УДК 517.5

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ С.Л.СОБОЛЕВА

В.Р.Портнов (Новосибирск)

Введение

В различных задачах теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления возникают пространства $\mathcal{R}$ функций с конечной полунормой вида

$$p(\cdot) = |\mathcal{P}\cdot|_Z,$$

где Z - банахово пространство, а $\mathcal{P}:\mathcal{R}\to Z$ - линейный оператор. Для доказательства разрешимости этих задач в ряде случаев важно уметь представить любую функцию $u\in\mathcal{R}$ в виде

$$u = \Pi u + Q\mathcal{P}u, \qquad (0.1)$$

где $\Pi:\mathcal{R}\to\ker\mathcal{P}$ - проекционный оператор, Q - линейный (обычно интегральный) оператор.

Представление вида (0.1) впервые получил С.Л.Соболев [1, формула (7.12)] для случая, когда $\mathcal{P}$ - набор обобщенных частных производных одного и того же порядка. Поэтому указанное представление мы назовем здесь представлением С.Л.Соболева (см. определение 7.1).

В дальнейшем В.П.Ильин [2], О.В.Бесов [3], Ю.Г.Решетняк [4, 5] (см. также С.В.Успенский, Б.Н.Чистяков [13]) построили представления С.Л.Соболева для различных дифференциальных операторов $\mathcal{P}$ с конечномерным ядром. Автором [6-8] исследовался вопрос о представлениях С.Л.Соболева для операторов, ядро которых может иметь как конечную, так и бесконечную размерность. В настоящей статье результаты работ [6-8] получают дальнейшее развитие.

В § 1 получено представление С.Л.Соболева для произведения операторов по известным представлениям для сомножителей, а в § 2 - представление С.Л.Соболева для набора операторов. В § 3 по известному представлению С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}$ на пространстве $\mathcal{R}$ строится представление С.Л.Соболева для $\mathcal{P}$ на подпространстве X в $\mathcal{R}$, что делает возможным приложение полученных результатов к задачам теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления с краевыми условиями, при этом главную роль в получении представлений на подпространстве (равенство (3.7)) играет неравенство (3.2), которое впервые в одном специальном частном случае получено С.М.Никольским и П.И.Лизоркиным [9]. В § 4 в качестве примера рассмотрены представления С.Л.Соболева для дифференциальных операторов (типа смешанной производной) с бесконечномерным ядром на подпространстве, которое, в частности, может выделяться с помощью граничных условий.

Важную роль в различных вопросах теории функций и дифференциальных уравнений играют представления вида (0.1), в которых область значений оператора Π не содержится целиком в подпространстве $\ker\mathcal{P}$ (см., например, О.В.Бесов [10], Г.Г.Казарян [11], С.В.Успенский [12], С.В.Успенский, Б.Н.Чистяков [13]). Такие представления здесь не рассматриваются.

§ 1. Представления С.Л.Соболева для произведения операторов

Пусть $\mathcal{L}$ - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ вещественных или комплексных чисел с некоторой сходимостью, согласованной со структурой векторного пространства, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{R}$ - векторные подпространства в $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0\subset\mathcal{M}$, ∇ - векторное пространство над $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}:\mathcal{M}\to\nabla$ - линейный оператор, $\mathcal{H}$ - векторное подпространство в $\ker\mathcal{P}$.

Предположим, что на $\mathcal{R}$ оператор $\mathcal{P}$ может быть записан в виде произведения операторов $\mathcal{P}^{(1)},\mathcal{P}^{(2)},\dots,\mathcal{P}^{(N)}$, $N\in\mathbb{N}$, $N>1$:

