функций, для которых конечна норма

$$\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} = \sum_{k=0}^{h} d_U^{k+\alpha}\,[\nabla_k u]_{\alpha,U} + \sum_{k=0}^{h} d_U^{k}\,\|\nabla_k u\|_{C(U)}.$$

Если U - несвязное открытое множество, то норма в $C^{h,\alpha}(U)$ определяется как supremum норм в $C^{h,\alpha}(U_i)$, где U_i - компоненты U.

П р е д л о ж е н и е 1.6. Для любого числа $\lambda>0$

$$\|u_\lambda\|_{C^{h,\alpha}(\lambda U)} = \|u\|_{C^{h,\alpha}(U)},$$

где $u_\lambda(x)=u(x/\lambda)$ и $\lambda U=\{\lambda x : x\in U\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из определения нормы в $C^{h,\alpha}(U)$.

П р е д л о ж е н и е 1.7. Пространство $C^{h,\alpha}(U)$ - кольцо, и справедливо неравенство

$$\|uv\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le C\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)}\,\|v\|_{C^{h,\alpha}(U)}, \tag{1.6}$$

где С - постоянная, не зависящая от U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение известно, если $d_U=1$. В общем случае следует перейти к множеству $d^{-1}U$ и воспользоваться предложением 1.6. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 1.8. Если $u\in C^{h,\alpha}(U)$ и $\inf\limits_U |u| = \delta>0$, то $u^{-1}\in C^{h,\alpha}(U)$ и справедлива оценка

$$\|u^{-1}\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le c\delta^{-1}\left(\delta^{-1}\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)}\right)^{2^{h+1}-1}. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\frac{|u(x^{(1)})^{-1}-u(x^{(2)})^{-1}|}{|x^{(1)}-x^{(2)}|^{\alpha}} \le \delta^{-2}\,[u]_{\alpha,U},$$

то

$$\|u^{-1}\|_{C^{0,\alpha}(U)} \le \delta^{-2} \|u\|_{C^{0,\alpha}(U)} . \tag{1.8}$$

Очевидно, для любой функции $v \in C^{h,\alpha}(U)$

$$\|v\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le d_U \|\nabla v\|_{C^{h-1,\alpha}(U)} + \|v\|_{C^{0,\alpha}(U)} .$$

Поэтому

$$\|u^{-1}\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le d_U \|u^{-2}\nabla u\|_{C^{h-1,\alpha}(U)} + \delta^{-2}\|u\|_{C^{0,\alpha}(U)} .$$

Отсюда и из предложения 1.7 получаем, что

$$\|u^{-1}\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le \|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} \|u^{-1}\|^2_{C^{h-1,\alpha}(U)} + \delta^{-2}\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} .$$

Итерируя последнее неравенство и используя (1.8) и очевидную оценку $\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} \ge \delta$, придем к неравенству (1.7). Предложение доказано.

Пусть U и V - открытые подмножества R^n и $\varkappa : U \to V$ - отображение класса $C^{h,\alpha}$, $h \ge 1$. Обозначим через $m_\varkappa$ сумму норм в $C^{h-1,\alpha}(U)$ элементов матрицы $\varkappa'$.

П р е д л о ж е н и е 1.9. Если $u \in C^{h,\alpha}(V)$, то $u \circ \varkappa \in C^{h,\alpha}(U)$ и справедлива оценка

$$\|u \circ \varkappa\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le c\left(d_V^{-1} d_U m_\varkappa\right)^{h+\alpha} \|u\|_{C^{h,\alpha}(V)} , \tag{1.9}$$

где c - постоянная, зависящая только от n, h, α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим сначала неравенство (1.9) при $h = 0$. Имеем

$$\|u \circ \varkappa\|_{C^{0,\alpha}(U)} = d_U^{\alpha} [u \circ \varkappa]_{\alpha,U} + \|u \circ \varkappa\|_{C(U)} \le$$

$$\le \left(\|\varkappa'\|_{C(U)} d_V^{-1} d_U\right)^{\alpha} [u]_{\alpha,V} + \|u\|_{C(V)} .$$

Поскольку $\|\varkappa'\|_{C(U)} d_V^{-1} d_U \ge 1$, то

$$\|u \circ \varkappa\|_{C^{0,\alpha}(U)} \le \left(\|\varkappa'\|_{C(U)} d_V^{-1} d_U\right)^{\alpha} \|u\|_{C^{0,\alpha}(V)} \tag{1.10}$$

Допустим, что оценка (1.9) верна при $h = 1, \dots, k-1$. Тогда

$$\|u \circ \varkappa\|_{C^{k,\alpha}(U)} \le d_U \|\nabla(u \circ \varkappa)\|_{C^{k-1,\alpha}(U)} + \|u \circ \varkappa\|_{C^{0,\alpha}(U)} .$$

Оценка второго слагаемого получена (см. (1.10)), а первое слагаемое равно

$$d_U \|(\varkappa')^* (\nabla u) \circ \varkappa\|_{C^{k-1,\alpha}(U)} ,$$

что, в силу предложения 1.7, не превосходит

$$c d_U m_\varkappa \|(\nabla u) \circ \varkappa\|_{C^{k-1,\alpha}(U)} \le$$

$$\leq c d_U m_{\varkappa} \|\nabla u\|_{C^{k-1,\alpha}(V)} \left(d_V^{-1} d_U m_{\varkappa}\right)^{k-1+\alpha} \leq$$
$$\leq c \left(d_V^{-1} d_U m_{\varkappa}\right)^{k+\alpha} \|u\|_{C^{k,\alpha}(V)}.$$

Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 1.10. <u>Пусть</u> U, V <u>и</u> W - <u>открытые подмножества</u> R^n <u>и</u> $\varkappa_1 : U \to V$, $\varkappa_2 : U \to W$ - <u>отображения класса</u> $C^{h,\alpha}$. <u>Тогда отображение</u> $\varkappa_2 \circ \varkappa_1 : U \to W$ <u>также принадлежит классу</u> $C^{h,\alpha}$ <u>и справедлива оценка</u>

$$m_{\varkappa_2 \circ \varkappa_1} \leq c\, m_{\varkappa_2} m_{\varkappa_1} \left(d_V^{-1} d_U m_{\varkappa_1}\right)^{h-1+\alpha}, \tag{1.11}$$

<u>где</u> C - <u>постоянная, зависящая лишь от</u> n, h <u>и</u> α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица $(\varkappa_2 \circ \varkappa_1)'$ равна произведению матриц $\varkappa_2' \circ \varkappa_1$ и $\varkappa_1'$. Элементы матрицы $\varkappa_2' \circ \varkappa_1$ принадлежат пространству $C^{h-1,\alpha}(U)$ (в силу предложения 1.9), а элементы матрицы $\varkappa_1'$ - по условию. Остается воспользоваться оценками (1.6) и (1.7).

П р е д л о ж е н и е 1.11. <u>Пусть</u> U, V - <u>открытые подмножества</u> R^n <u>и</u> $\varkappa : U \to V$ - <u>отображение класса</u> $C^{h,\alpha}$. <u>Если</u> $\inf |\det \varkappa'| > 0$, <u>то отображение</u> $\lambda = \varkappa^{-1}$ <u>также принадлежит классу</u> $C^{h,\alpha}$ <u>и справедлива оценка</u>

$$m_\lambda \leq d_V^{-1} d_U \left(c \|(\varkappa')^{-1}\|_{C^{h-1,\alpha}(U)} d_U^{-1} d_V\right)^{(h+2)!}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m_\varkappa(k)$ - сумма норм в $C^{k-1,\alpha}(U)$ элементов матрицы $\varkappa'$. Аналогично определяется число $m_\lambda(k)$. Непосредственно проверяется оценка

$$m_\lambda(1) \leq \|(\varkappa')^{-1}\|_{C^{0,\alpha}(U)} \left(\|(\varkappa')^{-1}\|_{C(U)} d_V d_U^{-1}\right)^{\alpha}, \tag{1.12}$$

где под нормой матрицы понимается сумма норм ее элементов. Пусть теперь $k > 1$. Имеем

$$m_\lambda(k) = \|\lambda'\|_{C^{k-1,\alpha}(V)} = \|(\varkappa')^{-1} \circ \lambda\|_{C^{k-1,\alpha}(V)} \leq$$
$$\leq c \left(d_U^{-1} d_V m_\lambda(k-1)\right)^{k-1+\alpha} \|(\varkappa')^{-1}\|_{C^{k-1,\alpha}(U)}.$$

Положим $a_k = d_U^{-1} d_V m_\lambda(k)$, $\mu = c \|(\varkappa')^{-1}\|_{C^{k-1,\alpha}(U)} d_U^{-1} d_V$.
Тогда

$$a_k \leq \mu a_{k-1}^{k-1+\alpha}, \quad k = 2, \ldots, h.$$

Итерируя это неравенство и используя оценку (1.12), получаем, что

$$a_k \leq \mu^{(k+2)!}$$

Предложение доказано.

Рассмотрим скалярный дифференциальный оператор в $U\subset R^n$

$$P(x,D_x)u=\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} p_\gamma(x)D_x^\gamma. \tag{1.13}$$

Предложение 1.12. <u>Оператор</u> P <u>осуществляет непрерывное отображение</u>

$$P: C^{h,\alpha}(U)\to C^{h-\mu,\alpha}(U),\ h\ge\mu,$$

<u>в том и только в том случае, если</u> $p_\gamma\in C^{h-\mu,\alpha}(U)$. <u>Справедливы оценки</u>

$$c^{-1}\|P\|_{C^{h,\alpha}(U)\to C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} d_U^{-|\gamma|}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le \tag{1.14}$$

$$\le c\|P\|_{C^{h,\alpha}(U)\to C^{h-\mu,\alpha}(U)}.$$

Доказательство. Достаточность. Пусть $u\in C^{h,\alpha}(U)$. Тогда в силу предложения 1.7,

$$\|Pu\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}}\|p_\gamma D^\gamma u\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le$$

$$\le c\max_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}}\left\{d_U^{-|\gamma|}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\right\}\times$$

$$\times\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} d_U^{|\gamma|}\|D^\gamma u\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le$$

$$\le c\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} d_U^{-|\gamma|}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)}.$$

Необходимость. Очевидно,

$$\|p_0\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}=\|P1\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le\|P\|.$$

Допустим, что $p_\gamma\in C^{h-\mu,\alpha}(U)$ при $|\gamma|\le\nu$ и что

$$\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\nu\}} d^{-|\gamma|}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le c\|P\|. \tag{1.15}$$

Покажем, что то же верно после замены ν на $\nu+1$, $\nu\le\mu-1$. Имеем при $|\delta|=\nu+1$

$$\|p_\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le c\|Px^\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}+$$

$$+\sum'_{\{\gamma:|\gamma|\le\nu\}}\|p_\gamma D^\gamma x^\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\le$$

$$\le c\|P\|\|x^\delta\|_{C^{h,\alpha}(U)} + c\sum_{\{\gamma:\gamma\le\delta\}}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}\|D^\gamma x^\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}.$$

Можно считать, что начало координат содержится в U. Тогда

$$\|D^\gamma x^\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)} \le c d_U^{|\delta-\gamma|}.$$

Следовательно,

$$d_U^{-|\delta|}\|p_\delta\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)} \le c\|P\| + c\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\nu\}} d_U^{-|\gamma|}\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)},$$

что вместе с (1.15) дает правую оценку (1.14). Предложение доказано.

