УДК 517.948

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.Д.С т е п а н о в (Хабаровск)

В данной работе рассматривается новое достаточное условие абсолютной суммируемости Фурье-образа функций многих переменных. Приводится пример, устанавливающий отличие полученного результата от известных ранее [1-6]. Кроме этого, рассматривается вопрос об интегральном представлении резольвенты дробной степени самосопряженного эллиптического оператора с постоянными коэффициентами.

Предложенный в работе метод исследования резольвент дробных степеней дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами применим также к некоторым более общим классам гипоэллиптических операторов, однако мы ограничимся рассмотрением простого случая. Новым здесь является способ получения оценки нормы в L_1 ядра резольвенты дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, представленной преобразованием Фурье ее символа. Следует отметить, что интегральную представимость дробной степени эллиптического оператора произвольного порядка с переменными коэффициентами можно получить с помощью поточечных оценок функций Грина параболических задач, установленных в [7].

1. Пусть L_p, $1\leq p\leq\infty$, - банахово пространство измеримых функций заданных на R^n и суммируемых с p-й степенью модуля, $\|\cdot\|_p$ - норма в L_p. Пусть W_p^ℓ - пространство С.Л.Соболева функций, заданных на R^n, нормированное следующим образом:

$$\|f\|^p_{W_p^\ell}=\int_{R^n}\Big[\sum_{|\alpha|\leq\ell}|D^\alpha f|^2\Big]^{p/2}dx<\infty.$$

Кроме этого, нам понадобятся полунормы функций

$$\Big[\|f\|'_{p,m}\Big]^p=\int_{R^n}\Big[\sum_{|\alpha|=m}{}'|D^\alpha f|^2\Big]^{p/2}dx<\infty,$$

где $\sum'$ означает, что сумма берется по тем мультииндексам $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, для которых $\alpha_j=0,1;\ j=1,2,\ldots,n$. Преобразование Фурье функций многих переменных понимается в смысле распределений и обозначается крышкой сверху.

Теорема 1. Пусть $1<p\leq\frac{2n}{2n-1}$, $p\leq q<\infty$, тогда если $f\in W_q^n$, $\|f\|'_{p,n}<\infty$, $\|f\|'_{p,n-1}<\infty$, то $\hat{f}\in L_1$, причем

$$\|\hat{f}\|_1\leq C_{p,n}\left[\|f\|'_{p,n}+\|f\|'_{p,n-1}\right], \tag{1}$$

где константа $C_{p,n}$ не зависит от f.

Данная теорема является усилением результата, полученного ранее [8, с.129], и доказывается аналогичным образом. Сначала методом работы [8] устанавливается оценка (1) для гладких финитных функций, а затем, опираясь на теорему С.Л.Соболева о плотности финитных функций в пространстве W_p^ℓ, мы получаем теорему 1.

Пример. Рассмотрим функцию $\Phi(\xi)$, заданную на R^4 и такую, что

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{i\xi_1+\xi_2^2\,\xi_3^2+(\xi_2-\xi_3)^2+\xi_4^2+1}.$$

Можно показать, что $\Phi(\xi)$ обладает следующими свойствами:

а) для функции выполнены условия теоремы 1, следовательно, $\hat{\Phi}\in L_1(R^4)$;

б) для функции $\Phi(\xi)$ не выполнены условия теорем [1-6] о принадлежности Фурье-образа функций многих переменных к пространству L_1.

2. Пусть A - инфинитезимальный оператор равностепенно непрерывной полугруппы операторов, T_t, $t\in[0,\infty)$, ограниченно действующих в L_p, а $D(A)\subset L_p$ - область определения A; $\hat{A}_\alpha$, $0<\alpha<1$, - такие операторы, что $\hat{A}_\alpha f=-(-A)^\alpha f$ для всех $f\in D(A)$, где дробные степени $(-A)^\alpha$ оператора $(-A)$ определяются формулой Балакришнана:

$$(-A)^\alpha f=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{\alpha-1}(\lambda I-A)^{-1}(-Af)\,d\lambda,\ f\in D(A).$$

Для резольвенты оператора $\hat{A}_\alpha$ имеет место формула Като [9, с.358]

$$(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty(rI-A)^{-1}\frac{r^\alpha dr}{\mu^2-2\mu r^\alpha\cos\alpha\pi+r^{2\alpha}}.$$

В этом пункте мы рассмотрим вопрос о представимости резольвенты $(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}$ в виде интегрального оператора свертки с ядром $K_{\alpha,\mu}(x)$ таким, что для всех $f\in L_p$

$$(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}f(x)=\int_{R^n}K_{\alpha,\mu}(x-y)f(y)\,dy. \tag{2}$$

