УДК 517.518.22

О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $B^{l}_{p,\theta}$ НА ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Г.А.Шмырёв (Новосибирск)

Вопрос о поведении функций, заданных в области, на поверхностях меньшей размерности, рассмотренный впервые С.Л.Соболевым [1] для пространств $W^{(l)}_{p}$, в настоящее время изучен достаточно подробно. В частности, в [2] для анизотропных пространств $B^{l}_{p,\theta}$, L^{l}_{p} сформулированы общие прямые и обратные теоремы о следах на подпространствах E_m. Вопрос о следах функций на дифференцируемых многообразиях исследован в [3], где также приведены прямые и обратные теоремы для изотропных пространств $W^{(l)}_{p}$, $B^{(l)}_{p,\theta}$. Аналогичные теоремы в анизотропном случае были получены в работах [4, 5] для пространств W^{l}_{p}. Дальнейшие исследования в этом направлении были продолжены в [6, 7], где с помощью методики работы [5] изучались свойства следов весовых классов $W^{l}_{p,\sigma}$ и классов B^{τ}_{p}.

В данной работе исследуются граничные свойства функций из анизотропных пространств $B^{l}_{p,\theta}$. При некоторых условиях геометрического характера на область G, связанных с показателем гладкости $l=(l_1,\dots,l_n)$ класса, удается получить точную обратимую характеристику следа произвольной функции из $B^{l}_{p,\theta}(G)$. Требование на область заключается, грубо говоря, в следующем. Предположим, что граница области является гладким многообразием, т.е. существует покрытие $\sigma_1,\dots,\sigma_N$, где каждый кусок σ_k имеет представление

$$\sigma_k:\ x_j=\varphi_k(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),\ \varphi_k\in C^m. \tag{1}$$

Если при этом "дифференциальные" свойства класса являются наилучшими по j-й координате, т.е. $l_j=\max\limits_{1\le i\le n} l_i$ (такую координату будем называть регулярной), то вопрос о следах функций класса $B^{l}_{p,\theta}$ на куске σ_k сводится к уже известному случаю следов на гиперплоскостях [2], так как преобразование, распрямляющее границу, сохраняет класс $B^{l}_{p,\theta}$. Если же кусок поверхности σ_m не удовлетворяет такому условию, то всегда существуют точки, где представление вида (1) в направлении регулярной координаты уже не является гладким и распрямление границы с сохранением класса неприменимо [8] . В настоящей работе предполагается, что многообразие, где нарушается гладкость, имеет размерность не выше $n-2$ и лежит в одной из координатных плоскостей. Предполагается также, что в окрестности этого особого многообразия рассматриваемая поверхность лежит в области, выметаемой рогами вида

$$T(\alpha)=\{x:\ 0<a_i h^{\alpha_i}\leq x_i\leq b_i h^{\alpha_i},\ 0<h\leq\varepsilon\} \qquad (2)$$

с вершинами, лежащими на этом многообразии. Изложение следует работе [5] .

Подробную библиографию по теоремам вложения разных метрик можно найти в [2, 3, 9] .

Автор благодарен проф. С.В.Успенскому, под руководством которого выполнена данная работа.

§ 1. Определения. Основные результаты

Пусть E_n - n-мерное евклидово пространство точек $(x_1,\dots,x_n)$; G - область в E_n с границей ∂G . Обозначим через $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ замыкание множества всех гладких функций, заданных в G , по норме

$$\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}=\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(G)}+\|\mathcal{F}\|_{L_p(G)},\quad 1<p<\infty,$$

где

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(G)}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\varepsilon}\frac{\|\Delta_i^{s_i}(h,G)\mathcal{F}\|^{\theta}_{L_p(G)}}{h^{1+\theta\ell_i}}\,dh\right\}^{\frac{1}{\theta}},\quad 1\leq\theta<\infty, \qquad (3)$$

$\Delta_i^m(h,G)\mathcal{F}$ - m-я разность с шагом h по i-й координате на множестве G (см. [3, § 18.1]) , $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n),\ s_i>\ell_i>0$ (s_i - целые) .

Будем предполагать, что область G удовлетворяет слабому условию ℓ-рога (см. [3, § 8.1]), т.е.

$$G=\bigcup_{k=1}^{N}G_k\ ,\quad \forall_k\ G_k+T_k(\alpha)\subset G,\quad \alpha_i=\frac{1}{\ell_i},$$

где $T_k(\alpha)$ - множество вида (2) или полученное из него зеркальным отражением относительно нескольких координатных гиперплоскостей. Пусть существует линейный ограниченный оператор $f(G)\to\tilde{f}(E_n)$, $\tilde{f}|_G=f$, причем $\|\tilde{f}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}\leq C\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}$ (см. [10] и [3, § 9.8]) . Будем считать, что граница ∂G - гладкое многообразие класса C^m, $m\geq\max\limits_{1\leq i\leq n}\ell_i^2$, т.е. ее можно разбить на конечное число кусков $\sigma_1,\dots,\sigma_N$, каждый из которых имеет представление вида (1) с $\varphi_k\in C^m$ в соответствующей подобласти. Таким образом, достаточно изучить граничные свойства на каждом куске. Случай $\ell_1=\dots=\ell_n$ рассмотрен в [3, § 24.3] . Случай $\ell_j=\max\limits_{1\leq i\leq n}\ell_i$

как отмечено выше, аналогичен известному случаю следов на гиперплоскостях (см. [2, 6.5]). Таким образом, вопрос сводится к изучению следа на куске поверхности, который выражается через нерегулярную координату, т.е. $l_1 < \max\limits_{1\le i\le n} l_i$ (не уменьшая общности, можно считать x_1 регулярной, а x_n нерегулярной координатой). Предположим, что особое многообразие, где $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0$, имеет $n-1$ -мерную меру 0 и после гладкого преобразования

$$\bar{x}_1 = a x_1 + \Phi(x_2,\dots,x_n), \quad \bar{x}_i = x_i, \quad i=2,\dots,n, \tag{4}$$

сохраняющего класс (лемма 1) , переходит в область, лежащую в плоскости $x_1 = 0$. Будем считать, что кусок σ : $x_n = \varphi(x')$ уже обладает таким свойством, а функция φ гладко распространена на все E_{n-1} так, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \ne 0$ при $x_1 \ne 0$.

Наложим некоторые ограничения на свойство куска σ в окрестности гиперплоскости $x_1 = 0$.

1. Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:

$$\left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_i^k}\right| \le M \begin{cases} |x_1|^{\frac{\alpha_n - k\alpha_i}{\alpha_1}} & \text{при } \alpha_n > k\alpha_i, \\ 1 & \text{при } \alpha_n \le k\alpha_i, \end{cases} \tag{5}$$

где $k=1,\dots,[l_1]$, $i=1,\dots,n-1$, а M не зависит от точки. В силу условия $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \ne 0$ при $x_1 \ne 0$ кусок σ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(x_2,\dots,x_n),\ x'\in D,\ x_1>0, \\ x_1 &= \psi_2(x_2,\dots,x_n),\ x'\in D,\ x_1<0, \end{aligned} \tag{6}$$

где функции ψ_1, $\psi_2 \in C^m$ во всякой внутренней точке, но, вообще говоря, не гладки на $\bar{D}$.

Считая, что область D удовлетворяет условию l' рога, где $l' = (l_2,\dots,l_n)$, можно показать, что существует такая ε-окрестность D_ε ($0<\varepsilon<1$) границы ∂D , что

а) $\forall y' \in D_\varepsilon\ \exists h_1 = h_1(y')$,

такое что $y' \in D(h_1) \setminus D(h_1/2)$, $0 < h_1 < c\varepsilon$; (7)

б) если $x' \in D_\varepsilon$, а t' удовлетворяет условию

$$a_i h^{\alpha_i} < t_i < b_i h^{\alpha_i},\ i=2,\dots,n,\ 0<h\le\varepsilon,$$

то

$$x' + t' \notin D(h/2); \tag{8}$$

в) $\exists\, \delta > 0$, не зависящее от h и x', такое что если

$$x' \in D_\varepsilon \setminus D(h),$$

то

$$y' = x' + t' \in D_\varepsilon \setminus D(h/2) \tag{9}$$

при $0 \le t_i \le \delta h^{\alpha_i}$, $i=2,\dots,n$, $0<h<\varepsilon c$,

II. На функции ψ_κ, $\kappa=1,2$, определенные в (6), наложим следующие ограничения:

1) $\forall x', x'+y' \in D$

$$|\psi_\kappa(x'+y')-\psi_\kappa(x')|\leqslant M\left[\sum_{i=2}^{n}|y_i|^{1/\alpha_i}\right]^{\alpha_1}, \tag{10}$$

где M не зависит от x', y'.

2) $$\left|\frac{\partial^\kappa \psi_\nu}{\partial x_i^\kappa}(x')\right|\leqslant M h^{\alpha_1-\kappa\alpha_i},\quad i=2,\dots,n;\quad \kappa=1,\dots,[\ell_i],\ \nu=1,2, \tag{11}$$

$\forall x'\in D\setminus D(h)$, где $D(h)$ - подобласть области D, каждая точка которой достигается ℓ'-рогом длины h с вершиной на границе ∂D, т.е.

$D(h)=\{y' : y'=t'+x'$, где $x'\in\partial D,\ a_i v^{\alpha_i}\leqslant t_i\leqslant b_i v^{\alpha_i},\ 0\leqslant v\leqslant h,$ $i=2,\dots,n$; a_i, b_i определены в (2)$\}$.

Для формулировки основных результатов введем некоторые нормы. Положим

$$\|f\|_{B^{r}_{p,\theta}(\mathring{D})}=\sum_{i=2}^{n}\left\{\int_0^{\varepsilon}\frac{\|\Delta_i^m(\delta h)f\|^{\theta}_{L_p(D\setminus D(h^{1/\alpha_i}))}}{h^{1+\theta r_i}}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+\|f\|_{L_p}, \tag{12}$$

где $\Delta_i^m(h)$ - m-я разность с шагом h по i-й координате, $r_i>0$, $1<p<\infty$, $m>\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n} r_i$, $i=2,\dots,n$, а δ удовлетворяет условию в).

$$\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(0)}=\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\int_0^{\varepsilon}\frac{\|\Delta_i^m(\delta h)f\|^{\theta}_{L_p(Q(h^{\alpha_1\alpha_i^{-1}}))}}{h^{1+\theta\ell_i}}dh\right\}+\|f\|_{L_p}=$$

$$=\|f\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(0)}+\|f\|_{L_p}, \tag{13}$$

где

$$Q(h)=\begin{cases}|x_1|\leqslant h,\\ -\infty<x_j<\infty,\quad j=2,\dots,n-1;\end{cases}$$

$$\|x_1^{\varkappa}f\|_{B^{r,\varkappa}_{p,\theta}(E^{\kappa}_{n-1})}=\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{\varepsilon}\frac{\|x_1^{\varkappa}\Delta_i^m(\delta_\kappa h)f\|_{L_p(E^\kappa_{n-1})}}{h^{\theta r_i+1+\varkappa\theta\alpha_1\alpha_i^{-1}}}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+\|f\|_{L_p}, \tag{14}$$

где

$$E^1_{n-1}=\{x_1\geqslant 0,\ -\infty<x_j<\infty,\ j=2,\dots,n-1\},$$

$$E^2_{n-1}=\{x_1\leqslant 0,\ -\infty<x_j<\infty,\ j=2,\dots,n-1\},$$

$\kappa=1,2$; $\varkappa>0$, $1<p<\infty$, $r_i>0$, $\alpha_i=\dfrac{1}{\ell_i}$, $m>2(r_i+\varkappa\alpha_1\alpha_i^{-1})$,

$\delta_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\delta$, $m\delta<1$, $i=1,\dots,n-1$.

Пусть

$$G=\left\{\begin{array}{l}-\infty\le x_n\le\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\\ -\infty<x_j<\infty,\ j=1,\ldots,n-1\end{array}\right\}, \tag{15}$$

где ∂G удовлетворяет условиям (5), (10), (11), а $\varphi\in C^m$, $m>\max\limits_{1\le i\le n}\ell_i^2$.