$$\mathcal{P}u=\mathcal{P}^{(1)}\mathcal{P}^{(2)}\dots\mathcal{P}^{(N)}u \qquad \forall u\in\mathcal{R}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{P}^{(i)}$, $i=1,\dots,N$, - линейный оператор, отображающий векторное пространство Λ_i над $\mathbb{K}$ в векторное пространство Z_i над $\mathbb{K}$, причем Z_1 вложено в ∇, $\mathcal{P}(\mathcal{M}_0)\subset Z_1$, Λ_{i-1} вложено в Z_i $\forall i=2,\dots,N$, $\mathcal{R}$ вложено в Λ_N, $\mathcal{P}^{(N)}(\mathcal{R})\subset\Lambda_{N-1}$, $\mathcal{P}^{(N-1)}\mathcal{P}^{(N)}(\mathcal{R})\subset\Lambda_{N-2},\dots,\mathcal{P}^{(2)}\dots\mathcal{P}^{(N)}(\mathcal{R})\subset\Lambda_1$.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Z}$ - векторные пространства над $\mathbb{K}$, X - векторное подпространство в $\mathcal{L}$, а $\mathcal{P}:X\to\mathcal{Z}$ - линейный оператор. Пусть существуют такие линейные операторы $\Pi:X\to\ker\mathcal{P}$ и $Q:\mathcal{Z}\to\mathcal{L}$, что имеет место тождество

$$u=\Pi u+Q\mathcal{P}u \qquad \forall u\in X. \tag{1.2}$$

Тождество (1.2) называется представлением С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}$ на подпространстве X.

Изучим вопрос о построении представления С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}$ по известным представлениям С.Л.Соболева для операторов $\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(N)}$.

Пусть $\forall i=1,\dots,N$ существуют линейные операторы $\Pi^{(i)}:\Lambda_i\to\ker\mathcal{P}^{(i)}$ и $Q^{(i)}:Z_i\to Z_{i+1}$ (здесь положено $Z_{N+1}=\mathcal{L}$) такие, что имеет место тождество

$$u = \Pi^{(i)} u + Q^{(i)} \mathcal{P}^{(i)} u \qquad \forall u \in \Lambda_i . \tag{1.3}$$

Предположим, что $\Pi^{(N)}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ и $\forall i = 1,\dots,N-1$ существует такой линейный оператор $\Pi_0^{(i)} : L \to L$, что $\Pi_0^{(i)}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ и

$$\Pi^{(i)} \mathcal{P}^{(i+1)} \dots \mathcal{P}^{(N)} u = \mathcal{P}^{(i+1)} \dots \mathcal{P}^{(N)} \Pi_0^{(i)} u \qquad \forall u \in \mathcal{R}. \tag{1.4}$$

Образуем оператор $\Pi : L \to L$:

$$\Pi = I - (I - \Pi^{(N)})(I - \Pi_0^{(N-1)}) \dots (I - \Pi_0^{(1)}),$$

где через I, как обычно, обозначается тождественный оператор.

Будем считать, что

$$\Pi(\mathfrak{M}_0) \subset \mathfrak{M}_0 \tag{1.5}$$

и

$$\mathcal{P}(\mathfrak{M}_0) \subset Z_1 .$$

Наряду с представлениями С.Л.Соболева для оператора вида $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(1)} \dots \mathcal{P}^{(N)}$ мы рассмотрим тесно связанный с ними вопрос о существовании операторов С.Л.Соболева для так называемых элементарных полунорм.

Пусть $\hat{\mathfrak{M}}$ - векторное подпространство в пространстве $\mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}$, Z_0 - нормированное пространство над полем K, вложенное в ∇. Пусть $\mathcal{P}(\hat{\mathfrak{M}}) \subset Z_0$. Полунорму p на $\hat{\mathfrak{M}}$, заданную равенством $p(u) = \|\mathcal{P}u\|_{Z_0}$, будем называть элементарной полунормой на $\hat{\mathfrak{M}}$.

Введем оператор $Q = Q^{(N)} \dots Q^{(1)}$, отображающий пространство Z_1 в L. Сформулируем следующие условия.