Ниже представление (2) мы устанавливаем для того случая, когда резольвента $(rI-A)^{-1}$ инфинитезимального оператора A является интегральным оператором свертки с ядром $K_r(x)\in L_1$ таким, что при всех $f\in L_p$

$$(rI-A)^{-1}f(x)=\int_{R^n}K_r(x-y)f(y)\,dy. \tag{3}$$

При этом ядра $K_{\alpha,\mu}(x)$ и $K_r(x)$ связаны соотношением

$$K_{\alpha,\mu}(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty K_r(x)\,\frac{r^\alpha dr}{\mu^2-2\mu r^\alpha\cos\alpha\pi+r^{2\alpha}}. \tag{4}$$

Т е о р е м а 2. Если резольвента $(rI-A)^{-1}: L_p\to L_p$ инфинитезимального оператора A равностепенно непрерывной полугруппы является интегральным оператором свертки вида (3), причем выполнено условие

$$\|K_r\|_1\le\frac{C}{r},\quad r>0, \tag{5}$$

где C не зависит от r, то резольвента $(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}: L_p\to L_p$ - оператор свертки вида (2), при этом выполнено (4) и

$$\|K_{\alpha,\mu}\|_1\le\frac{C_\alpha}{\mu},\quad \mu>0, \tag{6}$$

где $C_\alpha=\frac{C}{\alpha\pi}\left[(\pi/2)+\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\alpha\pi\right]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$G_{\alpha,\mu}(r)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\;\frac{r^\alpha}{\mu^2-2\mu r^\alpha\cos\alpha\pi+r^{2\alpha}},\quad \mu>0,\quad 0<\alpha<1.$$

Из формулы Като, представления (3) и теоремы Фубини следует, что при $f\in L_p$

$$(\mu I-\hat{A}_\alpha)^{-1}f(x)=\int_0^\infty\left[\int_{R^n}K_r(x-y)f(y)dy\right]G_{\alpha,\mu}(r)dr=$$

$$=\int_{R^n}\left[\int_0^\infty K_r(x-y)G_{\alpha,\mu}(r)dr\right]f(y)dy. \tag{7}$$

Перестановка интегралов здесь законна, так как если

$$J(x)=\int_{R^n}\left[\int_0^\infty|K_r(x-y)|G_{\alpha,\mu}(r)dr\right]|f(y)|dy,$$

то из неравенства Юнга для сверток следует, что

$$\|J\|_p\le\left\|\int_0^\infty|K_r(x)|G_{\alpha,\mu}(r)dr\right\|_1\|f\|_p. \tag{8}$$

Далее, из неравенства Бохнера и (5) мы получаем

$$\left\|\int_0^\infty|K_r(x)|G_{\alpha,\mu}(r)dr\right\|_1\le\int_0^\infty\|K_r\|_1G_{\alpha,\mu}(r)dr\le$$

$$\le C\int_0^\infty\frac{G_{\alpha,\mu}(r)}{r}dr=\frac{C_\alpha}{\mu}; \tag{9}$$

Здесь $C_\alpha = \frac{C}{\alpha\pi}\left[(\pi/2) + \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \alpha\pi\right]$. Таким образом, $\mathcal{J}(x) \in L_p$, поэтому $\mathcal{J}(x) < \infty$ при почти всех $x \in R^n$. Из (7) следует (2) и (4). Из (9) следует (6). Теорема доказана.

3. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос об интегральной представимости резольвенты дробной степени самосопряженного эллиптического оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Этот вопрос для эллиптических операторов второго порядка рассмотрен в [10].

Пусть $\Lambda = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha$ - эллиптическое выражение порядка $m \ge 2$ с постоянными вещественными коэффициентами, $\mathcal{A}$ - соответствующий Λ минимальный оператор в L_2. Хорошо известно [9], что $\mathcal{A}$ самосопряжен. Как показано в [8], резольвента $(rI - \mathcal{A})^{-1} : L_2 \to L_2$ допускает интегральное представление в виде оператора свертки с ядром $F_r(x) \in L_1$, где

$$\widetilde{F}_r(\xi) = \frac{1}{r - \Lambda(\xi)} . \tag{10}$$

Здесь $\Lambda(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in R^n$, - символ оператора $\mathcal{A}$. Известно [9], что если спектр оператора $\mathcal{A}$ находится на отрицательной части действительной оси, то $\mathcal{A}$ порождает равностепенно непрерывную полугруппу операторов. Таким образом, по теореме 2, резольвента дробной степени оператора $\mathcal{A}$ имеет представление в виде интегрального оператора свертки, если для ядра (10) имеет место оценка (5). Последнее утверждение справедливо, как показывает следующая

Л е м м а. Для ядра $F_r(x)$ резольвенты $(rI - \mathcal{A})^{-1} : L_2 \to L_2$ самосопряженного эллиптического оператора $\mathcal{A}$, спектр которого находится на отрицательной части действительной оси, имеет место оценка

$$\| F_r \|_1 \le \frac{C}{r}, \quad r > 0, \tag{11}$$

где константа C не зависит от r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что норма в L_1 преобразования Фурье функций многих переменных сохраняется при растяжениях, т.е.