Определим $\mathcal{F}\Big|_{\Gamma_\kappa}=\lim\limits_{v\to 0}\mathcal{F}(\psi_\kappa(x')+v,x')$, $\kappa=1,2$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, $1<p<\infty$, $\ell_1=\max\limits_{1\le i\le n}\ell_i$, $\ell_1-[\ell_1]>\frac{1}{p}$ $(i=1,\ldots,n)$. Тогда $\mathcal{F}\Big|_{\Gamma}$ существует и допускает на каждом куске Γ_κ $(\kappa=1,2)$ представление вида $f_\kappa=\mathcal{F}\Big|_{\Gamma_\kappa}=f_\kappa^1+f_\kappa^2$, где функция f_κ^1, рассматриваемая на куске Γ_κ как функция точки $x'=(x_2,\ldots,x_n)$, принадлежит классу $B^{\tau}_{p,\theta}(D)$, $\kappa=1,2$, где $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_1}\left(\ell_1-\frac{1}{p}\right)$, $\tau'=(\tau_2,\ldots,\tau_n)$, $i=2,\ldots,n$, и удовлетворяет оценке

$$\|f_\kappa^1\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}\le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)},\quad \kappa=1,2. \tag{16}$$

Функции

$$f^1=\begin{cases}f_1^1, & x_1>0;\\ f_2^1, & x_1<0;\end{cases}\qquad f^2=\begin{cases}f_1^2 & x_1>0;\\ f_2^2 & x_1<0,\end{cases}$$

рассматриваемые как функции точки $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, удовлетворяют оценкам

$$\|f^{\kappa}(x')\|_{B^{\tau}_{p\theta}(0)}\le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}, \tag{17}$$

$$\|f_\kappa^2\|_{B^{x,\tau}_{p,\theta}(E^{\kappa}_{n-1})}\le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}, \tag{18}$$

где $\kappa=1,2$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})$, $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_n}\left(\ell_n-\frac{1}{p}\right)$, $i=1,\ldots,n-1$, $x=([\ell_1]+1)([\ell_1]+2)$.

Т е о р е м а 2 (обратная). Пусть область G имеет вид (15) и области $G_1=G\cap x_1\ge 0$, $G_2=G\cap x_1\le 0$ удовлетворяют условиям $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ -рога. Пусть $\varphi\in C^m$, $m>\max\limits_{1\le i\le n}\ell_i^2-\ell_1^2$. Зададим на $\Gamma=\partial G$ функцию f, которая на каждом куске $\Gamma_\kappa=\partial G_\kappa$, $\kappa=1,2$, может быть представлена в виде $f=f_\kappa^1+f_\kappa^2$, где

1) каждая функция f_κ^1, как функция точки $x'=(x_2,\ldots,x_n)$, принадлежит классу $B^{\tau}_{p,\theta}(D)$, где $\tau'=(\tau_2,\ldots,\tau_n)$, $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_1}\left(\ell_1-\frac{1}{p}\right)$, $i=2,\ldots,n$, $\kappa=1,2$, $1<p<\infty$;

2) функции

$$f^1=\begin{cases}f_1^1, & x_1>0,\\ f_2^1, & x_1<0,\end{cases}\qquad f^2=\begin{cases}f_1^2, & x_1>0,\\ f_2^2, & x_1<0,\end{cases}$$

рассматриваемые как функции точки $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, удовлетворяют оценкам

$$\|f^{\kappa}\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(C)}<\infty,\quad \|x_1^{x}f_\kappa^2\|_{B^{\tau,x}_{p,\theta}(E^{\kappa}_{n-1})}<\infty, \tag{19}$$

где $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_n}\left(\ell_n-\frac{1}{p}\right)$, $i=1,\ldots,n-1$, $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1})$, $1<p<\infty$.

Тогда в области G существует функция $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, такая что

$\mathcal{F}\big|_{\Gamma_K} = f_K^1 + f_K^2$, $K=1,2$, и имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)} \le c \sum_{K=1}^{2} \left(\|f_K^1\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)} + \|f^K\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)} + \|x_1^{\varkappa} f_K^2\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^K_{n-1})} \right), \qquad (20)$$

где $\varkappa = \left([\ell_1]+1\right)\left([\ell_1]+2\right)$, C не зависит от f и $\mathcal{F}$.

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения

Везде в дальнейшем будем считать область G ограниченной, удовлетворяющей слабому условию ℓ-рога, $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ и такой, что существует линейный ограниченный оператор продолжения с G на все E_n (см. [3, § 9.8]) . Продолженные функции можно при этом считать равными нулю вне некоторой окрестности множества G .

Л е м м а 1. Пусть $f \in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, где область G удовлетворяет описанным выше условиям, $\ell_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \ell_i$. Тогда преобразование

$$z_i = x_i\,, \quad i=2,\ldots,n,$$
$$z_1 = x_1 + \Phi(x_2,\ldots,x_n),$$

где $\varphi \in C^K(E_{n-1})$, $K>\ell_1$, $|D^{\alpha}\Phi| \le N < \infty$, инвариантно относительно класса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия на G , функцию f можно считать продолженной финитным образом на все пространство E_n . Поэтому достаточно установить оценку

$$\|\tilde f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)} \le c\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}, \qquad (21)$$

где $\tilde f(z) = f(\varphi(z))$, а C не зависит от f .

Воспользуемся интегральным представлением Ильина-Бесова (см. [3, формула 7 (97)]):

$$f(x) = f_{\varepsilon}(x) + \int_0^{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} v^{-1-|\alpha|-\alpha_i} dv \times$$
$$\times \int_{E_1}\int_{E_n} \Delta_i^m(\delta t) f(x+y+te_i)\chi_i(y:v^{\alpha}) M_i(tv^{-\alpha_i})\,dy\,dt =$$
$$= f_{\varepsilon}(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{\varepsilon,i}(x), \qquad (22)$$

где $\alpha_i = \frac{1}{\ell_i}$, $i=1,\ldots,n$, $m > \max\limits_{1\le i\le n} \ell_i = \ell_1$, e_i - единичный вектор i-й координаты, $\Delta_i^m(t)$ - m-я разность с шагом t по направлению e_i , $0<\delta<1$ - достаточно малое число, функция $f_{\varepsilon}(x) \in C_0^{\infty}$ и имеет вид

$$f_{\varepsilon}(x) = \int_{E_n} f(x+y) \prod_{j=1}^{n} \Omega_j(y_j v^{-\alpha_j}) v^{-\alpha_i} dy,$$

а функции, входящие в ядро усреднения, удовлетворяют условиям

$$\chi_i(y)=\prod_{j=1}^{n}\chi_{ij}(y_j);\quad \chi_{ij},\,M_i,\,\Omega_j\in C_0^{\infty}(E_1),$$
$$\operatorname{supp}\chi_{ij}=[a_j,b_j],\quad \operatorname{supp}M_i=[a_i,b_i],\quad \operatorname{supp}\Omega_j=[a_j,b_j],\ 0<a_i<b_i. \tag{23}$$

Оценим $\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}$-норму i-го члена второго слагаемого, где $\|\ \|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}}$ имеет вид (3). Разбивая интеграл по υ на два и применяя обобщенное неравенство Минковского по t и υ, получаем

$$\|\tilde f_{\varepsilon,i}(z)\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}\le\sum_{\nu=1}^{n}\Bigg\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu}\Bigg[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{\infty}\upsilon^{-1-\alpha_i}M_i(t\upsilon^{-\alpha_i})\times$$
$$\times\Big\|\Delta_i^m(\delta h)\int_{E_n}\upsilon^{-|\alpha|}\chi_{i1}\Big(\frac{y_1-x_1-\phi(x')}{\upsilon^{\alpha_1}}\Big)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\Big(\frac{y_i-x_i}{\upsilon^{\alpha_i}}\Big)\Delta_i^m(\delta t)f(y+te_i)\Big\|_{L_p(E_n)}dtd\upsilon\Bigg]^{\theta}dh\Bigg\}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{n}\Bigg\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu}\Bigg[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\int_0^{\infty}\upsilon^{-1-\alpha_i}M_i(t\upsilon^{-\alpha_i})\Big\|\int\Delta_\nu^m(\delta t)\Big[\chi_{i1}\Big(\frac{y_1-x_1-\phi(x')}{\upsilon^{\alpha_1}}\Big)\times$$
$$\times\chi_{i\nu}\Big(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\Big)\Big]\prod_{j=2}^{n\,(\nu)}\chi_{ji}\Big(\frac{y_j-x_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\Big)\Delta_i^m(\delta t)f(y+te_i)\Big\|_{L_p(E_n)}dtd\upsilon\Bigg]^{\theta}dh\Bigg\}^{1/\theta}=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}(J_\nu^1+J_\nu^2). \tag{24}$$

Оценим J_ν^1. Используя свойство инвариантности нормы относительно сдвига, условие (23), применяя неравенство Гельдера по y, и делая замену $h^{\ell_\nu}=\bar h$ с учетом $\alpha_\nu\ell_\nu=1$, получаем

$$J_\nu^1\le C\Bigg\{\int_0^{\bar h_0}\bar h^{-1-\theta}\Bigg[\int_0^{\bar h}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\upsilon^{-1-\alpha_i}\Bigg[\int_{E_n}\int_{E_n}\upsilon^{-|\alpha|}\chi_{i1}\Big(\frac{y_1-x_1-\phi(x')}{\upsilon^{\alpha_1}}\Big)\times$$
$$\times\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\Big(\frac{y_j-x_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\Big)\big|\Delta_i^m(\delta t)f(y+te_i)\big|^{p}dydx\Bigg]^{\frac1p}dtd\upsilon\Bigg]^{\theta}d\bar h\Bigg\}^{1/\theta}\le$$

(интегрируя по x_1, x', y с учетом (23) и применяя неравенство Харди, получаем)

$$\le C\Bigg\{\int_0^{h_0}\bar h^{-1-\theta-\theta\alpha_i}\Bigg[\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(E_n)}dt\Bigg]^{\theta}d\bar h\Bigg\}^{1/\theta}\le$$

(применяя неравенство Харди после замены $\bar h^{\alpha_i}=h$, имеем)

$$\le C\|f\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}\le C\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}. \tag{25}$$

Оценим $\mathcal{J}_\nu^2$. Воспользуемся оценкой

$$\left|\Delta_\nu^m(h)\varphi_1\left(\frac{x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)\varphi_2\left(\frac{\psi(x)}{v^{\alpha_1}}\right)\right| \leq \frac{h^{m-1}}{v^{\alpha_\nu m}v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}} \times$$

$$\times\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\geq 0\\ \sum\beta_\kappa=s-\tau}}\int_0^{mh}\left|D^{m-s}\varphi_1\left(\frac{x_\nu+u}{v^{\alpha_\nu}}\right)D^\tau\varphi_2\left(\frac{\psi(x+ue_\nu)}{v^{\alpha_1}}\right)\prod_{\kappa=1}^{\tau}\psi^{(\beta_\kappa+1)}(x+ue_\nu)\right|du, \quad (26)$$

где $\psi^{(\kappa)}=\dfrac{\partial^\kappa\psi}{\partial u^\kappa}$, которая получается применением формулы Лейбница из неравенства (см. [3, формула 7 (6)])

$$|\Delta^m\varphi(x)|\leq h^{m-1}\int_0^{mh}\left|D^m\varphi(x+u)\right|du. \quad (27)$$

Пусть $\chi_{[0,\varepsilon]}(v)$ - характеристическая функция отрезка $[0,\varepsilon]$. Используя оценку (26) с $\varphi_1\left(\frac{x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)=\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)$, $\varphi_2\left(\frac{\Phi(x)}{v^{\alpha_1}}\right)=\chi_{i1}\left(\frac{y_1-\psi(x)}{v^{\alpha_1}}\right)$, $\psi(x)=x_1+\Phi(x')$, применяя обобщенное неравенство Минковского по t, v, u , неравенство Гельдера по y , учитывая (23) и оценки на Φ , получим

$$\mathcal{J}_\nu^2\leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu}\left[\int_{h^{1/\varkappa_\nu}}^{\infty}\chi_{[0,\varepsilon]}(v)v^{-1-\alpha_i}\int_0^{b_iv^{\alpha_i}}\int_0^{h}\frac{h^{m-1}}{v^{\alpha_\nu m}v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\int_{-E_n}\int_{E_n}v^{-|\alpha|}\left|\chi_{i\nu}^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right)\chi_{i1}^{(\tau)}\left(\frac{y_1-x_1-\Phi(x')}{v^{\alpha_1}}\right)\right|\left|\Delta_i^m(\delta t)f(y)\right|^p dy\,dx\right]^{1/p}dt\,dv\,du\right]^\theta dh\right\}^{1/\theta}\leq$$

(интегрируем по x_1, x', y, u с учетом (23))

$$\leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu+m\theta}\left[\int_{h^{1/\varkappa_\nu}}^{\infty}\chi_{[0,\varepsilon]}(v)\frac{v^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m}}{v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}}\int_0^{b_iv^{\alpha_i}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)f\right\|_{L_p(E_n)}dt\,dv\right]dh\right\}^{1/\theta}\leq$$

(учитывая $\alpha_1\tau-\alpha_\nu s\leq 0$, $v<\varepsilon$, $m>\max\limits_{1\leq\nu\leq n}l_\nu$ и применяя неравенство Харди после замены $h^{l_\nu}=\bar h$, получаем)

$$\leq C\left\{\int_0^{\infty}\chi_{[0,\varepsilon]}(\bar h)\bar h^{-1-\theta l_\nu-\theta}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)f\right\|_{L_p(E_n)}dt\right]^\theta d\bar h\right\}^{1/\theta}\leq$$

(используя неравенство Харди после замены $\bar h^{\alpha_i}=h$, имеем)

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}(E_n)}\leq C\|f\|_{B^l_{p,\theta}(E_n)}. \quad (28)$$

Из (24), (25), (28) имеем $\|\tilde f_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}}\leq C\|f\|_{B^l_{p,\theta}}$. Оценка $\|\tilde f\|_{L_p}\leq C\|f\|_{L_p}$ элементарна. Рассуждения для f_ε аналогичны приведенным выше. Вспоминая определение $B^l_{p,\theta}$-нормы, получаем оценку (21) . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. В силу доказанной леммы и условий на функцию ψ

дальнейшие рассуждения можно проводить для области D_ε, а функции $f\in B^{l}_{p,\theta}(G)$ считать равными нулю для $x'\notin D_\varepsilon$.