Пусть P - дифференциальный оператор вида (1.13), $\varkappa: U\longrightarrow V$ - отображение класса $C^{h,\alpha}$, $\inf|\det\varkappa'|>0$ и Q - дифференциальный оператор в V, определенный равенством

$$Q(u\circ\varkappa^{-1}) = (Pu)\circ\varkappa^{-1}.$$

П р е д л о ж е н и е 1.13. Оператор $Q: C^{h,\alpha}(V)\to C^{h-\mu,\alpha}(V)$, $h\ge\mu$, непрерывен в том и только в том случае, если непрерывен оператор $P: C^{h,\alpha}(U)\to C^{h-\mu,\alpha}(U)$.

Справедливы оценки

$$c_1\frac{m_\varkappa^\mu}{(m_\varkappa m_{\varkappa^{-1}})^{h+\alpha}}\|P\| \le (d_V d_U^{-1})^\mu\|Q\| \le c_2\frac{(m_\varkappa m_{\varkappa^{-1}})^{h+\alpha}}{m_{\varkappa^{-1}}^\mu}\|P\|,$$

где c_1, c_2 - постоянные, не зависящие ни от P, ни от $\varkappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать правую оценку. Пусть $u=v\circ\varkappa$, где $v\in C^{h,\alpha}(V)$. Имеем

$$\|Qv\|_{C^{h-\mu,\alpha}(V)} = \|Q(u\circ\varkappa^{-1})\|_{C^{h-\mu,\alpha}(V)} = \|(Pu)\circ\varkappa^{-1}\|_{C^{h-\mu,\alpha}(V)}.$$

Согласно предложению 1.9,

$$\|(Pu)\circ\varkappa^{-1}\|_{C^{h-\mu,\alpha}(V)} \le c\left(d_U^{-1}d_V m_{\varkappa^{-1}}\right)^{h-\mu+\alpha}\|Pu\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)}.$$

Так как

$$\|Pu\|_{C^{h-\mu,\alpha}(U)} \le \|P\|\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} = \|P\|\|v\circ\varkappa\|_{C^{h,\alpha}(U)},$$

то, снова применяя предложение 1.9, получаем

$$\|Qv\|_{C^{h-\mu,\alpha}(V)} \le c\left(d_U d_V^{-1}m_\varkappa\right)^\mu (m_\varkappa m_{\varkappa^{-1}})^{h-\mu+\alpha}\|P\|\|v\|_{C^{h,\alpha}(U)}.$$

Предложение доказано.

3°. Еще о пространствах $N_\delta^{h,\alpha}$.

П р е д л о ж е н и е 1.14. Каково бы ни было число $a\in(0,1)$, норма в пространстве $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ эквивалентна норме

$$\sup_{\xi \in \mathcal{D}} |\eta|^{\delta-h-\alpha} \|u\|_{C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})}, \tag{1.16}$$

где $B_\rho(\xi)$ - открытый n-мерный шаг радиуса ρ с центром в точке ξ.

Это предложение - очевидное следствие предложения 1.1.

Будем говорить, что функция φ является мультипликатором в пространстве $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, если из условия $u \in N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ следует, что $\varphi u \in N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Пространство мультипликаторов в $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ обозначим через $\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и введем в нем норму

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} = \sup\left\{\|\varphi u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} : \|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le 1\right\}.$$

П р е д л о ж е н и е 1.15. Справедливо равенство

$$\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) = N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D}).$$

В частности, пространство $N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ - кольцо с единицей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) \supset N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ непосредственно следует из предложений 1.14 и 1.7.

Докажем обратное включение. Так как функция $x \to 1$ принадлежит пространству $N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, то, согласно предложению 1.2, функция $x \longrightarrow |y|^{h+\alpha-\delta}$ принадлежит пространству $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Следовательно, функция $x \to \varphi(x)|y|^{h+\alpha-\delta}$ - элемент $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ для всех $\varphi \in \mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Еще раз используя предложение 1.2, получаем, что $\varphi \in N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Предложение доказано.

Так же, как предложения 1.14 и 1.15, доказываются следующие два предложения о пространствах $N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)$.

П р е д л о ж е н и е 1.16. Каково бы ни было число $\alpha \in (0,1)$, норма в пространстве $N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)$ эквивалентна норме

$$\sup_{\xi \in \Gamma^\pm} |\eta|^{\delta-h-\alpha} \|u\|_{C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\Gamma^\pm)}. \tag{1.17}$$

П р е д л о ж е н и е 1.17. Справедливо равенство

$$\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm) = N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\Gamma^\pm),$$

где $\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)$ - пространство мультипликаторов в $N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)} = \sup\left\{\|\varphi u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)} : \|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^\pm)} \le 1\right\}.$$

Пусть P - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, определенный равенством (1.13).

П р е д л о ж е н и е 1.18. Оператор P осуществляет непрерывное отображение

$$P : N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) \longrightarrow N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D}), \quad h \geq \mu, \tag{1.18}$$

<u>в том и только в том случае, если</u> $P_\gamma \in N^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$. <u>Справедливы оценки</u>

$$c^{-1}\|P\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \leq \sum_{\{\gamma:|\gamma|\leq\mu\}} \|P_\gamma\|_{N^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})} \leq$$

$$\leq c\|P\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})}. \tag{1.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что норма отображения (1.18) эквивалентна норме

$$\sup_{\xi\in\mathcal{D}} \|P\|_{C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})\to C^{h-\mu,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} \tag{1.20}$$

при любом $a \in (0,1)$.

Оценка нормы отображения (1.18) сверху нормой (1.20), следует из предложения 1.16. Докажем обратную оценку. Пусть $\xi \in \mathcal{D}$ и u - функция из $C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})$ такая, что

$$\|u\|_{C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} = 1 \quad \text{и} \quad 2\|Pu\|_{C^{h-\mu,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} \geq \|P\|_{C^{h,\alpha}\to C^{h-\mu,\alpha}} \tag{1.21}$$

Обозначим через v продолжение функции u на $\mathcal{D}$ такое, что $\operatorname{supp} v \subset B_{b|\eta|}(\xi)$, где $b \in (a,1)$, и

$$\|v\|_{C^{h,\alpha}(B_{b|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} \leq C.$$

Имеем

$$\|Pv\|_{N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \geq c|\eta|^{\delta-h+\mu-\alpha} \|Pv\|_{C^{h-\mu,\alpha}(B_{b|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} \geq$$

$$\geq c|\eta|^{\delta-h+\mu-\alpha} \|Pu\|_{C^{h-\mu,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})} \geq$$

$$\geq c|\eta|^{\delta-h+\mu-\alpha} \|P\|_{C^{h,\alpha}\to C^{h-\mu,\alpha}}. \tag{1.22}$$

С другой стороны,

$$\|Pv\|_{N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \leq \|P\|_{N_\delta^{h,\alpha}\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}} \|v\|_{N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \leq$$

$$\leq c\|P\|_{N_\delta^{h,\alpha}\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}} |\eta|^{\delta-h+\mu-\alpha},$$

Поэтому

$$\|P\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}} \geq c\,\|P\|_{C^{h,\alpha}\to C^{h-\mu,\alpha}}\,.$$

Так как точка ξ произвольная, то норма отображения (1.18) оценивается снизу нормой (1.20). В силу предложения 1.11, норма (1.20) эквивалентна норме

$$\sum_{\{\gamma:|\gamma|\leq\mu\}} |\eta|^{-|\gamma|}\,\|p_\gamma\|_{C^{h-\mu,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})}\,.$$

Остается применить предложение 1.13. Доказательство закончено.

Обозначим через $\partial_\pm$ оператор сужения на $\Gamma^\pm$ и рассмотрим отображение

$$\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\ni u \to Qu = \sum_{\{\gamma:|\gamma|\leq\mu\}} q_\gamma(x')\left(\partial_\pm D_*^\gamma u\right), \tag{1.23}$$

где $x'\in\Gamma^\pm$. Из предложений 1.5 и 1.17 следует

П р е д л о ж е н и е 1.19. Оператор Q осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)$$

в том и только в том случае, если $q_\gamma\in\mathcal{N}_{h-|\gamma|+\alpha}^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)$. Справедливы оценки

$$\begin{gathered} c^{-1}\,\|Q\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)} \leq \\ \leq \sum_{\{\gamma:|\gamma|\leq\mu\}} \|q_\gamma\|_{\mathcal{N}_{h-|\gamma|+\alpha}^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)} \leq c\,\|Q\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)}\,. \end{gathered} \tag{1.24}$$

4°. Диффеоморфизмы класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Пусть $\varkappa$ - липшицево отображение двугранного угла на себя, переводящее ребро M на себя. Предположим, что элементы матрицы $\varkappa'$ принадлежат пространству $\mathcal{N}_{h-1+\alpha}^{h-1,\alpha}(\mathcal{D})$, где $h=1,2,\ldots$ и $0<\alpha<1$, а также, что $\det\varkappa'\geq c>0$. Будем говорить, что отображение $\varkappa$, подчиненное перечисленным требованиям, является диффеоморфизмом класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Из определения диффеоморфизма класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ следует, что для любой точки $x\in\overline{\mathcal{D}}\setminus M$

$$c^{-1}\leq|y|^{-1}|\eta|\leq c, \quad c=const\geq 1, \tag{1.25}$$

где $\varkappa(x)=(\eta,\zeta)$, а также, что функция $x\to|y|^{-1}|\eta|$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

П р е д л о ж е н и е 1.20. Если $u\in\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и $\varkappa$ - диффеоморфизм класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, то $u\circ\varkappa\in\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и справедлива оценка

$$\|u\circ \varkappa\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le c\,\|u\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1.14,

$$\|u\circ\varkappa\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le$$
$$\le c \sup_{\xi\in\mathcal{D}} |\eta|^{\delta-h-\alpha} \|u\circ\varkappa\|_{C^{h,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})},$$

где a - достаточно малое положительное число. Пусть $\varkappa(x)=\{y^{(1)},z^{(1)}\}$, $\varkappa(\xi)=\{\eta^{(1)},\zeta^{(1)}\}$. В силу (1.25), $c^{-1}\le|\eta|^{-1}|\eta^{(1)}|\le c$.

Кроме того, из определения диффеоморфизма класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и предложения 1.14 следует, что нормы элементов матрицы $\varkappa'$ в пространстве $C^{h-1,\alpha}(B_{a|\eta|}(\xi)\cap\mathcal{D})$ ограничены равномерно относительно ξ.