Условие 1.1. $\forall u \in \mathfrak{M}_0 \setminus \mathcal{R}$ найдется такая последовательность $\{u_n\} \subset \mathcal{R}$, что в смысле сходимости в пространстве L имеют место соотношения: $u_n \to u$, $\Pi u_n \to \Pi u$, $Q\mathcal{P}u_n \to Q\mathcal{P}u$.

Условие 1.2. $u = \Pi u \quad \forall u \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{M}_0$.

Условие 1.3. Если $u \in \mathfrak{M}_0 \setminus \mathcal{R}$, $\{u_n\} \subset \mathcal{R}$, $u_n \to u$ в L, $\Pi u_n \to \Pi u$ в L и $\Pi u_n \in \ker \mathcal{P} \quad \forall n \in N$, то $\Pi u \in \ker \mathcal{P}$.

Условие 1.4. $\Pi(\hat{\mathfrak{M}}) \subset \hat{\mathfrak{M}}$ и существует такое нормированное пространство Σ над полем K, вложенное в L, что $Q\mathcal{P}(\hat{\mathfrak{M}} \cap \ker \Pi) \subset \Sigma$, $\|Q\mathcal{P}u\|_\Sigma \leq C p(u) \quad \forall u \in \hat{\mathfrak{M}} \cap \ker \Pi$, где $C \in R$ и не зависит от $u \in \hat{\mathfrak{M}} \cap \ker \Pi$, и векторное подпространство $\Sigma \cap \hat{\mathfrak{M}} \cap \ker \Pi$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_\Sigma + p(\cdot)$.

Теорема 1.1. Если выполнены условия 1.1-1.3, то имеет место равенство

$$u = \Pi u + Q\mathcal{P}u \qquad \forall u \in \mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}, \tag{1.6}$$

которое является представлением С.Л.Соболева на подпространстве $\mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}$ (с $Z = \mathcal{P}(\mathfrak{M}_0)$). Если, кроме того, выполнено условие 1.4, то Π является оператором С.Л.Соболева на подпространстве $\hat{\mathfrak{M}}$ для полунормы p.

Доказательство. Равенство (1.6), в силу условий 1.1, 1.2, следует из равенства

$$u = \Pi u + Q\mathcal{P}u \qquad \forall u \in \mathcal{R}, \tag{1.7}$$

а тот факт, что (1.6) является представлением С.Л.Соболева для $\mathcal{P}$ на подпространстве $\mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}$ (т.е. что $\Pi(\mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}) \subset (\mathfrak{M}_0 + \mathcal{H}) \cap \ker \mathcal{P}$) , следует из включения (1.5), условия 1.3 и равенства

$$\mathcal{P}\Pi u = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{R}. \tag{1.8}$$

Далее, оператор Π является оператором С.Л.Соболева на $\hat{\mathfrak{M}}$ для полунормы p в силу представления (1.6) и условия 1.4.

Докажем соотношение (1.7). Пусть $u \in \mathcal{R}$. Тогда, в силу соотношений (1.3) и (1.4), имеем:

$$Q\mathcal{P}u = Q^{(N)} \dots Q^{(1)}\mathcal{P}^{(1)} \dots \mathcal{P}^{(N)}u = Q^{(N)} \dots Q^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}(\mathcal{P}^{(2)} \dots \mathcal{P}^{(N)}u) =$$

$$= Q^{(N)} \dots Q^{(2)}(\mathcal{P}^{(2)} \dots \mathcal{P}^{(N)}u - \Pi^{(1)}\mathcal{P}^{(2)} \dots \mathcal{P}^{(N)}u) =$$

$$= Q^{(N)} \dots Q^{(2)}\mathcal{P}^{(2)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(1)})u = Q^{(N)} \dots Q^{(2)}\mathcal{P}^{(2)}(\mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(1)})u) =$$

$$= Q^{(N)} \dots Q^{(3)}(\mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(1)})u - \Pi^{(2)}\mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(1)})u) =$$

$$= Q^{(N)} \dots Q^{(3)}(\mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(1)})u - \mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}\Pi_0^{(2)}(I - \Pi_0^{(1)})u) =$$