Лемма 2. Пусть область D удовлетворяет условию слабого $l=(l_2,\dots,l_n)$ -рога, $\alpha_i=\frac{1}{l_i}$, $i=2,\dots,n$, и выполнены условия а)-в) из § 1. Тогда нормы (3) и (12) эквивалентны, т.е. $\forall f\in B^{l}_{p,\theta}(D)$ справедливо

$$C_1\|f\|_{B^{l}_{p,\theta}(\mathring{D})}\le\|f\|_{B^{l}_{p,\theta}(D)}\le C_2\|f\|_{B^{l}_{p,\theta}(\mathring{D})}, \qquad (29)$$

где C_1, C_2 не зависят от f и отличны от нуля.

Доказательство. Первое неравенство очевидно, так как $D\setminus D(h^{1/\alpha_i})\subset D$. Докажем второе. Поступаем аналогично, как в лемме 1. Воспользуемся представлением (22) в E_{n-1} с параметрами $\alpha'=(\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i=\frac{1}{l_i}$, $i=2,\dots,n$. При этом будем считать, что функции, входящие в ядро усреднения, удовлетворяют условиям

$$\operatorname{supp}\chi_{ij}\subset[a_j,\bar b_j],\ \operatorname{supp}M_i\subset[a_i,b_i],\ \text{где } a_i<\bar b_i<b_i,\ i=2,\dots,n. \qquad (30)$$

Такое предположение допустимо, поскольку рог, определяемый через (30), уже исходного. Используя оценку (26) с $\varphi_2\equiv 1$, применяем обобщенное неравенство Минковского по t, v в первом слагаемом и по t, v, u - во втором. Применяя неравенство Гельдера по y' с учетом (23) и инвариантности нормы по сдвигу, получаем

$$\|f_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L}^{l}_{p,\theta}(D_\varepsilon)}\le c\sum_{\nu=2}^{n}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i}\left[\int_{D_\varepsilon}\int_D v^{-|\alpha'|}\chi_i\left(\frac{y_i}{v^{\alpha_i}}\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times|\Delta_i^m(\delta t)f(y'+x'+te_i)|^p dy'dx'\right]^{\frac1p}dtdv\right]^{\theta}dh\right\}^{1/\theta}+$$
$$+C\sum_{\nu=2}^{n}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{2}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i-m\alpha_\nu}h^{m-1}\int_0^{m\delta h}\left|\int_{D_\varepsilon}\int_D v^{-|\alpha'|}\chi_{i\nu}^{(m)}\left(\frac{y_\nu-u}{v^{\alpha_\nu}}\right)\times\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\prod_{\substack{j=2\\ j\ne\nu}}^{n}\chi_{ij}\left(\frac{y_j}{v^{\alpha_j}}\right)|\Delta_i^m(\delta t)f(x'+y'+te_i)|^p dy'dx'\right|^{1/p}dtdvdu\right]^{\theta}dh\right\}^{1/\theta}=$$
$$=\sum_{\nu=2}^{n}\left(J^1_{i\nu}+J^2_{i\nu}\right).$$

Рассмотрим $J^1_{i\nu}$. Сделаем замену $z'=x'+y'+te_i$. В силу условий на χ_i, $i=2,\dots,n$, $a_i v^{\alpha_i}\le y_i\le b_i v^{\alpha_i}$, откуда в силу условия б) имеем $z'\notin D\left(\frac{v}{2}\right)$. Интегрируя по z', y', получаем

$$J^1_{i\nu}\le c\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(D_\varepsilon\setminus D(\frac{v}{2}))}dtdv\right]^{\theta}dh\right\}^{1/\theta}\le$$

(после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, применяя неравенство Харди, имеем)

$$\leq c\left\{\int_0^{h_1}\bar h^{-1-\theta-\theta\alpha_i}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(D_\varepsilon\setminus D(\frac{\bar h}{2}))}dt\right]^\theta d\bar h\right\}^{1/\theta}\leq$$

(после замены $\left(\frac{\bar h}{2}\right)^{\alpha_i}=h$, используя неравенство Харди, получаем)

$$\leq c\left\{\int_0^d h^{-1-\theta l_i}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|^\theta_{L_p(D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\alpha_\nu}))}dh\right\}^{1/\theta}\leq c\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathring{D})}.$$

Рассмотрим $J^2_{i\nu}$. Из (30) и того, что $0\leq u\leq m\delta h$, $h<\sigma^{\alpha_\nu}$, выбирая достаточно малое δ , получаем $a_\nu\sigma^{\alpha_\nu}\leq y_\nu\leq(\bar b_\nu+m\delta)\sigma^{\alpha_\nu}\leq b_\nu\sigma^{\alpha_\nu}$, но тогда, в силу условия б) , $y'+x'\notin D\left(\frac{\sigma}{2}\right)$, откуда $x'+y'+te_i\notin D\left(\frac{\sigma}{4}\right)$. Делая замену $y'+x'+te_i=z_i$ и интегрируя по z', y', u получаем

$$J^2_{i\nu}\leq c\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_\nu-\theta m}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\infty}\chi_{[0,\varepsilon]}(\sigma)\int_0^{b_i\sigma^{\alpha_i}}\sigma^{-1-\alpha_i-m}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(D\setminus D(\sigma/4))}dtd\sigma\right]^\theta dh\right\}^{1/\theta}\leq$$

(после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, применяя неравенство Харди, имеем)

$$\leq c\left\{\int_0^{h_0^{1/\alpha_\nu}}\bar h^{-1-\theta-\theta\alpha_i}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(D\setminus D(\bar h/4))}dt\right]^\theta d\bar h\right\}^{1/\theta}\leq$$

(после замены $\left(\frac{\bar h}{4}\right)^{\alpha_i}=h$, используя неравенство Харди, получаем)

$$\leq c\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta l_i}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|^\theta_{L_p(D\setminus D(h^{1/\alpha_\nu}))}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq c\|f\|_{B^l_{p,\theta}(\mathring{D})}.$$

Норма $\|f\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}}$ оценивается аналогично. Из полученных оценок следует утверждение леммы.

§ 3. Граничные свойства функций на поверхностях класса Гельдера

Рассмотрим область

$$G=(0\leq x_1\leq\psi(x'),\ x'\in D). \tag{31}$$

Как и в § 2, будем считать, что область G ограничена, удовлетворяет слабому условию рога с параметрами $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\left(\frac{1}{l_1},\dots,\frac{1}{l_n}\right)$ и существует линейный ограниченный оператор продолжения с G на все E_n , причем продолженные функции можно считать финитными. Предположим, кроме того, что область D удовлетворяет слабому условию l'-рога, а функция ψ удовлетворяет условиям (10) , (11) . В силу замечания 1 рассуждения можно проводить для области D_ε . Введем на G класс функций, равных нулю при $x_1<0$. При этом, как и ранее, предполагается, что x_1 - регулярная координата, т.е. $l_1=\max\limits_{1\leq i\leq n}l_i$, $l_1-[l_1]>\frac{1}{p}$. Таким образом, $f\in\mathring{B}^l_{p,\theta}$, если $f\in B^l_{p,\theta}$ и

$$\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}=0,\quad k=0,\dots,[l_1].$$

Обозначим через Γ поверхность $x_1=\psi(x')=\psi(x_2,\dots,x_n)$. Будем предполагать также, что ψ продолжена на все E_{n-1} с условием $|\psi|\leq K<\infty$. Положим $\mathcal{F}|_\Gamma=\lim\limits_{\sigma\to 0}\mathcal{F}(\psi(x')+\sigma,x')$. Рассмотрим свойства следов функций класса $\mathring{B}^{l}_{p,\theta}$ на Γ. Имеет место следующая

Л е м м а 3. Пусть $\mathcal{F}\in\mathring{B}^{l}_{p,\theta}(G)$, G имеет вид (31) и $l=\max\limits_{1\leq i\leq n} l_i$, $l_1-[l_1]>\frac{1}{p}$. Пусть области G и D удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда след $\mathcal{F}|_\Gamma=f(x')$ существует и имеет место оценка

$$\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}\leq C\|\mathcal{F}\|_{B^{l}_{p,\theta}(G)},$$

где $\tau_i=\frac{l_i}{l_1}\left(l_1-\frac{1}{p}\right)$, $i=2,\dots,n$, $l=(l_1,\dots,l_n)$, $\tau=(\tau_2,\dots,\tau_n)$ и C не зависит от $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу леммы 2 достаточно оценить $\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(\mathring{D})}$, а в силу условий на область G можно считать $\mathcal{F}\in\mathring{B}^{l}_{p,\theta}(E_n^+)$. Фиксируем некоторую точку $x'\in D\setminus D(h^{1/\alpha_\nu})$. Обозначим через $h_1(x')$ минимальную длину l'-рога с вершиной на ∂D которым достигается точка x' (условие а) из § 1); одну из таких вершин обозначим через $x^0(x')$. Используя представление (22) и оценку (26), получим, разбивая интеграл по σ,

$$|\Delta^m_\nu(\delta h)f(x')|=|\Delta^m_\nu(\delta h)\mathcal{F}(\psi(x'),x')|\leq$$

$$\leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\geq 0\\ \sum\beta_k=s-\tau}}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^{m\delta h}\frac{h^{m-1}\varepsilon^{-|\alpha|}}{\varepsilon^{\alpha_\nu m}\varepsilon^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}}\left|D^{(\tau)}\Omega_1\left(\frac{y_1-\psi(x'+ue_\nu)}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right)\times\right.$$

$$\times D^{(m-s)}\Omega_\nu\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\sigma^{\alpha_\nu}}\right)\prod_{k=1}^{\tau}\psi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)\left|\prod_{j=2}^{n(\nu)}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{\varepsilon^{\alpha_j}}\right)\right|\mathcal{F}(y)|dydu+$$

$$+C\sum_{\nu=2}^{m}\left|\Delta^m_\nu(\delta h)\int\limits_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\sigma^{-1-\alpha_i}\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_1}\sigma^{-|\alpha|}|\Delta^m_i(\delta t)\mathcal{F}(y)|\left|\chi_{i1}\left(\frac{y_1-\psi(x')}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ji}\left(\frac{y_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)\right|\times\right.$$

$$\times M_i\left(t\sigma^{-\alpha_i}\right)dtdyd\sigma\Bigg|+C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\geq 0\\ \sum\beta_k=s-\tau}}\left|\int\limits_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\sigma^{-1-\alpha_i}\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_1}\sigma^{-|\alpha|}\times\right.$$

$$\times|\Delta^m_i(\delta t)\mathcal{F}(y)|\prod_{j=2}^{n(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)\int\limits_0^{m\delta h}\frac{h^{m-1}}{\sigma^{\alpha_\nu m}\sigma^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}}\times$$

$$\times\left|D^{(\tau)}\chi_{i1}\left(\frac{y_1-\psi(x'+ue_\nu)}{\sigma^{\alpha_1}}\right)D^{(m-s)}\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\sigma^{\alpha_\nu}}\right)\right|\prod_{k=1}^{\tau}\psi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)M_i(t\sigma^{-\alpha_i})dtdyd\sigma du=$$

$$=\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}g^1_{s,\tau,\nu,i}(\varepsilon,x')+\sum_{i=2}^{n}g_{i,\nu}(x')+\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}g^2_{s,\tau,\nu,i}(\varepsilon,x').$$

Поскольку представление (22) в данной точке x тождественно по ε, то, полагая $\varepsilon = h_1(x')$ и интегрируя по x' и h, получаем

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{r}_{p,\theta}(\mathring{D}_\varepsilon)} \le c \sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{h_0} h^{-1-\theta r_\nu} \|g^1_{s,\tau,\nu,i}(h_1(x'),x')\|^{\theta}_{L_p(\mathring{D}_\varepsilon)} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+ c\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} \left\{ \int_0^{h_0} h^{-1-\theta r_\nu} \|g_{i\nu}(x')\|^{\theta}_{L_p(\mathring{D}_\varepsilon)} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}} +$$

$$+ c\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{h_0} h^{-1-\theta r_\nu} \|g^2_{s,\tau,\nu,i}(h_1(x'),x')\|^{\theta}_{L_p(\mathring{D}_\varepsilon)} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \sum_{s,\tau,\nu,i} J^1_{s,\tau,\nu,i} + \sum_{i,\nu} J^2_{i,\nu} + \sum_{s,\tau,\nu,i} J^3_{s,\tau,\nu,i}. \tag{32}$$