Отсюда и из предложения 1.9 получаем оценку

$$\|u\circ\varkappa\|_{N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le c \sup_{\xi\in\mathcal{D}} |\eta^{(1)}|^{\delta-h-\alpha} \|u\|_{C^{h,\alpha}(B_{ca|\eta^{(1)}|}(\xi^{(1)})\cap\mathcal{D})},$$

где $c=const>0$, $ca<1$.

Снова используя предложение 1.14, приходим к неравенству (1.26). Доказательство закончено.

П р е д л о ж е н и е 1.21. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ - диффеоморфизмы класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, то их композиция $\varkappa_1\circ\varkappa_2$ также является диффеоморфизмом класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица $(\varkappa_1\circ\varkappa_2)'$ равна произведению матриц $\varkappa_1'\circ\varkappa_2$ и $\varkappa_2'$. Элементы матрицы $\varkappa_1'\circ\varkappa_2$ принадлежат пространству $N_{h+\alpha-1}^{h-1,\alpha}(\mathcal{D})$ в силу предложения 1.20, а элементы матрицы $\varkappa_2'$ - по условию. Остается воспользоваться тем, что пространство $N_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ является кольцом (см. предложение 1.15). Доказательство закончено.

П р е д л о ж е н и е 1.22. Если $\varkappa$ - диффеоморфизм класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, то отображение $\varkappa^{-1}$ - также диффеоморфизм класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из предложений 1.11 и 1.14.

Пусть P - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, определенный равенством (1.13), $\varkappa$ - диффеоморфизм класса $N^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и Q - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, определенный равенством $Q(u\circ\varkappa^{-1})=(Pu)\circ\varkappa^{-1}$.

П р е д л о ж е н и е 1.23. Оператор $Q: N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})$, непрерывен в том и только в том случае, если непрерывен оператор P: $N_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to N_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})$, причем отношение норм P и Q ограничено и отделено от нуля постоянными, зависящими лишь от $\varkappa$.

Доказательство. Поскольку норма отображения (1.18) эквивалентна норме (1.20) (см. доказательство предложения 1.18), то требуемое утверждение следует из предложений 1.13 и 1.22.

Замечание. Отметим, что всякий C^1- диффеоморфизм $\mu : M \to M$ может быть продолжен до C^1-диффеоморфизма $\varkappa : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, принадлежащего классу $\mathcal{N}^{n,\alpha}(\mathcal{D})$ для любого $h \geq 1$.

Этот факт получается из следующих простых свойств оператора продолжения

$$(\mathcal{K}\sigma)(x) = |y|^{2-n} \int_M k\left(\frac{z-\zeta}{|y|}\right) \sigma(\zeta) d\zeta,$$

где $k \in C_0^\infty(M)$, $k(z) = 0$ при $|z| \geq 1$, $k \geq 0$ и

$$\int_M k(z) dz = 1.$$

1) Справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathcal{D}} |y|^{q-1} |(\nabla_q \mathcal{K}\sigma)(x)| \leq c \sup_{\zeta \in M} |\nabla \sigma(\zeta)| . \qquad (1.27)$$

Действительно, так как

$$\nabla_q \left(|y|^{2-n} k\left(\frac{z}{|y|}\right)\right) = O\left(|y|^{2-n-q}\right)$$

и

$$\int_M \nabla_q \left(|y|^{2-n} k\left(\frac{\zeta}{|y|}\right)\right) d\zeta = 0,$$

то

$$|(\nabla_q \mathcal{K}\sigma)(x)| \leq c|y|^{2-n-q} \int_{|z-\zeta|<|y|} |\sigma(\zeta) - \sigma(z)| d\zeta,$$

что и дает (1.27).

2) Если $\omega(\delta)$ - модуль непрерывности функции σ на M , то

$$|(\mathcal{K}\sigma)(x) - \sigma(z)| \leq \omega(|y|).$$

В самом деле,

$$|(\mathcal{K}\sigma)(x) - \sigma(z)| = |y|^{2-n} \left| \int_M k\left(\frac{z-\zeta}{|y|}\right)(\sigma(\zeta) - \sigma(z)) d\zeta \right| \leq$$

$$\leq |y|^{2-n} \int_M k\left(\frac{z-\zeta}{|y|}\right) \omega(|z-\zeta|) d\zeta \leq \omega(|y|).$$

Из свойств 1) и 2) следует, что отображение $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, определенное равенствами $y^{(1)} = y$, $z^{(1)} = \mathcal{K}\mu$, обладает следующими свойствами:

1. $$T|_M = \mu.$$

2. Элементы матрицы T' принадлежат классу $\mathcal{N}_{h}^{h,0}(\mathcal{D})$ при каждом $h=1,2,\ldots$ и, следовательно, любому классу $\mathcal{N}_{h+\alpha}^{h,\alpha h}(\mathcal{D})$.

3. В окрестности $\mathcal{U}$ ребра M определитель матрицы T' отличен от нуля.

Продолжая отображение $T|_{\mathcal{U}}$ с сохранением гладкости и невырожденности до отображения $\mathcal{X}:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$, получаем диффеоморфизм класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

5°. Пространства $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$. Обозначим через $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ $(0<\alpha<1$, $\delta\in R^{1}$, $h=0,1,\ldots)$ пополнение множества функций из $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ с компактными носителями в $\bar{\mathcal{D}}\setminus M$ по норме пространства $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$.

Аналогично определяются пространства $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$.

Ясно, что $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})\subset\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, однако обратное включение неверно. Действительно, функция $x\to|y|^{h+\alpha-\delta}$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ (норма (1.16) этой функции конечна). С другой стороны, из принадлежности $|y|^{h+\alpha-\delta}$ пространству $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ вытекало бы существование такой функции $v\in C_{0}^{\infty}(\bar{\mathcal{D}}\setminus M)$, что

$$\left\| |y|^{h+\alpha-\delta}-v\right\|_{\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})}<1/2.$$

Так как $v(x)=0$ при достаточно малом $|y|$, то

$$\sup_{x\in\mathcal{D}}|y|^{\delta-h-\alpha}\left||y|^{h+\alpha-\delta}-v(x)\right|\geq 1,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Пространство $\Lambda_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ "плотно" в $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ в следующем смысле.

П р е д л о ж е н и е 1.24. Для любой функции $u\in\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ существует последовательность $\{u_{\nu}\}_{\nu\geq1}$ функций из $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ с компактными носителями в $\bar{\mathcal{D}}\setminus M$, производные которых до порядка h сходятся в каждой точке $\bar{\mathcal{D}}\setminus M$ к соответствующим производным функции u и

$$\lim_{\nu\to\infty}\|u_{\nu}\|_{\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})}=\|u\|_{\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})},$$
$$\lim_{\nu\to\infty}\|\partial_{\pm}u_{\nu}\|_{\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})}=\|\partial_{\pm}u\|_{\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})}. \tag{1.28}$$

(Здесь имеется в виду любая из эквивалентных норм (1.1), (1.2) и (1.16) в $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и соответствующих норм в $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$).

Доказательству этого предложения предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

П р е д л о ж е н и е 1.25. Если $\{u_{\nu}\}_{\nu\geq1}$ – ограниченная последовательность в пространстве $\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ такая, что $\mathcal{D}^{\gamma}u_{\nu}$, $|\gamma|=0,\ldots,h$, сходятся в каждой точке $x\in\bar{\mathcal{D}}\setminus M$ к производным $\mathcal{D}^{\gamma}u$ некоторой функции u, то $u\in\mathcal{N}_{\delta}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ и

$$\|u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \leq \varliminf_{\nu\to\infty} \|u_\nu\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}. \tag{1.29}$$

Доказательство. Пусть x и ξ - произвольные фиксированные точки $\overline{\mathcal{D}} \setminus M$, $x \neq \xi$. Ясно, что

$$|x-\xi|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{h} \left| |y|^{\delta-h+k} \nabla_k u_\nu(x) - |\eta|^{\delta-h+k} \nabla_k u_\nu(\xi) \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{h} |y|^{\delta-h+k-\alpha} |\nabla_k u_\nu(x)| \leq \|u_\nu\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Переходя в обеих частях этого неравенства к нижнему пределу при $\nu \to \infty$, получаем (1.29). Предложение доказано.

Предложение 1.26. Существует последовательность $\{\chi_\nu\}_{\nu\geq 2}$ функций из $C_0^\infty(R^n \setminus M)$ такая, что $0 \leq \chi_\nu \leq 1$, $\chi_\nu(x) = 1$ на множестве $\{x : |z| \leq \nu^3,\ \nu^{-1} \leq |y| \leq \nu\}$ и

$$\sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{|\gamma|} |D_x^\gamma \chi_\nu(x)| \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \quad \text{при } |\gamma| > 0.$$

Доказательство. Пусть $\eta \in C_0^\infty(R^{n-1})$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x_1,\dots,x_{n-1}) = 1$ при $x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \leq 1$, $|x_{n-1}| \leq 1$ и $\eta(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0$ при $x_1^2 + \dots + x_{n-2}^2 \geq 2$ или $|x_{n-1}| > 2$. Положим

$$\chi_\nu(x) = \eta\left(\frac{z}{\nu^3}, \frac{\log|y|}{\log\nu}\right).$$

Достаточно показать, что

$$\sup_{x\in\mathcal{D}} |y|^{|\gamma_1|} D_z^{\gamma_1} (|y| D_{|y|})^{\gamma_2} \chi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \quad \text{при } |\gamma_1| + |\gamma_2| > 0.$$

Ясно, что

$$|y|^{|\gamma_1|} D_z^{\gamma_1} (|y| D_{|y|})^{\gamma_2} \chi_\nu =$$

$$= |y|^{|\gamma_1|} \nu^{-3|\gamma_1|} (\log\nu)^{-\gamma_2} (D^\gamma \eta)\left(\frac{z}{\nu^3}, \frac{\log|y|}{\log\nu}\right) =$$

$$= O(|\nu|^{-|\gamma_1|} (\log\nu)^{-\gamma_2}).$$

Предложение доказано.