$$= Q^{(N)} \dots Q^{(3)}\mathcal{P}^{(3)} \dots \mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(2)})(I - \Pi_0^{(1)})u = \dots =$$

$$= Q^{(N)}\mathcal{P}^{(N)}(I - \Pi_0^{(N-1)}) \dots (I - \Pi_0^{(1)})u = (I - \Pi_0^{(N-1)}) \dots (I - \Pi_0^{(1)})u -$$

$$- \Pi^{(N)}(I - \Pi_0^{(N-1)}) \dots (I - \Pi_0^{(1)})u = (I - \Pi^{(N)})(I - \Pi_0^{(N-1)}) \dots (I - \Pi_0^{(1)})u = (I - \Pi)u.$$

Тождество (1.8) установлено в работе автора [14] .

Теорема доказана.

§ 2. Представления С.Л.Соболева для набора операторов и операторы С.Л.Соболева для суммы полунорм. Об одном свойстве произведения проекционных операторов

Пусть L - векторное пространство над полем K , $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_T$, $T \in \mathbb{N}$, - векторные подпространства в L , $Z_1, \dots, Z_T$ - векторные пространства над полем K , $\mathcal{P}^{(k)}: \mathfrak{M}_k \to Z_k$, $k = 1, \dots, T$, - линейные операторы.

Введем подпространство $\mathfrak{M} = \bigcap_{1 \le k \le T} \mathfrak{M}_k$.

Положим $Z = Z_1 \times \dots \times Z_T$ и $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^{(1)}, \dots, \mathcal{P}^{(T)})$, так что $\mathcal{P}$ является линейным оператором, отображающим $\mathfrak{M}$ в Z .

Пусть $Z_1^{(0)},\dots,Z_T^{(0)}$ - нормированные пространства над K, являющиеся векторными подпространствами в пространствах $Z_1,\dots,Z_T$ соответственно. Обозначим через $\hat{\mathfrak{M}}$ совокупность тех элементов u из $\mathfrak{M}$, для которых $\mathcal{P}^{(k)}u \in Z_k^{(0)}$ $\forall k=1,\dots,T$. Введем на подпространстве $\hat{\mathfrak{M}}$ полунорму p, заданную равенством:

$$p(u)=\sum_{k=1}^{T}\|\mathcal{P}^{(k)}u\|_{Z_k^{(0)}}. \tag{2.1}$$

Предположим, что $\forall k=1,\dots,T$ имеет место тождество

$$u=\Pi^{(k)}u+Q^{(k)}\mathcal{P}^{(k)}u \qquad \forall u\in\mathfrak{M}_k, \tag{2.2}$$

где $\Pi^{(k)}: L\longrightarrow L$ и $Q^{(k)}: Z_k\longrightarrow L$ - линейные операторы.

В силу (2.2), имеем $\forall u\in\mathfrak{M}$:

$$u=\Pi^{(1)}u+Q^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}u=\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}u+\Pi^{(1)}Q^{(2)}\mathcal{P}^{(2)}u+Q^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}u=\dots=\Pi^{(1)}\dots\Pi^{(T)}u+$$
$$+\Pi^{(1)}\dots\Pi^{(T-1)}Q^{(T)}\mathcal{P}^{(T)}u+\Pi^{(1)}\dots\Pi^{(T-2)}Q^{(T-1)}\mathcal{P}^{(T-1)}u+\dots+\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}Q^{(3)}\mathcal{P}^{(3)}u+\Pi^{(1)}Q^{(2)}\mathcal{P}^{(2)}u+Q^{(1)}\mathcal{P}^{(1)}u=\Pi u+Q\mathcal{P}u, \tag{2.3}$$

где $Q: Z\longrightarrow L$ - линейный оператор, действующий по формуле

$$Qz=Q^{(1)}z_1+\Pi^{(1)}Q^{(2)}z_2+\dots+\Pi^{(1)}\dots\Pi^{(T-1)}Q^{(T)}z_T \qquad \forall z=(z_1,\dots,z_T)\in Z.$$

Сформулируем следующие условия.