Оценим $J^2_{i,\nu}$. Учитывая свойство инвариантности нормы относительно сдвига, условие (23), применяя обобщенное неравенство Минковского по t, σ и неравенство Гельдера по y, получаем

$$J^2_{i,\nu} \le \left\{ \int_0^{h_0} h^{-1-\theta r_\nu} \left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}} \sigma^{-1-\alpha_i} \int_0^{b_i\sigma^{\alpha_i}} \left| \int_{E_{n-1}} \int_{E_n} \sigma^{-|\alpha|} |\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)|^p \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left|\chi_{i1}\left(\frac{y_1-\psi(x')}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)\right| dy\,dx' \right|^{1/p} dt\,d\sigma \right]^{\theta} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(интегрируя по x', y с учетом ограниченности функции χ_{i1} и финитности функций χ_{ij}, имеем)

$$\le c\left\{ \int_0^{h_0} h^{-1-\theta r_\nu} \left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}} \sigma^{-1-\alpha_i+\frac{\alpha_1}{p}} \int_0^{b_i\sigma^{\alpha_i}} \|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)} dt\,d\sigma \right]^{\theta} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(после замены $\bar h = h^{1/\alpha_\nu}$, используя неравенство Харди, получаем)

$$\le c\left\{ \int_0^{d} \bar h^{-1-\theta r_\nu\alpha_\nu-\theta\alpha_i-\frac{\theta\alpha_1}{p}} \left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}} \|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)} dt \right]^{\theta} d\bar h \right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(после замены $b_i\bar h^{\alpha_i} = h$, применяя неравенство Харди и учитывая условие $l_i\alpha_i = 1$, имеем)

$$\le c\left\{ \int_0^{d} h^{-1-\theta r_\nu\alpha_\nu l_i + \frac{\theta\alpha_1 l_i}{p}} \|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|^{\theta}_{L_p(E_n)} dh \right\}^{\frac{1}{\theta}},$$

здесь $d < \infty$ - некоторое число. Из условий $r_\nu = \frac{l_\nu}{l_1}\left(l_1 - \frac{1}{p}\right)$, $\alpha_i l_i = 1$ получаем $-1-\theta r_\nu\alpha_\nu l_i + \frac{\theta\alpha_1 l_i}{p} = -1-\theta l_i$. Таким образом,

$$J^2_{i\nu} \le c\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^{l}_{p,\theta}(E_n)}. \tag{33}$$

Оценим $\mathcal{J}^3_{s,\tau,\nu,i}$. Выбирая δ достаточно малым, в силу условия в) из § 1, будем иметь $x'+ue_\nu \notin D\setminus D\left(\frac{h_1(x')}{2}\right)$. Откуда в силу оценки (11), учитывая что $\sum_{k=1}^{\tau}\beta_k = s-\tau$, $\alpha_1\tau-\alpha_\nu s\le 0$, $v\le h_1(x')$, получаем

$$\frac{1}{v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}}\left|\prod_{k=1}^{\tau}\psi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)\right| \le \frac{M_1 h_1^{\sum_{k=1}^{\tau}(\alpha_1-(\beta_k+1)\alpha_\nu)}(x')}{v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}} =$$

$$= M\,\frac{h_1^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}(x')}{v^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}} \le M_1 < \infty .$$

В силу ограниченности области D_ε имеем $h_1(x')\le d<\infty$. Подставляя полученную оценку в $\mathcal{J}^3_{s,\tau,\nu,i}$, применяя обобщенное неравенство Минковского по t, v, u и неравенство Гельдера с учетом (23) и ограниченности функций $\chi^{(\tau)}_{i1}$ $(\chi_{i1}\in C_0^\infty)$, получаем

$$\mathcal{J}^3_{s,\tau,\nu,i} \le C\left\{\int_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\infty}\chi_{[0,d]}(v)\,v^{-1+\alpha_i-\alpha_\nu m}\int_0^{\delta mh}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}} h^{m-1}\left|\int_{E_{n-1}}\int_{E_n} v^{-|\alpha|}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)\right|^p\prod_{j=2}^{n(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)D^{(m-s)}\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right)dy\,dx'\right|^{\frac{1}{p}}dt\,dv\,du\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(интегрируем по x', y, u)

$$\le C\left\{\int_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu+m\theta}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\infty}\chi_{[0,d]}(v)\,v^{-1+\alpha_i-\alpha_\nu m+\frac{\alpha_1}{p}}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\right\|_{L_p(E_n)}dt\,dv\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(применяя неравенство Харди после замены $\bar h = h^{1/\alpha_\nu}$, имеем)

$$\le C\left\{\int_0^{d}\bar h^{-1-\theta\tau_\nu\alpha_\nu-\alpha_i\theta+\frac{\alpha_1\theta}{p}}\chi_{[0,d]}(\bar h)\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\right\|_{L_p(E_n)}dt\right]^{\theta}d\bar h\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Здесь $\chi_{[0,d]}(v)$ - характеристическая функция отрезка $[0,d]$. Поступая далее, как в оценке $\mathcal{J}^2_{i,\nu}$, получаем

$$\mathcal{J}^3_{s,\tau,\nu,i} \le C\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}(E_n)}. \tag{34}$$

Оценим $\mathcal{J}^1_{s,\tau,\nu,i}$. Из финитности Ω_1 имеем $|y_1|\le|\psi(x')|+b_i h_1^{\alpha_1}(x')$. Так как $x_0(x')\in\partial D$, и следовательно, $\psi(x^0)=0$, а $h_1(x)$ - минимальная длина рога с вершиной в точке x^0, то, используя (10), получаем

$$|\psi(x')| = |\psi(x')-\psi(x^0)| \le \left[\sum_{i=2}^{n}|x_i-x_i^0|^{1/\alpha_i}\right]^{\alpha_1} \le \left[\sum_{i=2}^{n}|h_1^{\alpha_i}(x)|^{1/\alpha_i}\right]^{\alpha_1} = ch_1^{\alpha_1}(x).$$

Таким образом, $|y_1|\le ch^{\alpha_1}(x')$. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме с учетом $\mathcal{F}\in \mathring{B}^l_{p,\theta}$ и полученной оценки, имеем (в случае $[\ell_1]=0$ рассуждения проще и проводятся без использования формулы Тейлора)

$$|\mathcal{F}(y_1,y')|=\left|\frac{1}{([\ell_1]-1)!}\int_0^{y_1}(y_1-w)^{[\ell_1]-1}\mathcal{F}^{([\ell_1])}(w,y')dw\right|\leq C\int_0^{ch_1^{\alpha_1}(x)}\left(h_1^{\alpha_1}(x)-w\right)\left|\mathcal{F}^{([\ell_1])}(w,y')\right|dw.$$

Здесь $[\ell_1]$ - целая часть ℓ_1. Рассуждая аналогично, как в оценке $J^3_{s,\tau,\nu,i}$, имеем

$$\frac{\prod_{k=1}^{\tau}\psi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)}{h_1^{\alpha_1\tau-\alpha_\nu s}(x')}\leq M<\infty.$$

Подставляя полученные неравенства в $J^1_{s,\tau,\nu,i}$ и интегрируя по y_1, получаем

$$J^1_{s,\tau,\nu,i}\leq C\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\tau_\nu}\left\|\int_{E_n}\int_0^{m\delta h}\frac{h_1^{-|\alpha'|}(x)}{h_1^{\alpha_\nu m}(x)}\cdot h^{m-1}\left|D^{(m-s)}\Omega_\nu\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{h_1^{\alpha_\nu}(x)}\right)\right.\right.\right.\times$$

$$\left.\left.\left.\times\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{h_1^{\alpha_j}(x)}\right)\right|\int_0^{h_1^{\alpha_1}(x)}\left(h_1^{\alpha_1}(x)-w\right)^{[\ell_1]-1}\left|\mathcal{F}^{([\ell_1])}(w,y')\right|dw\,dy'\right\|^{\theta}_{L_p(E_{n-1})}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \quad (35)$$

Обозначим

$$\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)=\Omega_\nu^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right)\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right),$$

$$\omega_\nu\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)=\left[\Omega_\nu^{(m-s+1)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right)\cdot\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right]\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right),$$

$$\omega_k\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)=\left[\Omega_k'\left(\frac{y_k-x_k}{v^{\alpha_k}}\right)\cdot\frac{y_k-x_k}{v^{\alpha_k}}\right]\prod_{\substack{j=2\\ j\neq k,\nu}}^{n}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\Omega_\nu^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right).$$

В силу (23), $\omega_k\in C_0^\infty(E_{n-1})$, $k=1,\ldots,n$. Применяя очевидное соотношение $\mathcal{F}(b)=\int_a^b\mathcal{F}'(\tau)d\tau+\mathcal{F}(a)$, имеем

$$h_1^{-|\alpha'|-\alpha_\nu m}(x)\,\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{h_1^{\alpha'}(x)}\right)\int_0^{h_1^{\alpha_1}(x)}\left(h_1^{\alpha_1}(x)-w\right)^{[\ell_1]-1}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|dw=$$

$$=\left(h^{1/\alpha_\nu}\right)^{-|\alpha'|-\alpha_\nu m}\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{h^{\alpha'/\alpha_\nu}}\right)\int_0^{h^{\alpha_1/\alpha_\nu}}\left(h^{\alpha_1/\alpha_\nu}-w\right)^{[\ell_1]-1}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|dw+$$

$$+\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{h_1(x)}\left(\sum_{k=2}^{n}a_k v^{-|\alpha'|-\alpha_\nu m-1}\omega_k\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)\int_0^{v^{\alpha_1}}\left(v^{\alpha_1}-w\right)^{[\ell_1]-1}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|dw+\right.$$

$$+ a_1 v^{-|\alpha'|-\alpha_\nu m}\,\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right) v^{\alpha_1-1}\int\limits_0^{v^{\alpha_1}}(v^{\alpha_1}-w)^{[\ell_1]-2}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|dw\Big)dv.$$

Подставляя полученное выражение в (35), применяя обобщеннное неравенство Минковского по u, v , неравенство Гельдера по y', w , и учитывая $|v-w|\le v$, $|h^{\alpha_1/\alpha_\nu}-w|\le h^{\alpha_1/\alpha_\nu}$, $h_1(x)\le d<\infty$, получаем

$$\mathcal{J}^1_{s,\tau,\nu,l}\le C\sum_{\kappa=2}^{n}\Bigg\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu}\Bigg[\int\limits_0^{m\delta h} h^{m-1}\left(h^{1/\alpha_\nu}\right)^{-\alpha_\nu m} h^{\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}([\ell_1]-1)}\times$$

$$\times\int\limits_{E_{n-1}}\left(\int\limits_0^{h^{\alpha_1/\alpha_\nu}}\int\limits_{E_{n-1}}\omega_\kappa\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{h^{\alpha'/\alpha_\nu}}\right)h^{-\frac{|\alpha'|}{\alpha_\nu}}dy'dw\right)^{p-1}\times\left(\int\limits_0^{h^{\alpha_1/\alpha_\nu}}\int\limits_{E_{n-1}}\omega_\kappa\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{h^{\alpha'/\alpha_\nu}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times h^{-\frac{|\alpha'|}{\alpha_\nu}}|\mathcal{F}(w,y')|^p dy'dw\right|^{1/p}du\Bigg]^\theta dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}+C\Bigg\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu}\Bigg[\int\limits_0^{m\delta h} h^{m-1}\times$$

$$\times\int\limits_{h^{1/\alpha_\nu}}^{d} v^{-\alpha_\nu m-1+\alpha_\nu([\ell_1]-1)}\Bigg|\int\limits_{E_{n-1}}\left(\int\limits_0^{v^{\alpha_1}}\int\limits_{E_{n-1}}\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)v^{-|\alpha'|}dwdy'\right)^{p-1}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{v^{\alpha_1}}\int\limits_{E_{n-1}}\omega_1\left(\frac{y'-x'-ue_\nu}{v^{\alpha'}}\right)v^{-|\alpha'|}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|dwdy'\right)dx'\Bigg|^{\frac{1}{p}}dudv\Bigg]^\theta dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(интегрируя по x', y', w, u с учетом $\omega_\kappa\in C_0^\infty(E_{n-1})$, имеем)

$$\le C\Bigg\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu}\cdot h^{\theta\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}([\ell_1]-1)}\cdot h^{\theta\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}\cdot\frac{1}{p'}}\Bigg[\int\limits_0^{h^{\alpha_1/\alpha_\nu}}\int\limits_{E_{n-1}}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|^p dwdy'\Bigg]^{\frac{\theta}{p}}dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\Bigg\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu+m\theta}\Bigg[\int\limits_{h^{1/\alpha_\nu}}^{d} v^{-\alpha_\nu m-1+([\ell_1]-1)\alpha_1+\frac{1}{p'}}\Bigg[\int\limits_0^{v^{\alpha_1}}\int\limits_{E_{n-1}}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|^p dwdy'\Bigg]^{\frac{\theta}{p}}dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(делая замену $h^{\alpha_1/\alpha_\nu}=\bar h$, $h^{1/\alpha_\nu}=t$ и применяя неравенство Харди во втором слагаемом, получаем)