Отсюда и из предложения 1.14 следует

Предложение 1.27. Если $\{\chi_\nu\}_{\nu\geq 2}$ - последовательность, введенная в предложении 1.26, то при $k = 1, 2, \dots$

$$\|\nabla_k \chi_\nu\|_{\mathcal{N}_{h+\alpha+k}^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$$

Доказательство предложения 1.24. Ограничимся рассмотрением нормировки (1.16). Пусть $U = B_{a|\eta|}(\xi) \cap \mathcal{D}$. Так как

$$\|\chi_\nu u\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le \|u\|_{C^{h,\alpha}(U)} +$$
$$+ c\sum_{j=1}^{k} |\eta|^{k+\alpha}\Big([\nabla_j \chi_\nu]_{\alpha,U} \|\nabla_{k-j} u\|_{C(U)} +$$
$$+ [\nabla_{k-j} u]_{\alpha,U} \|\nabla_j \chi_\nu\|_{C(U)}\Big) + c\sum_{j=1}^{k} |\eta|^{k+\alpha} \|\nabla_j \chi_\nu\|_{C(U)} \|\nabla_{k-j} u\|_{C(U)},$$

а в силу предложения 1.26

$$\sup_{\xi}\Big(|\eta|^{j+\alpha} [\nabla_j \chi_\nu]_{\alpha,U} + |\eta|^{j} \|\nabla_j \chi_\nu\|_{C(U)}\Big) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0,$$

то

$$\|\chi_\nu u\|_{C^{h,\alpha}(U)} \le (1+o(1))\|u\|_{C^{h,\alpha}(U)}$$

равномерно относительно ξ при $\nu \to \infty$. Поэтому

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \|\chi_\nu u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le \|u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Сравнивая это неравенство с (1.29), заканчиваем доказательство.

Пусть P - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, осуществляющий непрерывное отображение (1.18) и $\{\chi_\nu\}_{\nu\ge 2}$ - последовательность функций, введенная в предложении 1.26.

П р е д л о ж е н и е 1.28. Справедливо равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \|[P,\chi_\nu]\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} = 0,$$

где $[P,\chi_\nu] = P\chi_\nu - \chi_\nu P$, $h \ge \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы Лейбница и предложения 1.15 получаем

$$\|[P,\chi_\nu]u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \le \sum_{\{\gamma:|\gamma|\ge 1\}} \||y|^{|\gamma|} D^\gamma \chi_\nu\|_{\mathcal{N}_{h-\mu+\alpha}^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \times$$
$$\times \||y|^{-|\gamma|} P^{(\gamma)} u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Согласно предложению 1.27,

$$\||y|^{|\gamma|} D^\gamma \chi_\nu\|_{\mathcal{N}_{h-\mu+\alpha}^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} = o(1).$$

Используя предложение 1.18, получаем

$$\||y|^{-|\gamma|} P^{(\gamma)} u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \le c\sum_{\{\varkappa:|\varkappa|\le\mu-|\gamma|\}} \||y|^{-|\gamma|} P_{\gamma+\varkappa}\|_{\mathcal{N}_{h-|\varkappa|+\alpha}^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \times$$
$$\times \|u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})} \le c\,\|P\|\,\|u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Предложение доказано.

Так же доказывается следующее предложение об операторе Q, определенном равенством (1.23).

Предложение 1.29. Справедливо равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \|[Q,\chi_\nu]\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\Gamma^\pm)} = 0.$$

Предложение 1.30. Пусть P - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, определенный равенством (1.13), $\operatorname{ord}P<\mu$ и $p_\gamma\in\Lambda^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$. Тогда отображение

$$P:\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\longrightarrow\Lambda_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D}),\ h\geq\mu,$$

является вполне непрерывным. Аналогичное утверждение верно и для оператора Q.

Доказательство. Достаточно доказать равенство

$$\lim_{\nu\to\infty}\|(1-\chi_\nu)P\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})}=0,$$

что, в силу предложения 1.18, равносильно равенствам

$$\lim_{\nu\to\infty}\|(1-\chi_\nu)p_\gamma\|_{\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}=0,\quad |\gamma|\leq\operatorname{ord}P<\mu.$$

Пусть $\{p_\gamma^{(s)}\}_{s\geq1}$ - последовательность функций из $\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$ с компактными носителями в $\mathcal{D}$, сходящаяся к p_γ в пространстве $\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$. Тогда

$$\|(1-\chi_\nu)p_\gamma\|_{\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}\leq\|(1-\chi_\nu)(p_\gamma-p_\gamma^{(s)})\|_{\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}+$$
$$+\|(1-\chi_\nu)p_\gamma^{(s)}\|_{\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Остается заметить, что $\|(1-\chi_\nu)\|_{\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-\mu+\alpha}(\mathcal{D})}\leq\mathrm{const}$, и потому первое слагаемое справа стремится к нулю при $s\to\infty$, а второе обращается при больших ν в нуль. Предложение доказано.

6°. Пространства $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)$. Назовем положительную в $\mathcal{D}$ функцию q весовой функцией класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$, если $q^{-1}|y|\partial q/\partial x_i\in\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$ при всех $i=1,\dots,n$ и положим

$$|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}=\sum_{i=1}^{n}\|q^{-1}|y|\partial q/\partial x_i\|_{\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Ясно, что вместе с функцией q весовой является и функция $1/q$ и $|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}=|q^{-1}|_{h,\alpha,\mathcal{D}}$.

Предложение 1.31. Если $\varkappa:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ - диффеоморфизм класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ и q - весовая функция, то $q\circ\varkappa$ - также весовая функция и

$$|q\circ\varkappa|_{h,\alpha,\mathcal{D}}\leq c|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}.$$

Доказательство. Пусть $x = x(\xi)$. Тогда

$$(q\circ x)^{-1}|\eta|\,\frac{\partial(q\circ x)}{\partial \xi_i} = \frac{|\eta|}{|y|}(q\circ x)^{-1}|y|\frac{\partial q}{\partial x_j}\circ x\cdot\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}.$$

Остается воспользоваться тем, что $\xi\to|y|^{-1}|\eta|$ – функция из класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}_{h+\alpha}$ ($\mathcal{D}$) и $\partial x_j/\partial\xi_i \in \mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$, а также инвариантностью пространства $\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$ относительно диффеоморфизмов класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$. Предложение доказано.

Отметим, что функция $x\to|y|^{\delta(x)}$ является весовой, если $\delta\in\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$ и $|y|\log|y|\cdot\partial\delta/\partial x_i\in\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$ (оба эти условия инвариантны относительно диффеоморфизмов класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$).

Предложение 1.32. <u>Если</u> q - <u>весовая функция, то для всех мультииндексов</u> γ <u>порядков</u> $|\gamma|\le h$

$$q^{-1}|y|^{|\gamma|}D^{\gamma}q\in\mathcal{N}^{h-|\gamma|,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D}) \tag{1.30}$$

<u>и справедлива оценка</u>

$$\|q^{-1}|y|^{|\gamma|}D^{\gamma}q\|_{\mathcal{N}^{h-|\gamma|,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}\le c|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}\left(1+|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}\right)^{|\gamma|-1}.$$

Доказательство. Пусть предложение доказано для всех мультииндексов порядка меньше $|\gamma|$. Тогда

$$\iota q^{-1}(|y|D)^{\gamma}q=|y|\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma-|y|q^{-1}\cdot\frac{\partial q}{\partial x_i}\sigma, \tag{1.31}$$

где $\sigma=q^{-1}(|y|D)^{\gamma'}q$, $|\gamma'|=|\gamma|-1$. По предположению, $\sigma\in\mathcal{N}^{h-|\gamma|+1,\alpha}_{h-|\gamma|+1+\alpha}(\mathcal{D})$, а $|y|q^{-1}\partial q/\partial x_i\in\mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(\mathcal{D})$ по определению весовой функции. Так как оператор $|y|\partial/\partial x_i$: $\mathcal{N}^{h-|\gamma|+1,\alpha}_{h-|\gamma|+1+\alpha}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}^{h-|\gamma|,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$ непрерывен и пространство $\mathcal{N}^{h,\alpha}_{h+\alpha}(\mathcal{D})$ расширяется с уменьшением h, то левая часть равенства (1.31) принадлежит пространству $\mathcal{N}^{h-|\gamma|,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})$.

Из (1.31) следует оценка

$$|q^{-1}(|y|D)^{\gamma}q|_{\mathcal{N}^{h-|\gamma|,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(\mathcal{D})}\le c|\sigma|_{\mathcal{N}^{h-|\gamma|+1,\alpha}_{h-|\gamma|+1+\alpha}(\mathcal{D})}\left(1+|q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}\right).$$

Первый сомножитель справа оценивается по индукционному предположению. Предложение доказано.

Обозначим через $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)$ пространство $\{u: q^{-1}u\in\mathcal{N}^{h,\alpha}_0(\mathcal{D})\}$, снабженное нормой

$$|u|_{\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)}=|q^{-1}u|_{\mathcal{N}^{h,\alpha}_0(\mathcal{D})}.$$

Аналогично определяются пространства $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm},q)$.

Из предложений 1.20 и 1.31 следует, что пространства $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)$

и $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm}, q)$ инвариантны относительно диффеоморфизмов класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

Предложение 1.33. Пусть P - дифференциальный оператор в $\mathcal{D}$, определенный равенством (1.13) и осуществляющий непрерывное отображение (1.18), а q - весовая функция класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$. Тогда справедлива оценка

$$\| q^{-1}Pq - P\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) \to \mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})} \leq c\, |q|_{h,\alpha,\mathcal{D}} \times$$
$$\times \left(1 + |q|_{h,\alpha,\mathcal{D}}\right)^{\mu-1} \cdot \|P\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D}) \to \mathcal{N}_\delta^{h-\mu,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Аналогичное утверждение верно для граничного оператора Q.

Доказательство. Имеем

$$\|(q^{-1}Pq - P)u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu+1,\alpha}(\mathcal{D})} \leq c \sum_{\{\gamma : |\gamma| \geq 1\}} \| q^{-1} D^\gamma q \cdot P^{(\gamma)} u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu+1,\alpha}(\mathcal{D})} \leq$$
$$\leq c \sum_{\{\gamma : |\gamma| \geq 1\}} | q^{-1} |y|^{|\gamma|} D^\gamma q |_{\mathcal{N}_{h-|\gamma|+\alpha}^{h-|\gamma|,\alpha}(\mathcal{D})} \| |y|^{-|\gamma|} P^{(\gamma)} u \|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu+1,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Как показано в доказательстве предложения 1.28,

$$\| |y|^{-|\gamma|} P^{(\gamma)} u \|_{\mathcal{N}_\delta^{h-\mu+1,\alpha}(\mathcal{D})} \leq c\, \|P\| \|u\|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}.$$

Применяя предложение 1.31, заканчиваем доказательство.

7°. Пространства $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U)$ и $\mathcal{N}^{h,\alpha}(U, q)$. Пусть U - произвольное открытое подмножество $\overline{\mathcal{D}}$. Будем говорить, что функция $u: U \to C^1$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U)$, если $\eta u \in \mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ для всех $\eta \in \mathcal{N}_{h+\alpha}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ с компактными носителями в U (функцию ηu считаем продолженной нулем на $\mathcal{D}$).

В пространстве $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U)$ можно ввести топологию с помощью полунорм $u \to |\eta u|_{\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})}$.

Аналогично определяется пространство $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U \cap \Gamma^{\pm})$.

Из предложений 1.3-1.5, 1.15, 1.17-1.19 о пространствах $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\mathcal{D})$, $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(\Gamma^{\pm})$ непосредственно следуют аналогичные предложения о пространствах $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U)$, $\mathcal{N}_\delta^{h,\alpha}(U \cap \Gamma^{\pm})$.