$$\| \widetilde{f} \|_1 = \| \widetilde{f}_\lambda \|_1, \tag{12}$$

где $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$, $\lambda > 0$. В связи с этим, по теореме 1 и из (10), следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что при $p > 1$

$$\left\| D^\beta \frac{1}{r - \Lambda(\lambda\xi)} \right\|_p \le \frac{C}{r}, \quad r > 0, \tag{13}$$

для $|\beta| = n, n-1$. Здесь и всюду далее C обозначает постоянные, возможно, различные, но не зависящие от r и λ. В силу эллиптичности выражения Λ для любого мультииндекса $\beta \ne 0$ имеем оценку

$$\left| D^\beta \frac{r}{r - \Lambda(\xi)} \right| \le C \frac{r |\xi|^\ell}{[r + |\xi|^m]^K}, \quad \xi \in R^n, \tag{14}$$

где $k>0$, $\ell \geqslant 0$, $|\beta|$ и m связаны соотношением

$$mk-\ell=m+|\beta|. \tag{15}$$

При растяжении специального вида $\xi \to r^{\gamma}\xi$, $\gamma>0$, оценка (14) приобретает следующий вид:

$$\left|D^{\beta}\frac{r}{r-\Lambda(r^{\gamma}\xi)}\right| \leqslant C\,\frac{r\cdot r^{\gamma|\beta|}\,|r^{\gamma}\xi|^{\ell}}{[r+|r^{\gamma}\xi|^{m}]^{\kappa}},\quad \xi\in R^{n}.$$

С помощью этого выражения оценим норму

$$\left\|D^{\beta}\frac{r}{r-\Lambda(r^{\gamma}\xi)}\right\|_{p}^{p} \leqslant Cr^{p(1+\gamma(|\beta|+\ell))}\int_{0}^{\infty}\frac{|\xi|^{\ell p}\,|\xi|^{n-1}d|\xi|}{\left[r+[r^{\gamma}|\xi|]^{m}\right]^{\kappa p}}.$$

Полагаем здесь $\gamma=\frac{1}{m}$, тогда

$$\left\|D^{\beta}\frac{r}{r-\Lambda(r^{\frac{1}{m}}\xi)}\right\|_{p}^{p} \leqslant C\,\frac{r^{p(1+\frac{1}{m}(|\beta|+\ell))}}{r^{\kappa p}}\int_{0}^{\infty}\frac{|\xi|^{\ell p}\,|\xi|^{n-1}d|\xi|}{[1+|\xi|^{m}]^{\kappa p}}.$$

Здесь правая часть при $|\beta|=n$ и $|\beta|=n-1$ не зависит от r, поскольку из (15) следует, что

$$\kappa-1-\frac{1}{m}(|\beta|+\ell)=\frac{1}{m}(m\kappa-m-|\beta|-\ell)=0.$$

Таким образом, при выбранном растяжении мы получаем, что

$$\left\|D^{\beta}\frac{r}{r-\Lambda(r^{\frac{1}{m}}\xi)}\right\|_{p}\leqslant C.$$

Отсюда по теореме 1 и свойству (12) следует, что $|F_r|_1 \leqslant \frac{C}{r}$, что и требовалось доказать.

Литература

1. B o m a n I. Saturation problems and distribution theory. - Lecture Notes in Math., 1971, v.187, p.249.
2. H e r s C.S. Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms. - "I. Math. Mech.", 1968, v.18, № 4, p.283.
3. M a d y c h W.R. Absolutely summability of Fourier transforms on R^n. - "Indiana Univ. Math. I.", 1976, v.25, p.467.
4. P e e t r e I. Applications de la therie des espaces d'interpolation dans I'Analyse Harmonique. - "Ricerche Mat.", 1966, v.15, p.3.

5. T r e b e l s W. On a Fourier L (E_m) - multiplier critcrion- "Acta scient. math.", 1973, v.35, p.21.

6. T r e b e l s W. Über absolutel Summierbarkeit von n-dimensionalen Fourierreihen und Fourierinteqralen. - "I.Approxim. Theory", 1969, v.2, № 4, p.394.

7. И в а с и ш е н С.Д., Э й д е л ь м а н С.Д. Оценки матрицы Грина однородной параболической граничной задачи. - "Докл. АН СССР", 1967, т.172, № 6, с.1262-1265.

8. С т е п а н о в В.Д. Об интегральной представимости резольвенты самосопряженного эллиптического оператора. - "Дифференц. уравнения", 1976, т.12, № 1, с.129-136.

9. И о с и д а К. Функциональный анализ. М., "Мир", 1967.

10. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., З а б р е й к о П.П., П у с т ы л ь н и к Е.И., С о б о л е в с к и й П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., "Наука", 1966.