Условие 2.1. Имеет место включение $\Pi(\hat{\mathfrak{M}})\subset \ker p$, где

$$\Pi=\Pi^{(1)}\dots\Pi^{(T)}. \tag{2.4}$$

Условие 2.2. Существует такое нормированное пространство Σ над полем K, вложенное в L, что $Q\mathcal{P}(\hat{\mathfrak{M}}\cap\ker\Pi)\subset\Sigma$, $\|Q\mathcal{P}u\|_{\Sigma}\leqslant$ $\leqslant Cp(u)$ $\forall u\in\hat{\mathfrak{M}}\cap\ker\Pi$, где $C\in R$ и не зависит от $u\in\hat{\mathfrak{M}}\cap$ $\cap\ker\Pi$, и векторное подпространство $\Sigma\cap\hat{\mathfrak{M}}\cap\ker\Pi$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_{\Sigma}+p(\cdot)$.

Легко может быть доказана следующая

Теорема 2.1. <u>При выполнении условия 2.1 равенство (2.3) является представлением С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}=(\mathcal{P}^{(1)},\dots,\mathcal{P}^{(T)})$ на подпространстве $\hat{\mathfrak{M}}$, а при выполнении условий 2.1 и 2.2 Π является оператором С.Л.Соболева на $\hat{\mathfrak{M}}$ для полунормы (2.1).</u>

Обычно $\forall k=1,\ldots,T$ имеет место включение

$$\Pi^{(k)}(L)\subset \ker\mathcal{P}^{(k)}. \tag{2.5}$$

Ясно, что при этом для выполнения условия 2.1 достаточно, чтобы имело место соотношение:

$$\Pi^{(k)}\Pi=\Pi \qquad \forall k=1,\ldots,T. \tag{2.6}$$

Рассмотрим одну ситуацию, в которой для операторов Π вида (2.4) выполняется равенство (2.6).

Пусть $N,T\in\mathbb{N}$. $\Pi_0^{(i,k)}: L\to L$, $i=1,\ldots,N$, $k=1,\ldots,T$, - линейный проекционный оператор, $S^{(i,k)}_0=\Pi_0^{(i,k)}(L)$ - его область значений. Буквами i и k до конца параграфа будем обозначать натуральные числа, не превосходящие N и T соответственно.

Предположим, что

$$\Pi_0^{(i_1,k_1)}\Pi_0^{(i_2,k_2)}=\Pi_0^{(i_2,k_2)}\Pi_0^{(i_1,k_1)} \qquad \forall i_1\neq i_2,\ \forall k_1,k_2. \tag{2.7}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Pi^{(k)}=I-(I-\Pi_0^{(1,k)})(I-\Pi_0^{(2,k)})\ldots(I-\Pi_0^{(N,k)}),$$
$$\Pi=\Pi^{(1)}\Pi^{(2)}\ldots\Pi^{(T)}. \tag{2.8}$$

Т е о р е м а 2.2. <u>Если для любого</u> k <u>найдутся такие операторы</u> $\Lambda^{(i,k)}$: $L\longrightarrow L$, <u>что оператор</u> Π <u>представим в виде</u>

$$\Pi=\sum_{i=1}^{N}\Pi_0^{(i,k)}\Lambda^{(i,k)}, \tag{2.9}$$

<u>то выполнено равенство (2.6).</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.6) в силу (2.9) следует непосредственно из равенства

$$\Pi^{(k)}\Pi_0^{(i,k)}=\Pi_0^{(i,k)}, \tag{2.10}$$

справедливость которого мы и будем доказывать.