Пусть $\varkappa$ - локально липшицево отображение открытого подмножества U двугранного угла $\overline{\mathcal{D}}$ на открытое множество $V \subset \overline{\mathcal{D}}$ такое, что $\varkappa(U \cap M) = V \cap M$. Предположим, что элементы матрицы $\varkappa'$ принадлежат пространству $\mathcal{N}_{h-1+\alpha}^{h-1,\alpha}(U)$, $h \geq 1$, а также, что $\det \varkappa' \geq const > 0$ на любом компакте в U. Тогда будем говорить, что отображение $\varkappa$ является диффеоморфизмом класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(U)$.

Из предложений 1.20-1.23 о диффеоморфизмах класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D})$ следуют аналогичные предложения о диффеоморфизмах класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(U)$.

Будем говорить, что функция $q: U \to R^1$ является весовой функцией в U класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$, если $q^{-1}|y|\partial q/\partial x_i \in \mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(U)$ при всех $i=1,\ldots,n$.

Введем еще пространство $\mathcal{N}^{h,\alpha}(U,q)$ функций $u: U \to C^1$ таких, что $\eta u \in \mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)$ для всех $\eta \in \mathcal{N}^{h,\alpha}_{h+\alpha}(\mathcal{D})$ с компактными носителями в U.

Сказанное в 6° о пространствах $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{D},q)$ с очевидными изменениями переносится на $\mathcal{N}^{h,\alpha}(U,q)$.

§ 2. Краевая задача в двугранном угле

1°. Постановка задачи. Скалярный дифференциальный оператор $P(x,D_x)$ порядка μ в двугранном угле $\mathcal{D}$ назовем каноническим оператором класса $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu}(\mathcal{D})$, если он допускает представление вида

$$P(x,D_x)=|y|^{-\mu}\sum_{\{\sigma,\tau:|\sigma|+\tau\le\mu\}} P_{\sigma,\tau}(\omega,D_\omega)(|y|D_z)^{\sigma}(|y|D_{|y|})^{\tau},$$

где $P_{\sigma,\tau}(\omega,D_\omega)$ - дифференциальный оператор порядка $\mu-|\sigma|-\tau$ на дуге $\Omega=\{\omega: 2|\omega|<\alpha\}$ с коэффициентами из $C^{h-\mu,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Если $P(x,D_x)$ - канонический оператор класса $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu}(\mathcal{D})$, то коэффициенты p_γ из представления

$$P(x,D_x)=\sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} p_\gamma(x)D_x^\gamma$$

принадлежат классу $\mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-\mu+\alpha}(\mathcal{D})$.

Операторы $Q^{\pm}$ порядков $\nu^{\pm}$ назовем каноническими граничными операторами, если они допускают представления вида

$$Q^{\pm}=|y|^{-\nu^{\pm}}\partial_{\pm}\sum_{\{\sigma,\tau:|\sigma|+\tau\le\nu^{\pm}\}} q^{\pm}_{\sigma,\tau}(D_\omega)(|y|D_z)^{\sigma}(|y|D_{|y|})^{\tau}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}^{\pm}$ матричные операторы размеров $N\times N$ и $m\times N$ соответственно с элементами $\mathcal{L}_{k,j}$ и $\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}$. Предположим, что $\mathcal{L}_{k,j}$ - канонический оператор класса $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{s_k+t_j}(\mathcal{D})$, а $\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}$ - канонические граничные операторы порядков $\sigma^{\pm}_k+t_j$; здесь $s_k, t_j, \sigma^{\pm}_k$ - целые числа такие, что $s_k\le 0$, $t_j\ge 0$, $s_1+t_1+\ldots+s_N+t_N=2m$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}u=f \quad \text{на } \mathcal{D},$$
$$\mathcal{B}^{\pm}u=f^{\pm} \quad \text{на } \Gamma^{\pm}, \tag{2.1}$$

где $u=(u_1,\ldots,u_N)$, $f=(f_1,\ldots,f_N)$, $f^{\pm}=(f^{\pm}_1,\ldots,f^{\pm}_m)$.

Допустим, что оператор $\mathcal{L}$ - эллиптический в смысле Дуглиса-Ниренберга и что краевые условия накрывают $\mathcal{L}$ на $\Gamma^{\pm}$.

Обозначим через $V^{h}_{2,\beta}(\mathcal{D})$ пространство, полученное пополнением множества $C_0^{\infty}(\bar{\mathcal{D}}\setminus M)$ по норме

$$\|u\|_{V^h_{2\beta}(\mathcal{D})}=\Big(\sum_{k=0}^{h}\int_{\mathcal{D}}|y|^{2(\beta-h+|k|)}|\nabla_k u|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

где $x=(y,z)$, $\beta\in R^1$, $\nabla_k=\{\partial^k/\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}\}$, $k_1+\dots+k_n=k$.

Через $V^{h-\frac{1}{2}}_{2,\beta}(\Gamma^{\pm})$ $(h\geq 1)$ обозначим пространство следов на $\Gamma^{\pm}$ функций из $V^{h}_{2,\beta}(\mathcal{D})$.

Пусть h_0 - неотрицательное целое число, удовлетворяющее неравенствам $h_0-\sigma_j^{\pm}\geq 1$. Для любого целого $h\geq h_0$ введем пространства вектор-функций

$$V^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})=\prod_{j=1}^{N}V^{h+t_j}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D}),\quad V^{h-\vec{s}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})=\prod_{j=1}^{N}V^{h-s_j}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D}),$$

$$V^{h-\vec{\sigma}^{\pm}-\frac{1}{2}}_{2,\beta+h-h_0}(\Gamma^{\pm})=\prod_{j=1}^{m}V^{h-\sigma_j^{\pm}-\frac{1}{2}}_{2,\beta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}).$$

Оператор краевой задачи (2.1) осуществляет непрерывное отображение

$$\{\mathcal{L},\mathcal{B}^{\pm}\}:V^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})\to V^{h-\vec{s}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})\times\prod_{\pm}\prod V^{h-\vec{\sigma}^{\pm}-\frac{1}{2}}_{2,\beta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}). \tag{2.2}$$

Введем еще пространство $E^{h}_{2,\beta}(K)$ функций в угле K, полученное пополнением множества $C_0^{\infty}(\bar{K}\setminus 0)$ по норме

$$\|u\|_{E^h_{2,\beta}(K)}=\Big(\sum_{\{\gamma:|\gamma|\leq h\}}\int_K|y|^{2\beta}\big(1+|y|^{2(|\gamma|-h)}\big)|D_y^{\gamma}u(y)|^2dy\Big)^{\frac{1}{2}},$$

и через $E^{h-\frac{1}{2}}_{2,\beta}(\gamma^{\pm})$ обозначим пространство следов на сторонах $\gamma^{\pm}$ угла K функций из $E^{h}_{2,\beta}(K)$, $h\geq 1$.

Запишем операторы $\mathcal{L}_{k,j}$ и $\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}$ в виде

$$|y|^{-(s_k+t_j)}\mathcal{L}_{k,j}(\omega,D_\omega,|y|D_z,|y|D_{|y|})\text{ и }|y|^{-(\sigma_k^{\pm}+t_j)}\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}(D_\omega,|y|D_z,|y|D_{|y|})$$

и сопоставим задаче (2.1) краевую задачу в угле K:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}(D_y,\theta)v=g\quad\text{в } K,\\&\mathcal{B}^{\pm}(D_y,\theta)v=g^{\pm}\quad\text{на } \gamma^{\pm},\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $\mathcal{L}(D_y,\theta)$ и $\mathcal{B}^{\pm}(D_y,\theta)$ - матричные операторы с элементами $\mathcal{L}_{k,j}(D_y,\theta)=|y|^{-(s_k+t_j)}\mathcal{L}_{k,j}(\omega,D_\omega,|y|\theta,|y|D_{|y|})$ и $\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}(D_y,\theta)=|y|^{-(\sigma_k^{\pm}+t_j)}\mathcal{B}^{\pm}_{k,j}(D_\omega,|y|\theta,|y|D_{|y|})$, а θ - произвольная точка единичной $(n-3)$-мерной сферы S^{n-3}.

Оператор $A(\theta)=\{\mathcal{L}(D_y,\theta),\mathcal{B}^{\pm}(D_y,\theta)\}$ задачи (2.3) осуществляет непрерывное отображение

$$A_h(\theta): E^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(K) \to E^{h-\vec{s}}_{2,\beta+h-h_0}(K) \times \prod_{\pm} E^{h-\sigma^{\pm}-\frac{1}{2}}_{2,\beta+h-h_0}(\gamma^{\pm}), \qquad (2.4)$$

где обозначения $E^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(K)$ и т.д. вводятся аналогично обозначениям $V^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})$ и т.д.

Введем оператор $\mathfrak{A}(\lambda)=\{L(\lambda), B^{\pm}(\lambda)\}$ краевой задачи на дуге Ω с комплексным параметром λ, где

$$L(\lambda) = \|\mathcal{L}_{k,j}(\omega, D_\omega, 0, \lambda - it_j)\|, B^{\pm}(\lambda) = \|B^{\pm}_{k,j}(D_\omega, 0, \lambda - it_j)\|. \qquad (2.5)$$

2°. Разрешимость и свойства решений задачи (2.1) в пространствах $V^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})$.

Сформулируем некоторые утверждения о задаче (2.1) в пространствах $V^{h+\vec{t}}_{2,\beta+h-h_0}(\mathcal{D})$, используемые в дальнейшем.

Т е о р е м а 2.1 (см. [11, 12]). Оператор (2.2) осуществляет изоморфизм при $h=h_0, h_0+1, \ldots$ в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

(i) прямая $Im\,\lambda=\beta+1-h_0$ не содержит собственных чисел пучка $\mathfrak{A}(\lambda)$;

(ii) подпространства $\ker A_{h_0}(\theta)$ и $\operatorname{coker} A_{h_0}(\theta)$ тривиальны при любом $\theta\in S^{n-3}$.

Предположим, что выполнены условия (i) и (ii), и будем считать, что $k_- < Im\,\lambda < k_+$ - наибольшая полоса на комплексной плоскости $\{\lambda\}$, содержащая прямую $Im\,\lambda=\beta+1-h_0$ и свободная от спектра пучка $\mathfrak{A}(\lambda)$.

3°. Разрешимость и свойства решений задачи (2.1) в пространствах $\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$.

Введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{N}^{h+t_j,\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D}),\ \mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{N}^{h-s_j,\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D}),$$

$$\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}) = \prod_{j=1}^{m} \mathcal{N}^{h-\sigma_j^{\pm},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}),$$

где $\delta\in R^1$.