$$\le C\Bigg\{\int\limits_0^{h_0}\bar h^{-1-\frac{\theta\tau_\nu\alpha_\nu}{\alpha_1}+\theta([\ell_1]-1)+\frac{\theta}{p'}}\Bigg[\int\limits_0^{\bar h}\int\limits_{E_{n-1}}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|^p dy'dw\Bigg]^{\frac{\theta}{p}}d\bar h\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\Bigg\{\int\limits_0^{d} t^{-1-\theta\tau_\nu\alpha_\nu+\theta([\ell_1]-1)\alpha_1+\frac{\theta}{p'}}\Bigg[\int\limits_0^{t^{\alpha_1}}\int\limits_{E_{n-1}}\left|D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')\right|^p dwdy'\Bigg]^{\frac{\theta}{p}}dt\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(делая замену $t^{\alpha_1}=h$ во втором интеграле и используя условие $\tau_\nu=\frac{\ell_\nu}{\ell_1}\times$ $\times(\ell_1-\frac{1}{p})$, имеем)

$$\leq C\left\{\int_0^{d_1} h^{-1-\theta(\ell_1-[\ell_1])}\left[\int_0^h\int_{E_{n-1}} |D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')|^p dy'dw\right]^{\frac{\theta}{p}} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Так как $\mathcal{F}(w,y')\in \overset{\circ}{B}{}^{\ell}_{p,\theta}(E^+_n)$, то $D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')=0$ почти всюду при $w<0$, откуда получаем

$$\int_0^h\int_{E_{n-1}} |D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y)|^p dwdy' = \int_{-\infty}^0\int_{E_{n-1}} |D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w+h,y')|^p dwdy -$$

$$\int_{-\infty}^0\int_{E_{n-1}} |D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w+h,y')-D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')|^p dwdy' - \int_{-\infty}^0\int_{E_{n-1}} |\Delta_1(h)D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')|^p dwdy' \leq$$

$$\leq \int_{E_n} |\Delta_1(h)D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')|^p dwdy'.$$

Таким образом,

$$\mathcal{J}^1_{s,\tau,\nu,i} \leq C\left\{\int_0^{d_1} h^{-1-\theta(\ell_1-[\ell_1])}\left[\int_{E_n}|\Delta_1(h)D^{([\ell_1])}\mathcal{F}(w,y')|^p dwdy'\right]^{\frac{\theta}{p}}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}. \qquad (36)$$

Из (32)-(36) получаем, принимая во внимание, что $\mathcal{F}$ продолжена на E_n ограниченным образом

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{\tau}_{p,\theta}(\overset{\circ}{D}_\varepsilon)} \leq C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)} \leq C_1\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}. \qquad (37)$$

Оценка L_p -нормы $f(x')$ элементарна. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть поверхность Γ имеет вид $x_1=\psi(x'), x'\in D$. Область D удовлетворяет условию ℓ'-рога и условиям а)-в), а функция $\psi(x')$ - условиям (10), (11). Тогда если $f\in B^{\tau}_{p,\theta}(\Gamma)$, где $\tau=(\tau_2,\ldots,\tau_n)$, $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_1}(\ell_1-\frac{1}{p})$, $i=2,\ldots,n$, $\ell_1=\max\limits_{1\leq i\leq n}\ell_i$, то существует функция $\mathcal{F}(x)$ определенная на G, такая что

$$\mathcal{F}|_\Gamma = f(x'),$$

и

$$\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)} \leq C\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(\Gamma)}, \qquad (38)$$

где $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)$, а C не зависит от f и $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать $\psi(x')$ продолженной на все E_{n-1}, так что $|\psi|\leq K<\infty$. Для удобства будем считать $f(x')$

продолженной на E_{n-1} ограниченным образом, т.е. $\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)} \le C\|f\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}$ где C не зависит от f. При наших условиях на область можно воспользоваться представлением (22) в E_{n-1}. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F}(x_1,x')=f_{\varepsilon_1}(x')\chi\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right)+\sum_{i=2}^{n}\int_0^{\varepsilon_1} v^{-|\alpha'|-\alpha_i-1}dv\int_{E_1}\int_{E_{n-1}}\Delta_i^m(\delta t)f(x'+y'+te_i)\times$$
$$\times\chi_i(y':v^{\alpha'})M_i(tv^{-\alpha_i})\chi\left(\frac{x_1-\psi(x')}{v^{\alpha_1}}\right)dy'dt=g_0(x)+\sum_{i=2}^{n}g_i(x), \tag{39}$$

где $m>\max\limits_{1\le i\le n}\ell_i=\ell_1$, функции χ_i, M_i удовлетворяют условиям (23), $x'=(x_2,\dots,x_n), y'=(y_2,\dots,y_n), \alpha'=(\alpha_2,\dots,\alpha_n), |\alpha'|=\sum_{i=2}^{n}\alpha_i$, а $\chi(\tau)\in C_0^{\infty}(E_1)$ и имеет вид

$$\chi(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in[-1,1],\\ 0, & \tau\notin[-2,2].\end{cases} \tag{40}$$

Покажем, что $\mathcal{F}(x_1,x')$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, в силу (38) и (22), $\mathcal{F}(\psi(x'),x')=\mathcal{F}|_{\Gamma}=f(x')$. Докажем оценку (40), поступая аналогично лемме 1. Оценим $\|g_i(x)\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}$. Разобьем интеграл по v на два. Используя в первом слагаемом свойство инвариантности нормы относительно сдвига, а во втором применяя оценку (26) при $\varphi_1\left(\frac{x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)=\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)$, $\varphi_2\left(\frac{\psi(x)}{v^{\alpha_1}}\right)=\chi\left(\frac{x_1-\psi(x')}{v^{\alpha_1}}\right)$ с учетом оценки (11), условий б), в) и неравенства $v\le\varepsilon$, получаем

$$\|g_i(x)\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(D)}\le C\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu}\left\|\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}v^{-1-\alpha_i}\int_{E_n}\Delta_i^m(\delta t)f(x'+te_i)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\chi_i\left(\frac{y'-x'}{v^{\alpha'}}\right)M_i(tv^{-\alpha_i})v^{-|\alpha'|}\chi\left(\frac{x_1-\psi(x')}{v^{\alpha_1}}\right)dy'dt\right\|^{\theta}_{L_p(D)}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$
$$+c\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu}\left\|\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}v^{-1-\alpha_i}\int v^{-|\alpha'|}\Delta_i^m(\delta t)f(x'+te_i)M_i(tv^{-\alpha_i})\times\right.\right.$$
$$\times\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\frac{h^{m-1}}{v^{\alpha_\nu m}}\int_0^{m\delta h}\left|D^{(m-s)}\chi_\nu\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{v^{\alpha_\nu}}\right)D^{(\tau)}\left(\frac{x_1-\psi(x'+ue_\nu)}{v^{\alpha_1}}\right)\right|du\times$$
$$\left.\left.\times dy'dtdv\right\|^{\theta}_{L_p(D)}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(применяя обобщенное неравенство Минковского по (t,v) и (t,v,u), неравенство Гельдера по y', интегрируя по x_1, x', y', u с использованием (23), получаем)

$$\leq C\sum_{\nu=2}^{n}\left\{\int_0^{h_0} h^{-1-\theta\ell_\nu}\left|\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}} v^{-1-\alpha_i+\frac{\alpha_i}{p}}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(E_{n-1})}dt\,dv\right|^\theta dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\sum_{\nu=2}^{n}\left\{\int_0^{h_0} h^{-1-\theta\ell_\nu+\theta m}\left|\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon} v^{-1-\alpha_i+\frac{\alpha_i}{p}-\alpha_\nu m}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(E_{n-1})}dt\,dv\right|^\theta dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq$$

(применяя неравенство Харди после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, имеем)

$$\leq C\sum_{\nu=2}^{n}\left\{\int_0^{d_1}\bar h^{-1-\theta-\theta\alpha_i+\frac{\theta\alpha_i}{p}}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(E_{n-1})}dt\right]^\theta d\bar h\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq$$

(используя неравенство Харди после замены $\bar h^{\alpha_i}=h$, учитывая условие $r_i=\frac{\ell_i}{\ell_1}\left(\ell_1-\frac{1}{p}\right)$ и ограниченность оператора продолжения, получаем)

$$\leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{r}_{p,\theta}(E_{n-1})}\leq C\|f\|_{B^{r}_{p,\theta}(D)}.$$

Поскольку область D предполагается ограниченной, а функция $|\psi|\leq K<\infty$, то, полагая в (39) ε_1 достаточно большим, получаем, что на D функция $\chi\left(\frac{x_1-\psi(x')}{\varepsilon_1^{\alpha_1}}\right)=1$ и $\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(D)$-норма функции $g_0(x)$ элементарно оценивается через $\mathcal{L}^{r}_{p,\theta}(D)$-норму функции $f_{\varepsilon_1}(x')$. Оценка L_p-нормы функции $\mathcal{F}(x_1,x')$ через $B^{r}_{p,\theta}(D)$-норму $f(x')$ проводится аналогично оценке $\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(D)$-нормы функции $\mathcal{F}$. Лемма доказана.

Пусть области G и D удовлетворяют условиям лемм 3, 4 и пусть $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$. Предположим, что функция $\mathcal{F}$ продолжена ограниченным образом на все E_n некоторой финитной функцией. Построим, используя представление (22), функцию (см. [3, § 16, формула (34)])

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=0}^{[\ell_1]}\frac{(-1)^k x_1^k}{k!}\chi\left(\frac{x_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right)\int_{E_n}\varepsilon^{-|\alpha|-\alpha_1 k}\Omega_1^{(k)}\left(\frac{y_1}{\varepsilon^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\Omega_j\left(\frac{y_j-x_j}{\varepsilon^{\alpha_j}}\right)\mathcal{F}(y)dy+$$

$$+\sum_{k=0}^{[\ell_1]}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\varepsilon_1}\int_{E_{n-1}}v^{-|\alpha|-1-\alpha_i}(-1)^k\left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right)^k\chi_{i1}^{(k)}\left(\frac{y_1}{v^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\times$$

$$\times\chi\left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right)M_i\left(tv^{-\alpha_i}\right)\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)\,dy\,dt\,dv=\sum_{k=1}^{[\ell_1]}\left(g_{0k}(x)+\sum_{i=1}^{n}g_{ik}(x)\right),\qquad(41)$$

где $m>\max_{1\leq i\leq n}\ell_i$, а функция χ определена формулой (40). В силу (22) и (40) легко проверить, что $\left.\frac{\partial^k\Phi}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}=\left.\frac{\partial^k\mathcal{F}}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}$, $k=0,1,\ldots,[\ell_1]$.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)$, $\ell_1-[\ell_1]>\frac{1}{p}$, а области **G** и

D удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда функция $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит классу $B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)$ и справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)} \leq C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)},$$

где C не зависит от $\mathcal{F}$.

Доказательство. Обозначим $\chi_k(t)=t^k\chi(t)$, очевидно, $\chi_k(t)\in C_0^{\infty}(E_1)$. Из оценки (27) имеем

$$\left|\Delta_1^m(\delta h)\chi_k\left(\frac{x_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\right| \leq \frac{h^{m-1}}{\upsilon^{\alpha_1 m}}\int_0^{m\delta h}\left|D^m\chi_k\left(\frac{x+u}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\right|du,$$

$$\left|\Delta_\nu^m(\delta h)\chi_{j\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\right| \leq \frac{h^{m-1}}{\upsilon^{\alpha_\nu m}}\int_0^{m\delta h}\left|D^m\chi_{j\nu}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\right|du.$$

Поступаем далее, как в лемме 4. Разобьем интеграл по υ на два: $\int_0^{\varepsilon}d\upsilon = \int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}d\upsilon+\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}d\upsilon$. В первом слагаемом используем свойство инвариантности нормы относительно сдвига, применяем обобщенное неравенство Минковского по t,υ и неравенство Гельдера по y, интегрируем по x и y с учетом ограниченности функций $\chi^{(k)}_{i1}\left(\frac{y_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)$ и свойств функций χ_k,χ_{ij}. Таким образом, получим, используя полученные выше неравенства,

$$\|g_{ik}(x)\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(E_n)} \leq C\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\upsilon^{-1-\alpha_i}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p}dt\,d\upsilon\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\ell_\nu+m\theta}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\upsilon^{-1-\alpha_i}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p}dt\,d\upsilon\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

(применяя неравенство Харди после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar{h}$ и учитывая условие $\alpha_\nu\ell_\nu=1$, имеем)

$$\leq C\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{d_1}\bar{h}^{-1-\theta-\theta\alpha_i}\left[\int_0^{b_i\bar{h}^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}dt\right]^{\theta}d\bar{h}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

(сделав замену $\bar{h}^{\alpha_i}=h$ и применив неравенство Харди, получим)

$$\leq C\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{d_1}h^{-1-\theta\ell_i}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|^{\theta}_{L_p(E_n)}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} = C\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}.$$

Рассуждая далее, как в конце леммы 4, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Замечание 2. Как следует из леммы 5, любую функцию $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)$ можно представить в виде $\mathcal{F}=\Phi+\mathcal{F}-\Phi=\Phi+\mathcal{F}_1$, где функция $\mathcal{F}_1$, в силу леммы 5 и по построению фуякции Φ, обладает следующими свойствами:

$$\left.\frac{\partial^k \mathcal{F}_1}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=0}=0,\ k=0,\dots,[\ell_1],\ \|\mathcal{F}_1\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)}\le c\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)},$$

а $\Phi\in B^{\ell}_{p,\theta}(E_n)$ и бесконечно дифференцируема по x_1.