Учитывая (8.7) и тот факт, что оператор $\Pi_0^{(i,k)}$ проекционный, имеем

$$\Pi^{(k)}\Pi_0^{(i,k)}=\Pi_0^{(i,k)}-(I-\Pi_0^{(1,k)}),\ldots,(I-\Pi_0^{(i,k)})\ldots(I-\Pi_0^{(N,k)})\Pi_0^{(i,k)}=$$
$$=\Pi_0^{(i,k)}-(I-\Pi_0^{(1,k)})\ldots(I-\Pi_0^{(i,k)})\Pi_0^{(i,k)}\ldots(I-\Pi_0^{(N,k)})=\Pi_0^{(i,k)}.$$

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2.1. Оператор $A: L\to L$ назовем элементарным, если он представим в виде

$$A=(-1)^r\,\Pi^{(i_1^{(1)},1)}\Pi^{(i_2^{(1)},1)}\ldots\Pi^{(i_{j_1}^{(1)},1)}\Pi^{(i_1^{(2)},2)}\Pi^{(i_2^{(2)},2)}\ldots\Pi^{(i_{j_2}^{(2)},2)}\ldots$$
$$\ldots\Pi^{(i_1^{(k)},k)}\Pi^{(i_2^{(k)},k)}\ldots\Pi^{(i_{j_k}^{(k)},k)}\ldots\Pi^{(i_\ell^{(T)},T)}\Pi^{(i_2^{(T)},T)}\ldots\Pi^{(i_{j_T}^{(T)},T)}, \tag{2.11}$$

где $r = T + \sum_{k=1}^{T} \gamma_k$ и среди операторов $\Pi_0^{(i,k)}$, участвующих в этом представлении, нет нулевых *).

Оператор Π, очевидно, может быть записан как сумма элементарных операторов, если среди операторов $\Pi_0^{(i,k)}$ есть хотя бы один ненулевой.

Для каждой фиксированной пары натуральных чисел (i,k) рассмотрим совокупность $\Psi_{i,k}$ всевозможных наборов $\tau = (k_1, k_2, \dots, k_\ell)$ ($1 \le \ell \le T$ и ℓ зависит, вообще говоря, от τ) из натуральных чисел, удовлетворяющих следующим условиям: а) $k < k_1 < \dots < k_\ell \le T$; б) существует такой элементарный оператор, который содержит операторы $\Pi_0^{(i,k)}, \Pi_0^{(i,k_1)}, \dots, \Pi_0^{(i,k_\ell)}$ и не содержит операторов вида $\Pi_0^{(i,k^*)}$ при $k^* > k$ и $k^* \ne k_j$ $\forall j = 1, \dots, \ell$.

Для некоторых пар (i,k) множество $\Psi_{i,k}$ может оказаться пустым. Например, $\Psi_{i,T} = \emptyset$ $\forall i$ и $\Psi_{i,k} = \emptyset$ при $S^{(i,k)} = \{0\}$.

Если $\Psi_{i,k} \ne \emptyset$, то для любого набора $\tau = (k_1, \dots, k_\ell) \in \Psi_{i,k}$ введем множества

$$S_\tau^{(i,k)} = \bigcap_{1 \le j \le \ell} S^{(i,k_j)}, \quad \Gamma_\tau^{(i,k)} = S^{(i,k)} \cap S_\tau^{(i,k)}.$$

Т е о р е м а 2.3. Пусть для каждой пары натуральных чисел (i,k) справедливо одно из следующих утверждений:

1) $\Psi_{i,k} = \emptyset$,

2) $\Psi_{i,k} \ne \emptyset$, и при любом $\tau \in \Psi_{i,k}$ существует такое линейное подпространство $\nabla_\tau^{(i,k)} \subset S_\tau^{(i,k)}$, что

$$S_\tau^{(i,k)} = \Gamma_\tau^{(i,k)} \oplus \nabla_\tau^{(i,k)}, \tag{2.12}$$

причем

$$\sum_{\tau \in \Psi_{i,k}} \nabla_\tau^{(i,k)} \subset \operatorname{Ker} \Pi_0^{(i,k)}. \tag{2.13}$$

Тогда имеет место равенство (2.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о содержится в работе автора [14].