Т е о р е м а 2.2. Пусть выполнены условия (i) и (ii) теоремы 2.1, u - решение задачи (2.1) из пространства $V^{h_0+\vec{t}}_{2,\beta}(\mathcal{D})$ и

$$f\in \mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D}),\ f^{\pm}\in \mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}),\quad h\geq h_0, \qquad (2.6)$$

где δ - произвольное число из интервала $(h_0+k_-+\alpha,\ h_0+k_++\alpha)$. Тогда $u\in \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta-h-h_0}(\mathcal{D})} \leq c\Big(\|f\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})} + \sum_{\pm}\|f^{\pm}\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm})}\Big). \qquad (2.7)$$

Т е о р е м а 2.3. Пусть выполнены условия (i) и (ii) теоремы 2.1. Тогда оператор краевой задачи (2.1) осуществляет изоморфизм

$$\{\mathcal{L},\mathcal{B}^{\pm}\} : \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})\to\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})\times\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm}),$$

где δ - любое число из интервала $(h_0+k_-+\alpha,\ h_0+k_++\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия (2.6) и $\{f_\nu\}_{\nu\geq 1}$ и $\{f^{\pm}_{\nu}\}_{\nu\geq 1}$ - последовательности функций из пространств $\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$ и $\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm})$ с компактными носителями, построенные с помощью предложения 1.24 для функций f и $f^{\pm}$. Тогда

$$f_\nu\in V^{h_0-\vec{s}}_{2,\beta}(\mathcal{D}),\ f^{\pm}_{\nu}\in V^{h_0-\vec{\sigma}-\frac{1}{2}}_{2,\beta}(\Gamma^{\pm}), \tag{2.8}$$

где β - любое число из интервала $(h_0+k_--1,\ h_0+k_++1)$. Согласно теореме 2.1, существует решение $u_\nu\in V^{h_0+\vec{t}}_{2\beta}(\mathcal{D})$ задачи (2.1) с правыми частями f_ν и $f^{\pm}_{\nu}$. По теореме 2.2, $u_\nu\in\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$, и справедлива оценка (2.7), где u, f и $f^{\pm}$ заменяются на u_ν, f_ν и $f^{\pm}_{\nu}$ соответственно. Применяя (1.28), получаем

$$\varlimsup_{\nu\to\infty}\|u_\nu\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})}\leq c\left(\|f\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})}+\sum_{\pm}\|f^{\pm}\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm})}\right).$$

С помощью диагонального процесса из последовательности $\{u_\nu\}_{\nu\geq 1}$ можно выделить подпоследовательность вектор-функций такую, что производные компонент этих функций, входящие в норму в $\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$, сходятся в каждой точке $\bar{\mathcal{D}}\setminus M$ к соответствующим производным компонент некоторой функции u. В силу предложения 1.25, $u\in\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$, и справедлива оценка (2.7).

Докажем теперь единственность решения задачи (2.1) в пространстве $\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})$. Пусть u - решение однородной задачи и $\{\chi_\nu\}_{\nu\geq 2}$ - последовательность, построенная в предложении 1.26. Тогда $\chi_\nu u\in V^{h+\vec{t}}_{2,\beta}(\mathcal{D})$ и, по теореме 2.2, имеет место неравенство

$$\|\chi_\nu u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})}\leq c\Big(\|[\mathcal{L},\chi_\nu]u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\mathcal{D})}+$$

$$+\sum_{\pm}\|[\mathcal{B}^{\pm},\chi_\nu]u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta+h-h_0}(\Gamma^{\pm})}\Big).$$

Из предложений 1.28 и 1.29 следует, что правая часть стремится к нулю. Поэтому $u=0$ в $\mathcal{D}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.4. Пусть выполнены условия (i) и (ii) теоремы 2.1 и пусть

$$f\in \mathcal{N}^{h_1-\vec{s},\alpha_1}_{\delta^{(1)}+h_1-h_0}(\mathcal{D})\cap \mathcal{N}^{h_2-\vec{s},\alpha}_{\delta^{(2)}+h-h_0}(\mathcal{D}),\ f^{\pm}\in \mathcal{N}^{h_1-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta^{(1)}+h-h_0}(\Gamma^{\pm})\cap \mathcal{N}^{h_2-\vec{\sigma},\alpha}_{\delta^{(2)}+h-h_0}(\Gamma^{\pm}), \tag{2.9}$$

где $\delta^{(i)}$ - любое число из интервала $(k_0+k_-+\alpha_i,\ k_0+k_++\alpha_i)$. Тогда решение u задачи (2.1) из пространства $\mathcal{N}^{h_1-\vec{t},\alpha_1}_{\delta^{(1)}+h_1-h_0}(\mathcal{D})$ принадлежит пространству $\mathcal{N}^{h_2+\vec{t},\alpha_2}_{\delta^{(2)}+h_2-h_0}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Пусть $\{\chi_\nu\}_{\nu\geq 2}$ - последовательность, построенная в предложении 1.26, и $f_\nu=\chi_\nu f$, $f^{\pm}_\nu=\chi_\nu f^{\pm}$. Ясно, что выполнены условия (2.8). Обозначим через u_ν решение задачи (2.1) с правыми частями $f_\nu, f^{\pm}_\nu$, принадлежащее пространству $V^{h_0+\vec{t}}_{2,\beta}(\mathcal{D})$. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что последовательность вектор-функций $\{u_\nu\}$ вместе с производными поточечно сходится к решению u и его производным.

По теореме 2.2, справедливо неравенство

$$\|u_\nu\|_{\mathcal{N}^{h_2+\vec{t},\alpha_2}_{\delta^{(2)}+h-h_0}(\mathcal{D})}\leq$$

$$\leq c\left(\|f_\nu\|_{\mathcal{N}^{h_2-\vec{s},\alpha}_{\delta^{(2)}+h_2-h_0}(\mathcal{D})}+\sum_{\pm}\|f^{\pm}_\nu\|_{\mathcal{N}^{h_2-\vec{s},\alpha}_{\delta^{(2)}+h_2-h_0}(\Gamma^{\pm})}\right).$$

Из доказательства предложения 1.24 следует, что нормы f_ν и $f^{\pm}_\nu$ стремятся к тем же нормам функций f и $f^{\pm}$. Применяя к левой части предложение 1.25, заканчиваем доказательство теоремы.

§ 3. Краевые задачи на многообразиях класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$

1°. Многообразия класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$. Пусть G - хаусдорфово топологическое пространство и пусть $\{\mathcal{U}_j\}$ - семейство открытых множеств, образующих покрытие G. Допустим, что для каждого j определен гомеоморфизм x_j множества $\mathcal{U}_j$ на открытое подмножество $\overline{\mathcal{D}}$. Пару $(\mathcal{U}_j, x_j)$, как обычно, будем называть локальной картой на G, а множество всех карт $\{(\mathcal{U}_j, x_j)\}$ - атласом G.

Атлас $\{(\mathcal{U}_j, x_j)\}$, по определению, принадлежит классу $\mathcal{N}^{h,\alpha}$, если для любых двух карт $(\mathcal{U}_j, x_j), (\mathcal{U}_k, x_k)$ таких, что $\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k\neq\emptyset$, отображение

$$x_j\circ x_k^{-1}: x_k(\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k)\to x_j(\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k)$$

является диффеоморфизмом класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}(x_k(\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k))$.

Два атласа класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ называются эквивалентными, если их объединение принадлежит тому же классу. Множество эквивалентных атласов класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ образует дифференциальную структуру на G класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$. Пространство G, снабженное такой структурой, называется многообразием класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ подмножество точек из G, образы которых при координатных отображениях x_j попадают на ребро M двугранного угла $\mathcal{D}$. Дифференциальная структура класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ на G индуцирует на $\mathcal{M}$ липшицеву структуру.

Отметим, что каким бы ни было число h, вообще говоря, нельзя ожидать, что индуцированная структура на $\mathcal{M}$ обладает более высокой гладкостью, чем C^1. В самом деле, пусть $\mu : M \to M$ - произвольный диффеоморфизм класса C^1 ребра M двугранного угла $\mathcal{D}$ и пусть $x : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ - диффеоморфизм, построенный в замечании из 4° § 1. Как было показано в замечании, x принадлежит классу $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ при каждом $h = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим два атласа в $\mathcal{D}$, каждый из которых содержит лишь одну локальную карту $(\mathcal{D}, 1)$ и $(\mathcal{D}, x)$ соответственно. Очевидно, эти атласы принадлежат одной дифференциальной структуре класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ при любом h.

Индуцированная структура на M содержит как атлас $(M, 1)$, так и атлас (M, μ), и потому не обладает более высокой гладкостью, чем C^1.

2°. Функциональные пространства на G и ∂G. Пусть G - компактное многообразие класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$, $\{(\mathcal{U}, x)\}$ - некоторый конечный атлас и $\{\varphi\}$ - разбиение единицы, подчиненное этому атласу и такое, что

$$\varphi \circ x^{-1} \in \mathcal{N}^{h,\alpha}_{h+\alpha}\,(x(\mathcal{U}))$$

для каждой окрестности $\mathcal{U}$.

Функция $q : G \setminus \mathcal{M} \to R^1_+$ называется весовой функцией класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ на многообразии G, если для любой карты $\{\mathcal{U}, x\}$ функция $q \circ x^{-1}$ является весовой функцией в $x(\mathcal{U})$ класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

Будем говорить, что функция u, определенная на $G \setminus \mathcal{M}$, принадлежит пространству $\mathcal{N}^{h,\alpha}(G, q)$, если

$$u \circ x^{-1} \in \mathcal{N}^{h,\alpha}(x(\mathcal{U}), q)$$

для любой координатной окрестности $\mathcal{U}$ и

$$\|u\|_{\mathcal{N}^{h,\alpha}(G,q)} = \sup_{\mathcal{U}} \|(\varphi u) \circ x^{-1}\|_{\mathcal{N}^{h,\alpha}(x(\mathcal{U}),q)}.$$

Из сказанного в п.5° § 1 следует, что если для определения пространства $\mathcal{N}^{h,\alpha}(G, q)$ использовать другой эквивалентный атлас и другое разбиение единицы, то получится то же пространство, снабженное эквивалентной нормой.

Аналогично определяется пространство $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\Gamma_j, q)$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_T$ - связные компоненты множества $\partial G \setminus \mathcal{M}$.

Если $q \equiv 1$, то пространства $\mathcal{N}^{h,\alpha}(G, q)$ и $\mathcal{N}^{h,\alpha}(\Gamma_i, q)$ будем обозначать через $\mathcal{N}^{h,\alpha}_0(G)$ и $\mathcal{N}^{h,\alpha}_0(\Gamma_i)$.

3°. Дифференциальные операторы на G. Будем говорить, что дифференциальный оператор P порядка μ на многообразии G класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ принадлежит классу $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu}(G)$, если он осуществляет непрерывное отображение

$$P: \mathcal{N}^{h,\alpha}(G,q) \longrightarrow \mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}(G,q), \quad \mu \le h,$$

для любой весовой функции q класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ на G.