§ 4. Некоторые свойства функций, суммируемых с весом

Будем рассматривать область

$$G=\begin{pmatrix}-\infty<x_n\le\varphi(x'), & x'=(x_1,\dots,x_{n-1})\\ -\infty<x_j<\infty, & j=1,\dots,n-1,\end{pmatrix}, \tag{42}$$

где x_n - нерегулярная координата, т.е. $\ell_n<\max\limits_{1\le i\le n}\ell_i=\ell_1$. Область G будем предполагать ограниченной и удовлетворяющей слабому условию рога с параметрами $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_1=\frac{1}{\ell_1},\dots,\alpha_n=\frac{1}{\ell_n}$. Пусть функция $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, $1<p<\infty$. Предположим, как и ранее, что существует линейный ограниченный оператор продолжения с области G на все E_n. Будем считать, что функция $\mathcal{F}$ распространена на все E_n и $\operatorname{supp}\mathcal{F}<\infty$. Положим $\mathcal{F}|_{\partial G}=\lim\limits_{\sigma\to0}\mathcal{F}(x'+\sigma,\varphi(x'))=f(x')$. Рассмотрим свойства функции $f(x')$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$.

Л е м м а 6. Пусть $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, область G имеет вид (42), где функция $\varphi(x')$ удовлетворяет условиям (5). Тогда имеет место оценка

$$\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)}\le c\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)},$$

где $\tau=\tau_1,\dots,\tau_{n-1}$, $\tau_i>0$, $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_n}\left(\ell_n-\frac{1}{p}\right)$, $i=1,\dots,n-1$, C не зависит от $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся для функции $\mathcal{F}(x)$ представлением (22) с условиями (23) на входящие в ядро функции. Из представления (22) имеем

$$f(x')=\mathcal{F}(x',\varphi(x'))-\mathcal{F}_\varepsilon(x',\varphi(x'))+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{F}_{\varepsilon,i}(x',\varphi(x'))=f_0(x')+\sum_{i=1}^{n}f_{\varepsilon,i}(x').$$

Оценим $\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(0)$ -норму какой-нибудь функции $f_{\varepsilon,i}(x')$. Разбивая интеграл по σ, учитывая свойство инвариантности нормы относительно сдвига в первом слагаемом, а во втором слагаемом используя оценку (26) с $\psi(x)=\varphi(x')$, получаем

$$\|f_{\varepsilon,i}(x')\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(0)}\le c\sum_{\nu=1}^{n-1}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1-\theta\tau_\nu}\left\|\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_{E_n}\int_{E_1}\sigma^{-1-|\alpha|-\alpha_i}\prod_{j=1}^{n-1}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\chi_{in}\left(\frac{y_n-\varphi(x')}{\sigma^{\alpha_n}}\right)M_i\left(t\sigma^{-\alpha_i}\right)\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)dydt\right\|^{\theta}_{L_p(Q(h^{\alpha/\alpha_\nu-1}))}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+c\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\int_0^{h_0}h^{-1+\theta\tau_\nu}\times\right.$$

$$\times\left\{\int\limits_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\left\|\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_1} v^{-1-|\alpha|-\alpha_i}\left|\prod_{j=1}^{n-1(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\frac{h^{m-1}}{v^{\alpha_\nu m}}\chi_{i\nu}^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{v^{\alpha_\nu}}\right)\chi_{in}^{(\tau)}\left(\frac{y_n-\varphi(x')}{v^{\alpha_n}}\right)\right|\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\ge 0\\ \sum_{k=1}^{\tau}\beta_k=s-\tau}}\frac{\prod\varphi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}M_i(tv^{-\alpha_i})\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)dy\right\|^{\theta}_{L_p(Q(h^{\alpha_1\alpha_\nu^{-1}}))}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}\mathcal{J}_\nu^1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau}. \tag{43}$$

Оценим $\mathcal{J}_\nu^1$. Применяя обобщенное неравенство Минковского по t, v, неравенство Гельдера по y, учитывая (23), получаем

$$\mathcal{J}_\nu^1\le c\left\{\int\limits_0^{h_0}h^{-1-\theta\tau_\nu}\left[\int\limits_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int\limits_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_n}v^{-|\alpha|}\prod_{j\,1}^{n-1}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\chi_{in}\left(\frac{y_n-\varphi(x')}{v^{\alpha_n}}\right)\left|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)\right|^p dy dx'\right|^{\frac{1}{p}}dtdv\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(учитывая ограниченность функции χ_{in}, интегрируем по x', y)

$$\le c\left\{\int\limits_0^{h_0}h^{-1-\theta\tau_\nu}\left[\int\limits_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int\limits_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i-\frac{\alpha_n}{p}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)\right\|_{L_p(E_n)}dtdv\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(сделав замену $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, применив неравенство Харди, получим)

$$\le c\left\{\int\limits_0^{h_1}\bar h^{-1-\theta\tau_\nu\alpha_\nu-\theta\alpha_i-\frac{\theta\alpha_n}{p}}\left[\int\limits_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\left\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\right\|_{L_p(E_n)}dt\right]^{\theta}d\bar h\right\}^{\frac{1}{\theta}}\le$$

(используя неравенство Харди после замены $b_i\bar h^{\alpha_i}=h$, и учитывая условие $\tau_\nu=\frac{l_\nu}{l_n}\left(l_n-\frac{1}{p}\right)=l_\nu\left(1-\frac{\alpha_n}{p}\right)$, $\alpha_i l_i=1$, имеем)

$$\le c\left\{\int\limits_0^{h_2}h^{-1-\theta l_i}\left\|\Delta_i^m(\delta h)\mathcal{F}\right\|^{\theta}_{L_p}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}=c\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{L}^{l}_{p,\theta}(E_n)}\le$$

(используя ограниченность оператора продолжения, получаем)

$$\le c\left\|\mathcal{F}\right\|_{B^{l}_{p,\theta}(E_n)}\le c\left\|\mathcal{F}\right\|_{B^{l}_{p,\theta}(G)}.$$

Оценим $\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau}$. Обозначим $\gamma(k,\nu)=\max(0,\alpha_n-k\alpha_\nu)$, $\delta_{1\nu}=\begin{cases}1, & \nu=1,\\ 0, & \nu\ne 1.\end{cases}$ Поскольку $x'\in Q(h^{\alpha_1/\alpha_\nu})$, то $|x_1|<h^{\alpha_1/\alpha_\nu}$. Так как $0\le h\le h_0<\infty$, а $\alpha_1=\min\limits_{1\le\nu\le n}\alpha_\nu$, то $h\le ch^{\alpha_1/\alpha_\nu}$, откуда, используя оценку (5) и учитывая, что $\gamma(k,\nu)\ge 0$, $\varepsilon\ge v\ge h^{1/\alpha_\nu}$; $\alpha_1\tau-\alpha_\nu s\le 0$, $h\le h_0<\infty$, получаем

$$\left|\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\ge 0,\\ \sum\beta_k=s-\tau}}\frac{\prod_{k=1}^{\tau}\varphi^{(\beta_k+1)}(x'+ue_\nu)}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\right|\le c\sum\frac{|x_1+\delta_{1\nu}u|^{\sum_{k=1}^{\tau}\frac{\gamma(\beta_k+1,\nu)}{\alpha_1}}}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\le c\,\frac{\sum h^{\sum_1^{\tau}\frac{\gamma(\beta_k+1,\nu)}{\alpha_\nu}}}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\le c\,.$$

Подставляя полученное выражение в $\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau}$, применяя обобщенное неравенство

Минковского по t, σ, u, неравенство Гельдера по y и учитывая (23), получаем

$$\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau} \le C\left\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu}\left[\int\limits_{h^{1/\varkappa_\nu}}^{\varepsilon}\int\limits_0^{b_i\sigma^{\varkappa_i}} \sigma^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m}\int\limits_0^{m\delta h} h^{m-1}\left|\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_n}\sigma^{-|\alpha|}\left|\prod_{j=1}^{n-1(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right)\right|\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left|\chi_{i\nu}^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\sigma^{\alpha_\nu}}\right)\chi_{in}^{(\tau)}\left(\frac{y_n-\varphi(x'+ue_\nu)}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\right|\cdot|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}(y)|\,dy\,dx'\right|^{\frac{1}{p}} dt\,d\sigma\,du\right]^{\theta} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(учитывая ограниченность функций $\chi_{in}^{(\tau)}$, интегрируем по x', y, u)

$$\le C\left\{\int\limits_0^{h_0} h^{-1-\theta\tau_\nu+m\theta}\left[\int\limits_{h^{1/\varkappa_\nu}}^{\varepsilon}\int\limits_0^{b_i\sigma^{\alpha_i}} \sigma^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m-\frac{\alpha_n}{p}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}\,dt\,d\sigma\right]^{\theta} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \le$$

(делаем замену $h^{1/\varkappa_\nu} = \bar{h}$, применяем неравенство Харди, учитываем $m > \max\limits_{1\le i\le n} \ell_i$)

$$\le C\left\{\int\limits_0^{d} \bar{h}^{-1-\theta\tau_\nu\alpha_\nu-\alpha_i\theta-\frac{\alpha_n\theta}{p}}\left[\int\limits_0^{b_i\bar{h}^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}dt\right]^{\theta} d\bar{h}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Поступая далее, как в случае оценки $\mathcal{J}^1_\nu$, получаем

$$\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau} \le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}.$$

Подставляя полученные оценки $\mathcal{J}^1_\nu$, $\mathcal{J}^2_{\nu,s,\tau}$ в (43), имеем

$$\|f_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(0)} \le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}.$$

Оценки для $\|f_0(x')\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(0)}$, $\|f(x)\|_{L_p}$ проводятся аналогично. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. В силу замечания 1, оценки (10) и условий на область, функции $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ можно считать продолженными на все E_n и равными нулю вне полосы $|x_1|\le 1$.

Л е м м а 7. Пусть область G имеет вид (42). Рассмотрим функцию $\Phi(x_1,\dots,x_n)$, построенную по функции $\mathcal{F}\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ согласно (41). Тогда

$$\Phi\big|_{\partial G} = \lim_{y\to 0}\Phi(x',\varphi(x')+y) = f(x')\in L_p(E_{n-1})$$

и для $\varkappa\in\left[0,([\ell_1]+1)([\ell_1]+2)\right]$ имеет место оценка

$$\sup_{\varkappa}\|x_1^{\varkappa} f\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})} \le C\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)},$$

где $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$, $\tau_i=\frac{\ell_i}{\ell_n}\left(\ell_n-\frac{1}{p}\right)$, $i=1,\dots,n-1$, а C не зависит от $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (41) имеем

$$f(x') = \Phi(x',\varphi(x')) = \sum_{k=1}^{[\ell_1]}\left[g_{0k}(x',\varphi(x'))+\sum_{i=1}^{n} g_{ik}(x',\varphi(x'))\right].$$

Оценим $\mathcal{L}^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})$-норму какого-нибудь слагаемого $f_{ik}(x')=g_{ik}(x',\varphi(x'))$ с разностью порядка

$$m_1 > \max_{1\le\nu\le n-1} \tau_\nu - [\ell_1]([\ell_1]+1), \tag{44}$$

где

$$\|x_1^{\varkappa} f_{ik}(x')\|_{\mathcal{L}^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})} = \sum_{\nu=1}^{n-1}\left\{\int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta\tau_\nu-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}} \| |x_1|^{\varkappa}\Delta_\nu^{m_1}(\delta h) f_{ik}(x')\|^{\theta}_{L_p(E_{n-1})} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Разобьем, как и ранее, интеграл по υ на два. В первом слагаемом используем свойство инвариантности нормы относительно сдвига, применяем обобщенное неравенство Минковского по t, υ неравенство Гельдера по y с учетом условий (23) и неравенство $|x_1|\le \upsilon^{\alpha_1}$ в силу финитности функции χ; во втором слагаемом используем оценку (26) с

$$\varphi_2 = \chi_{in}\left(\frac{x_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right),$$

$$\varphi_1\left(\frac{x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right) = \begin{cases} \dfrac{x_1^{k}}{\upsilon^{\alpha_1 k}}\chi\left(\dfrac{x_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right) = \bar{\chi}\left(\dfrac{x_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right) & \text{при } \nu=1,\\ \chi_{i\nu}\left(\dfrac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right) & \text{при } \nu>1,\end{cases}$$