§ 3. О некоторых неравенствах для полунорм и представлениях С.Л.Соболева, построенных на основе этих неравенств

Пусть $\mathcal{R}$ - векторное пространство над полем K, σ - полунорма на $\mathcal{R}$, X - векторное подпространство в $\mathcal{R}$, ρ - полунорма на X, причем $\sigma + \rho$ - норма на X и X в дальнейшем рассматривается как нормированное пространство с указанной нормой: $\|\cdot\|_X = \sigma(\cdot) + \rho(\cdot)$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть существует линейный оператор $\pi : X \to \mathcal{R}$, обладающий свойством:

$$\sigma(u - \pi u) \le C\rho(u) \qquad \forall u \in X, \tag{3.1}$$

---

*) Это не означает, конечно, что сам оператор A не может оказаться нулевым.

где $C \in \mathbb{R}$ и не зависит от $u \in X$. Пусть еще существует векторное подпространство Σ в $\mathcal{R}$ такое, что $\Sigma \cap X = \{0\}$, $\pi(X) \subset \Sigma \oplus \ker p$, полунорма σ является нормой на подпространстве $\Sigma \oplus X$, которое относительно этой нормы является банаховым пространством и в котором Σ и X суть замкнутые подпространства. Образуем в X векторное подпространство $X_0 = \{u \in X \mid \pi u \in \Sigma\}$. Тогда 1) X_0 замкнуто в X; 2) $X = X_0 \oplus \ker p$ и 3) полунорма p эквивалентна на X_0 норме $\|\cdot\|_X$.

Теорема 3.1 следует из таких двух лемм (их доказательство содержится в работе автора [8]):

Л е м м а 3.1. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) существует линейный оператор $\pi: X \to \mathcal{R}$ такой, что имеет место неравенство (3.1);

2) в $\mathcal{R}$ существуют векторные подпространства Σ и Y такие, что $\pi(X) \subset \Sigma \oplus Y$, $\Sigma \cap Y = \{0\}$, причем на подпространстве $X + \Sigma + Y$ существует полунорма μ такая, что $Y \subset \ker \mu$ и имеет место неравенство $\mu(u) \leq M\sigma(u)$ $\forall u \in X_\pi$, где X_π - совокупность элементов $u \in \mathcal{R}$ вида: $u = v - \pi v$, $v \in X$, а $M \in \mathbb{R}$ и не зависит от $u \in X_\pi$;

3) справедливо неравенство $\sigma(u) \leq A\mu(u)$ $\forall u \in \Sigma$, где $A \in \mathbb{R}$ и не зависит от $u \in \Sigma$.

Обозначим через Π линейный проекционный оператор, отображающий $\Sigma \oplus Y$ на Y, ядром которого является подпространство Σ.

Имеет место неравенство

$$\sigma(u - \Pi\pi u) \leq C_0 (\mu(u) + p(u)) \quad \forall u \in X \tag{3.2}$$

с константой $C_0 \in \mathbb{R}$, не зависящей от $u \in X$.

Л е м м а 3.2. Пусть Σ - векторное подпространство в $\mathcal{R}$, $\Sigma \cap X = \{0\}$ и полунорма σ является нормой на подпространстве $\Sigma \oplus X$, которое относительно этой нормы является банаховым пространством и в котором Σ и X суть замкнутые подпространства. Тогда имеет место неравенство

$$\sigma(u) \leq M \inf_{v \in X} \sigma(u - v) \quad \forall u \in \Sigma \tag{3.3}$$

с константой $M \in \mathbb{R}$, не зависящей от $u \in \Sigma$.

Рассмотрим вопрос о построении одного представления С.Л.Соболева.