Согласно предложениям 1.18 и 1.33, это определение означает, что в любой локальной карте $\{\mathcal{U}, x\}$ имеет место представление

$$(Pu)\circ x^{-1} = \sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu\}} p_\gamma(x) D_x^\gamma (u\circ x^{-1}),$$

где $p_\gamma \in \mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(x(\mathcal{U}))$.

На функциях, определенных в окрестности каждой компоненты Γ_i в $G\setminus\mathcal{M}$, рассмотрим граничный оператор Q, допускающий в любой локальной карте $(\mathcal{U}, x)$, такой, что $\mathcal{U}\cap\Gamma_i \ne \emptyset$, представление

$$(Qu)\circ x^{-1} = \sum_{\{\gamma:|\gamma|\le\mu_j\}} q_\gamma(x')\partial D_x^\gamma(u\circ x^{-1}),$$

где $x' \in x(\mathcal{U}\cap\Gamma_i)$, ∂ - оператор сужения на $x(\mathcal{U}\cap\Gamma_i)$.

Будем говорить, что оператор Q принадлежит классу $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu_1,\ldots,\mu_T}(G,\partial G)$, если он осуществляет непрерывные отображения

$$Q: \mathcal{N}^{h,\alpha}(\mathcal{U},q) \longrightarrow \mathcal{N}^{h-\mu_i}(\mathcal{U}\cap\Gamma_i, q), \; i=1,\ldots,T, \tag{3.1}$$

для любой весовой функции q на G класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

В силу предложений 1.19 и 1.33, $Q \in \mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu_1,\ldots,\mu_T}(G,\partial G)$ в том и только в том случае, если $q_\gamma \in \mathcal{N}^{h-\mu,\alpha}_{h-|\gamma|+\alpha}(x(\mathcal{U}\cap\Gamma_i))$.

П р е д л о ж е н и е 3.1. <u>Пусть</u> $\mathcal{V}$ <u>и</u> $\mathcal{W}$ - <u>открытые подмножества многообразия</u> G <u>и</u> $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{W}$. <u>Существует неотрицательная функция</u> φ <u>, равная единице на</u> $\mathcal{V}$ <u>и нулю вне</u> $\mathcal{W}$ <u>и такая, что для любой локальной карты</u> $\{\mathcal{U}, x\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\circ x^{-1}) \in \mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(x(\mathcal{U})), \quad 1\le i\le n. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать предложение для случая, когда $\overline{\mathcal{W}}$ содержится в какой-нибудь локальной карте. Обозначим через Φ неотрицательную функцию из $C_0^\infty(\mathcal{D})$, равную единице на $x(\mathcal{V})$ и нулю вне $x(\mathcal{W})$, и положим $\varphi = \Phi\circ x$. Остается воспользоваться предложением 1.20. Доказательство закончено.

Из предложения 3.1 следует, что для любого атласа $\{(\mathcal{U}_j, x_j)\}$ многообразия G существует подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_j\circ x_k^{-1}) \in \mathcal{N}^{h-1,\alpha}_{h-1+\alpha}(x_k(\mathcal{U}_k)), \quad 1\le i\le n,$$

для всех j и k. Такие разбиения единицы будем называть разбиениями класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$.

П р е д л о ж е н и е 3.2. <u>Пусть</u> φ - <u>функция на</u> G <u>, удовлетворяю-</u>

щая условию (3.2) для любой локальной карты, и P - скалярный дифференциальный оператор из класса $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu}(G), \mu \leq h$. Тогда коммутатор

$$[P,\varphi] : \mathcal{N}_0^{h,\alpha}(G) \to \mathcal{N}_0^{h-\mu+1,\alpha}(G) \tag{3.3}$$

непрерывен, а как оператор из $\mathcal{N}_0^{h,\alpha}(G)$ в $\mathcal{N}_0^{h-\mu,\alpha}(G)$ - вполне непрерывен.

Доказательство. Достаточно доказать предложение для случая, когда носитель φ принадлежит локальной карте $\{\mathcal{U}, \varkappa\}$. Положим $\varphi_\varkappa = \varphi \circ \varkappa^{-1}$ и введем оператор $P_\varkappa$ равенством

$$P_\varkappa (u \circ \varkappa^{-1}) = (Pu) \circ \varkappa^{-1}.$$

Тогда

$$[P,\varphi]_\varkappa = [P_\varkappa, \varphi_\varkappa] = \sum_{\{\gamma : |\gamma| > 0\}} \frac{1}{\gamma!} D^\gamma \varphi_\varkappa \cdot P_\varkappa^{(\gamma)},$$

где $P_\varkappa^{(\gamma)}(x,\xi)$ - производная по ξ порядка $|\gamma|$. Так как отображение

$$|\gamma|^{1-|\gamma|} P_\varkappa^{(\gamma)} : \mathcal{N}_0^{h,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U})) \to \mathcal{N}_{|\gamma|-1}^{h-\mu+|\gamma|,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U}))$$

непрерывно, то непрерывно и отображение

$$|\gamma|^{1-|\gamma|} P_\varkappa^{(\gamma)} : \mathcal{N}_0^{h,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U})) \to \mathcal{N}_0^{h-\mu+1,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U})).$$

С другой стороны, $D^\gamma \varphi_\varkappa \in \mathcal{N}_{h-1+\alpha}^{h-|\gamma|,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U}))$, и потому

$$|\gamma|^{|\gamma|-1} D^\gamma \varphi_\varkappa \in \mathcal{N}_{h-|\gamma|+\alpha}^{h-|\gamma|,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U})) \subset \mathcal{N}_{h-\mu+1+\alpha}^{h-\mu+1,\alpha}(\varkappa(\mathcal{U})).$$

Принимая во внимание предложение 1.14, получаем, что отображение (3.3) непрерывно. Компактность оператора

$$[P,\varphi] : \mathcal{N}_0^{h,\alpha}(G) \to \mathcal{N}_0^{h-\mu,\alpha}(G)$$

следует из компактности вложения пространства $\mathcal{N}_0^{h-\mu+1,\alpha}(G)$ в пространство $\mathcal{N}_0^{h-\mu,\alpha}(G)$. Предложение доказано.

Аналогично доказывается

Предложение 3.3. Пусть φ - функция на G, удовлетворяющая условию (3.2) для любой локальной карты, и Q - скалярный оператор из класса $\mathcal{O}p^{h,\alpha}_{\mu_1,\dots,\mu_T}(G, \partial G)$, $\mu_j \leq h$.
Тогда коммутатор

$$[Q,\varphi] : \mathcal{N}_0^{h,\alpha}(G) \to \prod_{j=1}^{T} \mathcal{N}_0^{h-\mu_j+1,\alpha}(\Gamma_j)$$

непрерывен, а как оператор из $\mathcal{N}_0^{h,\alpha}(G)$ в $\prod_{j=1} \mathcal{N}_0^{h-\mu_j,\alpha}(\Gamma_j)$ - вполне непрерывен.

4°. Краевая задача. Обозначим через h целое число, удовлетворяющее неравенству $h \geq h_0$, и предположим, что G является многообразием класса $\mathcal{N}^{h+t_{max},\alpha}$ $(t_{max} = \max\{t_1,\dots,t_N\})$ и что

$$\mathcal{L}_{k,j} \in Op^{h,\alpha}_{s_k+t_j}(G),\ \mathcal{B}_{k,j} \in Op^{h,\alpha}_{\sigma_k^{(1)}+t_j,\dots,\sigma_k^{(T)}+t_j}(G,\partial G).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{на } G \setminus \partial G, \\ \mathcal{B}u &= g \quad \text{на } \partial G \setminus \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Очевидно, оператор краевой задачи осуществляет непрерывное отображение

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q) \to \mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q) \times \prod_{i=1}^{T} \mathcal{N}^{h-\vec{\sigma}^{(i)},\alpha}(\Gamma_i,q), \tag{3.5}$$

где q - произвольная весовая функция и

$$\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q) = \mathcal{N}^{h+t_1,\alpha}(G,q) \times \dots \times \mathcal{N}^{h+t_N,\alpha}(G,q);$$

пространства $\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q)$ и $\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma}^{(i)},\alpha}(\Gamma_i,q)$ определяются аналогично.

Предположим, что оператор $\mathcal{L}$ эллиптический на $G \setminus \mathcal{M}$, а граничный оператор $\mathcal{B}$ накрывает $\mathcal{L}$ на $\partial G \setminus \mathcal{M}$.

5°. Нётеровость краевой задачи. Зафиксируем некоторый атлас $\{(\mathcal{U}_\sigma, \varkappa_\sigma)\}_{\sigma=1}^{s}$ многообразия G и разбиение единицы $\{\varphi_\sigma\}$ класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$, подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_\sigma\}$. Предположим, что существует набор $\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_s$ операторов канонических краевых задач в двугранном угле $\mathcal{D}$ (см. § 2), для каждого из которых выполнены условия (i) и (ii)' теоремы 2.1 (при каком-нибудь β_σ). Пусть $k_-^{(\sigma)} < Im\,\lambda < k_+^{(\sigma)}$ - наибольшая полоса на комплексной плоскости $\{\lambda\}$, содержащая прямую $Im\,\lambda = \beta^{(\sigma)} + 1 - h_0$ и свободная от спектра пучка $\mathfrak{A}_\sigma(\lambda)$.

Согласно теореме 2.3, оператор

$$\mathcal{P}_\sigma : \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}_{\delta_\sigma+h-h_0}(\mathcal{D}) \to \mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}_{\delta_\sigma+h-h_0}(\mathcal{D}) \times \prod_{\pm} \mathcal{N}^{h-\vec{\sigma}^{\pm},\alpha}_{\delta_\sigma+h-h_0}(\Gamma^{\pm})$$

осуществляет изоморфизм при любом δ_σ из интервала $(k_-^{(\sigma)}+k+\alpha,\ k_+^{(\sigma)}+k+\alpha)$.

Положим

$$\mathcal{S}_\sigma : |y|^{\delta_\sigma+h-h_0}\,\mathcal{P}_\sigma\,|y|^{-\delta_\sigma-h+h_0}.$$

Ясно, что отображение

$$\mathcal{S}_\sigma : \mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(\mathcal{D}) \to \mathcal{N}_0^{h-\vec{s},\alpha}(\mathcal{D}) \times \prod_{\pm} \mathcal{N}_0^{h-\vec{\sigma}^{\pm},\alpha}(\Gamma^{\pm}) \tag{3.6}$$

есть изоморфизм.

Обозначим через $\langle \mathcal{S}_\sigma^{-1} \rangle$ норму обратного отображения. Через q , как и ранее, обозначим некоторую весовую функцию класса $\mathcal{N}^{h,\alpha}$ на многообразии G и введем оператор

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{q}\mathcal{P}q : \mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(G) \to \mathcal{N}_0^{h-\vec{s},\alpha}(G) \times \prod_{i=1}^{T} \mathcal{N}_0^{h-6_i,\alpha}(\Gamma_i), \tag{3.7}$$

а также оператор $\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)}$, определенный равенством

$$\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)}(u \circ \varkappa_\sigma^{-1}) = (\mathfrak{S}u) \circ \varkappa_\sigma^{-1}.$$

Оператор $\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)}$ действует на функции, заданные в $\varkappa_\sigma(\mathcal{U}_\sigma)$. Продолжая нулем коэффициенты оператора $\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)}$ на $\mathcal{D}$, будем считать, что он определен на функциях, заданных в $\mathcal{D}$.