и оценку (44). Применяем обобщенное неравенство Минковского по t, υ, u, неравенство Гельдера по y с учетом условий (23). Таким образом, имеем

$$\|x_1^{\varkappa} f_{ik}(x')\|_{\mathcal{L}^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})} \le C\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta\tau_\nu-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}} \upsilon^{-1-\alpha_i}\times\right.\right.$$

$$\times\int_{E_{n-1}}\int_{E_n}\upsilon^{-|\alpha|}x_1^{\varkappa p}\left|\frac{x_1^{k}}{\upsilon^{\alpha_1 k}}\chi\left(\frac{x_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\right|^{p}\chi_1^{(k)}\left(\frac{y_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\right)\chi_n\left(\frac{y_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\left.\left.\times|\Delta_i^{m}(\delta t)\mathcal{F}(y)|^{p} dy\,dx'|^{\frac{1}{p}} dt\,d\upsilon\right]^{\theta} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{\varepsilon_1} h^{-1-\theta\tau_1-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_1}}\left[\int_{h^{1/\alpha_1}}^{\varepsilon}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\int_0^{m_1\delta h} h^{m_1-1}\upsilon^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m}\left|\int_{E_{n-1}}\int_{E_n}\upsilon^{-|\alpha|}\times\right.\right.\right.$$

$$\times\chi_1^{(k)}\left(\frac{y_1}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\right)\sum_{\substack{\beta_1,\dots,\beta_\tau\ge 0\\ \sum\beta_k=s-\tau}}\left|\bar{\chi}^{(s)}\left(\frac{x_1+u}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)\right|^{p}\chi_{in}^{(\tau)}\left(\frac{y_n-\varphi(x'+ue_1)}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\times$$

$$\left.\left.\times\left|\frac{\prod_{k=1}^{\tau}|x_1+u|^{\gamma(\beta_k+1,\nu)}}{\upsilon^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\right|^{p}|\Delta_i^{m}(\delta t)\mathcal{F}(y)|^{p}dy\,dx'\right|^{\frac{1}{p}}dt\,d\upsilon\,du\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\sum_{\nu=2}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta\tau_\nu-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}\int_0^{m_1\delta h} h^{m_1-1} v^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m_1}\times\right.\right.$$

$$\times\left|\int_{E_{n-1}}\int_{E_n} v^{-|\alpha|}\chi_1^{(\kappa)}\left(\frac{y_1}{v^{\alpha_1}}\right)\left|\bar\chi\left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right)\right|\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{v^{\alpha_j}}\right)\chi_{i\nu}^{(s)}\left(\frac{y_\nu-x_\nu-u}{v^{\alpha_\nu}}\right)\times\right.$$

$$\times\chi_{in}^{(\tau)}\left(\frac{y_n-\varphi(x'+ue_\nu)}{v^{\alpha_n}}\right)\left|\sum_{\substack{\beta_1\ldots\beta_\tau\geq 0\\ \sum\beta_\kappa=s-\tau}}\frac{\prod_{\kappa=1}^{\tau}|x_1+u|^{\gamma(\beta_\kappa+1,\nu)}}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\right|^{p}|\Delta_i^{m_1}(\delta t)\mathcal{F}(y)|^{p}\times$$

$$\left.\left.\times dy\,dx'\right|^{\frac{1}{p}}dt\,dv\,du\right]^{\theta}dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{45}$$

Здесь $\gamma(\kappa,\nu)=\max(0,\alpha_n-\kappa\alpha_\nu)$. Из финитности функции $\bar\chi\left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}}\right)$ имеем $|x_1|\leq Cv^{\alpha_1}$. Из условия $u\leq m_1\delta h$ учитывая $h^{1/\alpha_\nu}\leq v\leq\varepsilon$, $\alpha_i\leq\alpha_\nu$, получим $|x_1+u|\leq Cv^{\alpha_1}$, и, таким образом,

$$\left|\sum_{\substack{\beta_1,\ldots,\beta_\tau\geq 0\\ \sum\beta_\kappa=s-\tau}}\frac{\prod_{\kappa=1}^{\tau}|x_1+u|^{\gamma(\beta_\kappa+1,\nu)}}{v^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\right|\leq C,\quad |x_1^{\varkappa}|\leq Cv^{\alpha_1\varkappa}.$$

Подставляя полученные оценки в (45), интегрируя по x' с учетом ограниченности функций $\chi_{in}^{(\tau)}$, по y – с учетом ограниченности функций $\chi_1^{(\kappa)}\left(\frac{y_1}{v^{\alpha_1}}\right)$ и условий (23), а затем интегрируя по u, имеем

$$\|x_1^{\varkappa}f_{i\kappa}(x')\|_{\mathcal{L}^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})}\leq C\sum_{\nu=1}^{n-1}\left\{\int_0^{\varepsilon}h^{-1-\theta\tau_\nu-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i+\varkappa\alpha_1-\frac{\alpha_n}{p}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}dt\,dv\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+C\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_0^{\varepsilon}h^{-1-\theta\tau_\nu-\theta\varkappa\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}+m_1\theta}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\int_0^{b_i v^{\alpha_i}}v^{-1-\alpha_i+\alpha_1\varkappa-m_1\alpha_1-\frac{\alpha_n}{p}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}dt\,dv\right]^{\theta}dh\right\}^{\frac{1}{\theta}}\leq$$

(применяя неравенство Харди с учетом (44), после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, получаем)

$$\leq C\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\int_0^{\varepsilon}\bar h^{-1-\theta\tau_\nu\alpha_\nu-\alpha_i\theta-\frac{\theta\alpha_n}{p}}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)\mathcal{F}\|_{L_p(E_n)}dt\right]^{\theta}d\bar h\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Доказательство леммы заканчивается аналогично, как и в лемме 6.

Пусть по прежнему область G имеет вид

$$G=\begin{cases}-\infty<x_n<\varphi(x'), & x'=(x_1,\ldots,x_{n-1}),\\ -\infty<x_j<\infty, & j=1,\ldots,n-1.\end{cases}$$

Полагаем $E^+_{n-1} = E_{n-1} \cap \{x_1 \geq 0\}$, $E^-_{n-1} = E_{n-1} \cap \{x_1 < 0\}$. Пусть на каждой области E^+_{n-1}, E^-_{n-1} заданы функции $f^+(x')$, $f^-(x')$. Положим

$$f = \begin{cases} f^+, & x \in E^+_{n-1}, \\ f^-, & x \in E^-_{n-1}. \end{cases}$$

Тогда имеет место следующая

Л е м м а 8. <u>Пусть</u> $1<p<\infty$, $\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)} < \infty$, $\|x_1^{\varkappa} f^+\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^+_{n-1})} < \infty$, $\|x_1^{\varkappa} f^-\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^-_{n-1})} < \infty$,

<u>где</u> $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$, $\tau_i = \frac{\ell_i}{\ell_n}\left(\ell_n - \frac{1}{p}\right)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\varkappa \in [0, ([\ell_1]+1)([\ell_1]+2)]$.
<u>Тогда существует функция</u> $\mathcal{F} \in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ <u>такая, что</u>

$$\mathcal{F}\big|_{\partial G} = \lim_{\sigma \to 0} \mathcal{F}(x', \varphi(x') + \sigma) = f(x') \in L_p(E_{n-1})$$

<u>и имеет место оценка</u>

$$\|\mathcal{F}\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)} \leq C\Big(\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)} + \sup_{\varkappa} \|x_1^{\varkappa} f^+\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^+_{n-1})} + {}$$
$$+ \sup_{\varkappa} \|x_1^{\varkappa} f^-\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^-_{n-1})}\Big),$$

<u>где</u> C <u>не зависит от</u> $\mathcal{F}$ <u>и</u> f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При наших предположениях на область имеет место представление

$$\mathcal{F}(x', x_n) = \chi\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{\varepsilon_1^{\alpha_n}}\right) f_{\varepsilon_1}(x') + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\varepsilon_1} \int_{E_n} \sigma^{-1-|\alpha'|-\alpha_i} \chi\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{\sigma^{\alpha_n}}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \chi_{ij}\left(\frac{y_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right) \times$$
$$\times M_j\left(t\sigma^{-\alpha_i}\right) \Delta_i^m(\delta t) f(y') dy' dt d\sigma = g_{\varepsilon,0}(x', x_n) + \sum_{i=1}^{n} g_{\varepsilon,i}(x', x_n).$$

Здесь $m > \max_{1 \leq i \leq n-1} \ell_i$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, $|\alpha'| = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$,

$$f_{\varepsilon_1}(x') = \int_{E_{n-1}} f(x' + y') \prod_{j=1}^{n-1} \varepsilon_1^{-\alpha_j} \Omega\left(\frac{y_j}{\varepsilon_1^{\alpha_j}}\right) dy', \quad \chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

Очевидно, что почти всюду $\mathcal{F}(x', \varphi(x')) = f(x')$. Оценим $\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(G)$ -норму какого-нибудь слагаемого $f_{\varepsilon,i}(x') = g_{\varepsilon,i}(x', \varphi(x'))$. Разбивая интеграл по σ и по y, получаем

$$\|f_{\varepsilon,i}(x')\|_{\mathcal{L}^{\ell}_{p,\theta}(G)} \leq C \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg\{ \int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta \ell_\nu} \Big\| \Delta_\nu^{m_1}(\delta h) \int_0^{h^{1/\alpha_\nu}} \int_{E_{n-1}} \sigma^{-1-|\alpha'|-\alpha_i} \chi\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{\sigma^{\alpha_n}}\right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n-1} \left|\chi_{ij}\left(\frac{y_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right) M_i\left(t\sigma^{-\alpha_i}\right)\right| \Delta_i^m(\delta t) f(y') \Big| dy' dt d\sigma \Big\|^{\theta}_{L_p(E_n)} dh \Bigg\}^{\frac{1}{\theta}} +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg\{ \int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta \ell_\nu} \Big\| \int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon_1} \int_{|y_1| < \sigma^{\alpha_1}} \sigma^{-1-|\alpha'|-\alpha_i} \Delta_i^m(\delta t) f(y') \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \nu}}^{n} \chi_{ij}\left(\frac{y_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right) \times$$

$$\times \Delta_\nu^{m_1}(\delta h)\left[\chi\left(\frac{x_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\right]dy'dtd\upsilon\Big\|^\theta_{L_p(E_n)}dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{h}\Bigg\{\int_0^{\varepsilon}h^{-1-\theta\ell_\nu}\Big\|\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon_1}\int_{|y_1|>\upsilon^{\alpha_1}}\upsilon^{-1-|\alpha'|-\alpha_i}\Delta_i^m(\delta t)f(y')\prod_{j=2}^{n\,(\nu)}\chi_{ij}\left(\frac{y_j-x_j}{\upsilon^{\alpha_j}}\right)\times \qquad (46)$$

$$\times \Delta_\nu^{m_1}(\delta h)\left[\chi\left(\frac{x_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\right]dy'dtd\upsilon\Big\|^\theta_{L_p(E_n)}dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}=\sum_{\nu=1}^{n}\left(J_\nu^1+J_\nu^2+J_\nu^3\right).$$

Оценим J_ν^1. Используя свойство инвариантности нормы относительно сдвига, применяя обобщенное неравенство Минковского по t,υ, неравенство Гельдера по y', интегрируя по x, y' с учетом финитности функций χ, x_{ij} и условий (23), получаем

$$J_\nu^1\leqslant C\Bigg\{\int_0^{\bar\varepsilon}h^{-1-\theta\ell_\nu}\left[\int_0^{h^{1/\alpha_\nu}}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\upsilon^{-1-\alpha_i+\frac{\alpha_n}{p}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p(E_{n-1})}dtd\upsilon\right]^\theta dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\leqslant$$

(применяя неравенство Харди после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$ и $\bar h^{\alpha_i}b_i=h$, получаем)

$$\leqslant C\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(E_{n-1})}=\|x_1^{\varkappa}f\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E_{n-1})}\Big|_{\varkappa=0}. \qquad (47)$$

Оценим J_ν^2. Применяя оценку (26) с $\varphi_1\left(\frac{x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)=\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)$, $\varphi_2\left(\frac{\psi(x)}{\upsilon^{\alpha_1}}\right)=$ $=\chi\left(\frac{x_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)$ и оценку (5) с учетом того, что $|x_1+\delta_{1\nu}u|\leqslant C\upsilon^{\alpha_1}$ в силу финитности функции χ_{i1} и неравенства $|u|\leqslant m_1\delta u\leqslant m_1\delta\upsilon^{\alpha_1}\leqslant(\alpha_1=\min\alpha_\nu,\upsilon<\varepsilon)\leqslant C\upsilon_1^{\alpha_\nu}$, получаем

$$\left|\Delta_\nu^{m_1}(\delta h)\chi\left(\frac{x_n-\varphi(x')}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu-x_\nu}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\right|\leqslant C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\frac{h^{m_1-1}}{\upsilon^{\alpha_\nu m_1}}\int_0^{m_1\delta h}\left|\chi_{i\nu}^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\chi^{(\tau)}\left(\frac{x_n-\varphi(x'+ue_\nu)}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|\times$$

$$\times\frac{|x+\delta_{\nu 1}u|^{\sum_{k=1}^{\tau}\frac{\gamma(\beta_k+1,\nu)}{\alpha_1}}}{\upsilon^{\alpha_n\tau-\alpha_\nu s}}\Big|du\leqslant C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\frac{h^{m_1-1}}{\upsilon^{\alpha_\nu m_1}}\int_0^{m_1\delta h}\left|\chi_{i\nu}^{(m_1-s)}\left(\frac{y_\nu-(x_\nu+u)}{\upsilon^{\alpha_\nu}}\right)\chi^{(\tau)}\left(\frac{x_n-\varphi(x'+ue_\nu)}{\upsilon^{\alpha_n}}\right)\right|du.$$

Подставляя полученную оценку в J_ν^2, применяя обобщенное неравенство Минковского по t,υ,u, неравенство Гельдера по y', интегрируя по x, y', u, получаем

$$J_\nu^2\leqslant C\Bigg\{\int_0^{\varepsilon}h^{-1-\theta\ell_\nu-m_1\theta}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon}\upsilon^{-1-\alpha_i-\alpha_\nu m+\frac{\alpha_n}{p}}\int_0^{b_i\upsilon^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p([-\upsilon^{\alpha_1},\upsilon^{\alpha_1}]\times E_{n-2})}dtd\upsilon\right]^\theta dh\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\leqslant$$

(применяя неравенство Харди после замены $h^{1/\alpha_\nu}=\bar h$, и учитывая условия $\alpha_\nu\ell_\nu=1$, $m_1>\max\ell_\nu$, имеем)

$$\leqslant C\Bigg\{\int_0^{\varepsilon_1}\bar h^{-1-\theta\alpha_i-\theta+\frac{\alpha_n}{p}}\left[\int_0^{b_i\bar h^{\alpha_i}}\|\Delta_i^m(\delta t)f\|_{L_p([-\bar h^{\alpha_1},\bar h^{\alpha_1}]\times E_{n-2})}dt\right]^\theta d\bar h\Bigg\}^{\frac{1}{\theta}}\leqslant$$

(используя неравенство Харди после замены $b_i \bar{h}^{-\alpha_i} = h$, и принимая во внимание условие $\tau_i = l_i - \frac{l_i \alpha_n}{p}$, получаем)

$$\leq C\left\{\int_0^{\varepsilon_2} h^{-1-\theta\tau_i} \left\| \Delta_i^m(\delta t) f \right\|^\theta_{L_p\left([-h^{\frac{\alpha_1}{\alpha_i}}, h^{\frac{\alpha_1}{\alpha_i}}] \times E_{n-2}\right)} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} = C\|f\|_{\mathcal{L}^\tau_{p,\theta}(0)} \leq C\|f\|_{B^\tau_{p,\theta}(0)} \quad (48)$$

Оценим $\mathcal{J}_\nu^3$. Обозначим $\beta(\tau, s) = \max\left(0, \frac{\alpha_n \tau - \alpha_\nu s}{\alpha_1}\right)$. Из финитности функции χ_{i1} и условий $|u| \leq m_1 \delta h \leq m \delta \sigma^{\alpha_\nu} \leq C \sigma^{\alpha_1}$ $(\alpha_1 = \min_{1 \leq \nu \leq n} \alpha_\nu)$, $|y_1| > \sigma^{\alpha_1}$ получим $|x_1 + \delta_{\nu_1} u| \leq C|y_1|$. Поступая аналогично, как в оценке $\mathcal{J}_\nu^2$, получаем

$$\left|\Delta_\nu^{m_1}(\delta h)\chi\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\chi_{i\nu}\left(\frac{y_\nu - x_\nu}{\sigma^{\alpha_\nu}}\right)\right| \leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\int_0^{m_1\delta h}\left|\chi_{i\nu}^{(m-s)}\left(\frac{y_\nu - (x_\nu + u)}{\sigma^{\alpha_\nu}}\right) \times \chi^{(\tau)}\left(\frac{x_n - \varphi(x' + u e_\nu)}{\sigma^{\alpha_n}}\right)\right| du \cdot \frac{h^{m_1 - 1}}{\sigma^{\alpha_\nu m}} \cdot \frac{|y_1|^{\beta(\tau,s)}}{\sigma^{\alpha_n \tau - \alpha_\nu s}}.$$

Подставляя данное выражение в $\mathcal{J}_\nu^3$, применяя обобщенное неравенство Минковского по t, σ, u, неравенство Гельдера по y', интегрируя по x, y', u, получаем

$$\mathcal{J}_\nu^3 \leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{\varepsilon} h^{-1-\theta l_\nu + m_1\theta}\left[\int_{h^{1/\alpha_\nu}}^{\varepsilon} \sigma^{-1-\alpha_\tau - m\alpha_\nu + \frac{\alpha_n}{p}} \int_0^{b_i \sigma^{\alpha_i}} \left\| y_1^{\beta(\tau,s)} \Delta_i^{m_1}(\delta t) f \right\|_{L_p(E_{n-1})} dt\, d\sigma\right]^\theta dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

(учитывая условия $m > \max_{1 \leq \nu \leq n} l_\nu$, $\alpha_\nu l_\nu = 1$ и используя неравенство Харди после замены $\bar{h} = h^{1/\alpha_\nu}$, имеем)

$$\leq C\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{\varepsilon_1} \bar{h}^{-1-\theta-\theta\alpha_i + \frac{\alpha_n\theta}{p} - \beta(\tau,s)\alpha_1}\left[\int_0^{b_i \bar{h}^{\alpha_i}} \left\| y_1^{\beta(\tau,s)} \Delta_i^{m_1}(\delta t) f \right\|_{L_p(E_{n-1})} dt\right]^\theta d\bar{h}\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

(делаем замену $b_i \bar{h}^{\alpha_i} = h$, применяем неравенство Харди, учитывая условие $\tau_i = l_i - \frac{l_i \alpha_n}{p}$, тогда получаем)

$$\leq C\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{s}\left\{\int_0^{\varepsilon_1} h^{-1-\theta\tau_i - l_i \beta(\tau,s)\theta\alpha_1} \left\| y_1^{\beta(\tau,s)} \Delta_i^{m_1}(\delta t) f \right\|^\theta_{L_p(E^k_{n-1})} dh\right\}^{\frac{1}{\theta}} \leq$$

поскольку $0 \leq \beta(\tau, s) \leq ([l_1]+1)([l_1]+2)$,

$$\leq C\sum_{k=1}^{2}\sup_{0 \leq \varkappa \leq ([l_1]+1)([l_1]+2)}\left\| y_1^{\varkappa} f^k \right\|_{\mathcal{L}^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^k_{n-1})} \leq C\sum_{k=1}^{2}\sup_{\varkappa}\left\| y_1^{\varkappa} f^k \right\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^k_{n-1})} \quad (49)$$

Из оценок (46)-(49) получаем

$$\|f_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}(G)} \leq C\left(\|f\|_{B^\tau_{p,\theta}(0)} + \sum_{k=1}^{2}\sup_{\varkappa}\left\| y_1^{\varkappa} f^k \right\|_{B^{\tau,\varkappa}_{p,\theta}(E^k_{n-1})}\right).$$

Оценки $\|g_{\varepsilon,0}(x', x_n)\|_{\mathcal{L}^l_{p,\theta}(0)}$, $\|\mathcal{F}\|_{L_p}$ проводятся аналогично. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 получается непосредственно из лемм 3-7 и замечания 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 повторяет доказательство соответствующей теоремы работы [5].

Пусть заданы функции f_κ^1, f_κ^2, $\kappa=1,2$. Тогда из леммы 8 следует, что на G существует такая функция $\mathcal{F}^2\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$, что

$$\mathcal{F}^2\Big|_{\partial G}=f^2=\begin{cases} f_1^2\ , & x_1\geq 0\\ f_2^2\ , & x_1\leq 0\end{cases}$$

$$\|\mathcal{F}^2\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}\leq C\left(\|f^2\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)}+\sum_{\kappa=1}^{2}\sup_{x}\|x_1^{x}f_\kappa^2\|_{B^{\tau,x}_{p,\theta}(E^{\kappa}_{n-1})}\right).$$

Из леммы 4 следует, что в каждой области G_κ можно построить функции $\mathcal{F}^1_\kappa$, $\kappa=1,2$, такие, что $\mathcal{F}^1_\kappa\Big|_{\partial G_\kappa}=f_\kappa^1$. Продолжая их на все E_n, а затем используя замечание 2, получаем $\mathcal{F}^1_\kappa=\mathring{\mathcal{F}}^1_\kappa+\Phi_\kappa$, $\kappa=1,2$. Поскольку $\mathring{\mathcal{F}}^1_\kappa\in\mathring{B}^{\ell}_{p,\theta}$, $\kappa=1,2$, то функция

$$\mathring{\mathcal{F}}^1=\begin{cases}\mathring{\mathcal{F}}^1_1\ , & x\in G_1\ ,\\ \mathring{\mathcal{F}}^1_2\ , & x\in G_2\ ,\end{cases}$$

принадлежит $B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ [11] и

$$\|\mathring{\mathcal{F}}^1\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|\mathcal{F}^1_\kappa\|\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|f^1_\kappa\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}.$$

Из леммы 6 получаем, что для функции $\mathring{f}^1=\mathring{\mathcal{F}}^1\Big|_{\partial G}$ имеет место оценка

$$\|\mathring{f}^1\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|f^1_\kappa\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}. \tag{50}$$

Обозначая

$$\psi=\begin{pmatrix}\Phi_1\big|_{\partial G_1}=\psi_1\\ \Phi_2\big|_{\partial G_2}=\psi_2\end{pmatrix},$$

получаем в силу условий на функции f^1_κ и оценки (50), что

$$\|\psi\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|f^1_\kappa\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}+C\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)},$$

где

$$f=\begin{pmatrix}f^1_1\ , & x\in\partial G_1\\ f^1_2\ , & x\in\partial G_2\end{pmatrix}$$

Поскольку функции ψ_κ, $\kappa=1,2$, по лемме 7, удовлетворяют оценке

$$\sum_{\kappa=1}^{2}\|x_1^{x}\psi_\kappa\|_{B^{\tau,x}_{p,\theta}(E^{\kappa}_{n-1})}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|\Phi^\kappa\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|f^1_\kappa\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)},$$

то из леммы 8 следует, что существует функция $\mathcal{F}^1\in B^{\ell}_{p,\theta}(G)$ такая, что $\mathcal{F}^1\Big|_{\partial G}=\psi$, и имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}_1\|_{B^{\ell}_{p,\theta}(G)}\leq C\sum_{\kappa=1}^{2}\|f^1_\kappa\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(D)}+C\|f\|_{B^{\tau}_{p,\theta}(0)}.$$

Но тогда функция $\mathcal{F}=\mathcal{F}^2+\mathring{\mathcal{F}}^1+\mathcal{F}^1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

З а м е ч а н и е 4. Глобальная теорема о продолжении получается разбиением единицы при требовании условий согласования на пересекающихся кусках поверхности.

Л и т е р а т у р а

1. С о б о л е в С.Л. Об одной теореме функционального анализа. - "Мат. сб.", 1938, т.4, № 3, с.471-497.
2. Н и к о л ь с к и й С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., "Наука", 1969, 480 с.
3. Б е с о в О.В., И л ь и н В.П., Н и к о л ь с к и й С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975, 480 с.
4. У с п е н с к и й С.В. О теоремах вложения в областях. - "Сиб. мат. журн.", 1966, т.7, № 3, с.650-663.
5. У с п е н с к и й С.В. О следах функций класса $W_p^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ Соболева на гладких поверхностях. "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 2, с.429-451.
6. П е р е п е л к и н В.Г. О граничных свойствах функций, принадлежащих весовым классам $W_{p;\sigma_1,\dots,\sigma_n}^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ С.Л.Соболева в области. - "Труды семинара С.Л.Соболева", 1977, № 1, с.108-148.
7. С а д ы к о в а С.Б. О следах функций класса $B_p^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ Бесова на гладких поверхностях. В кн.: Теоремы вложения и их приложения. Алма-Ата, "Наука", 1976, с.131-135.
8. Б е с о в О.В. О следах на негладкой поверхности классов дифференцируемых функций. - "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1972, т.117, с.11-21.
9. Б у р е н к о в В.И. Теоремы вложения и продолжения для классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных во всем пространстве.- В кн.: Итоги науки. Математический анализ, 1965, М., Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1966, с.71-155.
10. Б е с о в О.В., И л ь и н В.П. Естественное расширение класса областей в теоремах вложения. - "Мат. сб.", 1968, т.75, № 4, с.483-495.
11. К у з н е ц о в Ю.В. О склейке функций из пространств $W_{p,\theta}^{\tau}$ "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1976. т.140, с.191-200.