Теорема 3.1. Предположим, что существуют атлас $\{(\mathcal{U}_\sigma, \varkappa_\sigma)\}$, разбиение единицы $\{\varphi_\sigma\}$, весовая функция q и набор канонических операторов $\mathcal{S}_\sigma$, такие, что выполняется неравенство

$$\sum_{\{\sigma:\mathcal{U}_\sigma \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}} \langle \mathcal{S}_\sigma^{-1} \rangle \left\{ (\varphi_\sigma \circ \varkappa_\sigma^{-1})(\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)} - \mathcal{S}_\sigma) \right\}_{h,\alpha} < 1, \tag{3.8}$$

где $\{\ \}_{h,\alpha}$ - норма отображения пространства $\mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(\mathcal{D})$ в пространство $\mathcal{N}_0^{h-\vec{s},\alpha}(\mathcal{D}) \times \prod_{\pm} \mathcal{N}_0^{h-\vec{\sigma},\pm\alpha}(\Gamma^\pm)$.

Тогда оператор (3.5) является нётеровым и для любой вектор-функции $u \in \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)} \leq C \Big(\|\mathcal{L}u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q)} +$$

$$+ \|\mathcal{B}u\|_{\prod_{i=1}^{T}\mathcal{N}^{h-\vec{\sigma}_i,\alpha}(\Gamma_i,q)} + \|u\|_{C(Q)} \Big), \tag{3.9}$$

где Q - некоторое компактное подмножество $G \setminus \mathcal{M}$.

Доказательство. Достаточно построить левый и правый регуляризаторы для отображения (3.5). В каждой локальной карте $\mathcal{U}_\sigma$, не пересекающей многообразия $\mathcal{M}$, выберем точку и через $\mathcal{S}_\sigma$ обозначим оператор (в полупространстве или пространстве), который получается из главной части $\mathring{\mathfrak{S}}^{(\varkappa_\sigma)}$ оператора $\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)}$ замораживанием коэффициентов в этой точке.

Обозначим через ψ_σ функцию с носителем в $\mathcal{U}_\sigma$, такую, что $\psi_\sigma\varphi_\sigma = \varphi_\sigma$ и удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\psi_\sigma \circ \varkappa_\sigma^{-1}\right) \in \mathcal{N}_{h-1+\alpha}^{h-1,\alpha}\left(\varkappa_\sigma(\mathcal{U}_\sigma)\right), \quad 1 \leq i \leq n$$

(см. предложение 3.1). Будем считать, что окрестности $\mathcal{U}_\sigma$, не пересекающие $\mathcal{M}$, столь малы, что справедливо неравенство

$$\sum_{\{\sigma:\mathcal{U}_\sigma \cap \mathcal{M} = \emptyset\}} \langle \psi_\sigma \mathcal{S}_\sigma^{-1} \psi_\sigma \rangle \left\{ \varphi_\sigma (\mathfrak{S}^{(\varkappa_\sigma)} - \mathcal{S}_\sigma) \right\}_{h,\alpha} < \varepsilon \tag{3.10}$$

для заданного (сколь угодно малого) положительного числа ε. Здесь для упрощения обозначений пишем ψ_σ и φ_σ вместо $\psi_\sigma \circ \varkappa_\sigma^{-1}$ и $\varphi_\sigma \circ \varkappa_\sigma^{-1}$.

С той же целью и в дальнейшем будем опускать указания на отображения $\varkappa_\sigma$ и $\varkappa_\sigma^{-1}$.

Положим $Q=\sum_\sigma \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma$. Оператор $Q\sigma$ представим в виде

$$\sum_\sigma \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma \sigma \psi_\sigma =$$

$$=\sum_\sigma \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma S_\sigma \psi_\sigma + \sum_\sigma \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma \left(\sigma - S_\sigma\right)\psi_\sigma . \tag{3.11}$$

Первая сумма справа равна

$$I+\sum_\sigma \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\left[\varphi_\sigma , S_\sigma\right]\psi_\sigma = I+T_1 ,$$

где квадратные скобки означают коммутатор, I - единичный и T_1 - вполне непрерывный операторы в пространстве $\mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(G)$ (здесь мы воспользовались предложениями 3.2 и 3.3). Вторую сумму справа в (3.11) перепишем в виде

$$\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}=\varnothing\}} + \sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}\neq\varnothing\}} . \tag{3.12}$$

Ясно, что

$$\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}=\varnothing\}} = \sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}=\varnothing\}} \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma\left(\mathring{\sigma} - S_\sigma\right)\psi_\sigma +$$

$$+\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}=\varnothing\}} \psi_\sigma S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma\left(\sigma - \mathring{\sigma}\right)\psi_\sigma ,$$

что в силу (3.10) есть сумма оператора в $\mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(G)$ с нормой, не превосходящей ε , и вполне непрерывного оператора T_2 в том же пространстве. Далее,

$$\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}\neq\varnothing\}} = \sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}\neq\varnothing\}} S_\sigma^{-1}\varphi_\sigma\left(\sigma - S_\sigma\right)\psi_\sigma +$$

$$+\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}\neq\varnothing\}} \left[\psi_\sigma , S_\sigma^{-1}\right]\varphi_\sigma\left(\sigma - S_\sigma\right)\psi_\sigma .$$

Норма первой суммы справа меньше единицы в силу неравенства (3.8), а вторая сумма - вполне непрерывный оператор T_3 , так как

$$\left[\psi_\sigma , S_\sigma^{-1}\right] = S_\sigma^{-1}\left[S_\sigma , \psi_\sigma\right]S_\sigma^{-1} .$$

В результате

$$Q\sigma = I+K+T , \tag{3.13}$$

где K - оператор в $\mathcal{N}_0^{h+\vec{t},\alpha}(G)$, норма которого меньше единицы, и потому оператор $(I+K)^{-1}Q$ является левым регуляризатором для σ . Правый регуляризатор строится аналогично.

Докажем теперь оценку (3.9) для любой вектор-функции $u \in \mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G)$. В силу (3.13),

$$\|u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)} \le c\Big(\|\mathfrak{S} u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q)} + \\ + \sum_{i=1}^{3}\|T_i u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)}\Big).$$

Оценим сначала норму $T_1 u$. Имеем

$$\|T_1 u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)} \le c\sum_{\sigma}\|[\varphi_\sigma, \mathcal{S}_\sigma]\psi_\sigma u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q)}. \tag{3.14}$$

Так как в операторной матрице $[\varphi_\sigma, \mathcal{S}_\sigma]$ отличны от нуля разве лишь те элементы, для которых $s_k + t_j \ge 1$ или $\sigma_k^{(i)} + t_j \ge 1$, то правая часть (3.14) не превосходит

$$c\sum_{\{j:\,h+t_j\ge 1\}}\|u_j\|_{\mathcal{N}^{h+t_j-1,\alpha}(G,q)}. \tag{3.15}$$

Точно так же получаем оценку

$$\|T_2 u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)} \le c\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}\ne\emptyset\}}\ \sum_{\{j:\,h+t_j\ge 1\}}\|(\mathcal{S}_\sigma^{-1}\varphi_\sigma(\mathfrak{S}-\mathcal{S}_\sigma)\psi_\sigma u\|_{\mathcal{N}^{h+t_j-1,\alpha}(G,q)}. \tag{3.16}$$

Из представления для оператора T_3 непосредственно следует, что

$$\|T_3 u\|_{\mathcal{N}^{h+\vec{t},\alpha}(G,q)} \le c\sum_{\{\sigma:\,\mathcal{U}_\sigma\cap\mathcal{M}=\emptyset\}}\|(\mathfrak{S}-\mathring{\mathfrak{S}})\psi_\sigma u\|_{\mathcal{N}^{h-\vec{s},\alpha}(G,q)} \le \\ \le c\sum_{\{j:\,h+t_j\ge 1\}}\|u_j\|_{\mathcal{N}^{h+t_j-1,\alpha}(G,q)}.$$

Остается воспользоваться неравенством

$$\|v\|_{\mathcal{N}^{\ell-1,\alpha}(G,q)} \le \varepsilon\|v\|_{\mathcal{N}^{\ell,\alpha}(G,q)} + c_\varepsilon\|v\|_{C(Q)},$$

где ε - любое положительное число, $1 \le \ell \le h + t_{max}$, а Q - некоторое компактное подмножество $G \setminus \mathcal{M}$ (ср. с доказательством предложения 1.1). Теорема доказана.

Литература

1. Кондратьев В.А. О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области. - "Дифференц. уравнения", 1970, т.6, № 10, с.1931-1943.

2. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. О задаче с косой производной в области с кусочно-гладкой границей. - "Функцион. анализ и его прил.", 1971, т.5, вып.3, с.102-103.
3. М а з ь я В.Г. О задаче с косой производной в области с ребрами разных размерностей. - "Вестн. Ленингр. ун-та. Серия математика, механика, астрономия", 1973, № 7, с.34-39.
4. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. Об эллиптических краевых задачах в области с кусочно-гладкой границей. - В кн.: Труды симпозиума по механике сплошной среды. Тбилиси, 1971, "Мецниереба", 1973, т.210, № 4, с.803-806.
5. Ф е й г и н В.И. Эллиптические уравнения в областях с многомерными особенностями границы. - "Успехи мат. наук", 1972, т.27, вып.2, с.183-184.
6. К о м е ч А.И. Эллиптические краевые задачи на многообразиях с кусочно-гладкой границей. - "Мат. сб.", 1973, т.92, № 1, с.89-134.
7. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка в области с ребрами. - "Вестн. Ленингр. ун-та. Серия математика, механика, астрономия", 1975, № 1, с.102-108.
8. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. Об асимптотике решений уравнений Навье-Стокса вблизи ребер. - "Докл. АН СССР", 1973, т.210, № 4, с.803-806.
9. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. L_p-оценки и асимптотика решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. - "Годишник на висшите учебни заведения. Приложна математика", 1975, т.11, кн.2.
10. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра. - "Докл. АН СССР", 1975, т.229, № 1, с.33-36.
11. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. - "Труды Моск. мат. о-ва", 1978, т.37, с.49-93.
12. М а з ь я В.Г., П л а м е н е в с к и й Б.А. Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями. - В кн.: Проблемы матем. анализа, изд-во ЛГУ, 1977, вып.6, с.85-142.
13. К о н д р а т ь е в В.А. Особенности решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра. - "Дифференц. уравнения", 1977, т.13, № 11, с.2026-2032.