Пусть $\mathcal{R}$ и Z - векторные пространства над полем K, а X - векторное подпространство в $\mathcal{R}$ и пусть задан линейный оператор $\mathcal{P}: X \to Z$. Пусть найдутся такие линейные операторы $\pi: X \to \mathcal{R}$ и $Q: Z \to \mathcal{R}$, что имеет место равенство

$$u = \pi u + Q\mathcal{P}u \quad \forall u \in X. \tag{3.4}$$

Напомним*), что если $\pi(X) \subset \ker\mathcal{P}$, то равенство (3.6) называется представлением С.Л.Соболева на подпространстве X для оператора $\mathcal{P}$.

Зафиксируем некоторый линейный оператор $\Pi : X \to \ker\mathcal{P}$.

В силу (3.4) имеем

$$u = \Pi u + (\pi - \Pi)u + Q\mathcal{P}u \qquad \forall u \in X. \tag{3.5}$$

Рассмотрим одну ситуацию, в которой (3.5) является представлением С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}$ на подпространстве X.

Пусть $\hat{\mathcal{R}}$ - векторное пространство над полем K с полунормой $\hat{\sigma}$, $\hat{X}$ - векторное подпространство в $\hat{\mathcal{R}}$, $\hat{Z}$ - нормированное пространство над K. Пусть, далее, $\chi : X \to \hat{X}$, $\hat{\mathcal{P}} : \chi(X) \to \hat{Z}$ и $\pi_0 : \hat{X} \to \mathcal{R}$ - линейные операторы такие, что

$$(\pi - \Pi)u = \pi_0 \chi u \qquad \forall u \in X, \tag{3.6}$$

$$\pi_0 v = 0 \qquad \forall v \in \ker\hat{\mathcal{P}}, \tag{3.7}$$

$$\hat{\mathcal{P}}\chi u = \nu\mathcal{P}u \qquad \forall u \in X, \tag{3.8}$$

где $\nu : \mathcal{P}(X) \to \hat{Z}$ - некоторый линейный оператор.

Рассмотрим на $\hat{X}$ полунорму $\hat{p}$, заданную равенством: $\hat{p}(v) = |\hat{\mathcal{P}}v|_{\hat{Z}}$ $\forall v \in \hat{X}$. Будем рассматривать $\hat{X}$ как нормированное пространство с нормой $|\cdot|_{\hat{X}} = \hat{\sigma}(\cdot) + \hat{p}(\cdot)$. Предположим, что 1) существует линейный оператор $\hat{\pi} : \hat{X} \to \hat{\mathcal{R}}$, удовлетворяющий неравенству

$$\hat{\sigma}(v - \hat{\pi}v) \leq \hat{C}\hat{p}(v) \qquad \forall v \in \hat{X}, \tag{3.9}$$

где $\hat{C} \in R$ и не зависит от $v \in \hat{X}$; 2) в $\hat{\mathcal{R}}$ существует векторное подпространство $\hat{\Sigma}$ такое, что $\hat{\Sigma} \cap \hat{X} = \{0\}$, $\hat{\pi}(\hat{X}) = \hat{\Sigma} \oplus \ker\hat{\mathcal{P}}$, полунорма $\hat{\sigma}$ является нормой на подпространстве $\hat{\Sigma} \oplus \hat{X}$, которое относительно этой нормы является банаховым пространством и в котором $\hat{\Sigma}$ и $\hat{X}$ суть замкнутые подпространства.

Покажем, что равенство (3.5) является представлением С.Л.Соболева для оператора $\mathcal{P}$ на подпространстве X.

Действительно, в силу теоремы 3.1, оператор $\hat{\mathcal{P}}$ изоморфно отображает подпространство $\hat{X}_0 = \{v \in \hat{X} \mid \hat{\pi}v \in \hat{\Sigma}\}$ на подпространство $\hat{\mathcal{P}}(\hat{X})$, и нормированное пространство $\hat{X}$ раскладывается в прямую сумму: $\hat{X} = \hat{X}_0 \oplus \ker\hat{\mathcal{P}}$ (заметим, что $\ker\hat{p} = \ker\hat{\mathcal{P}}$). Обозначим через $\hat{\mathcal{P}}^{-1} : \hat{\mathcal{P}}(\hat{X}) \to \hat{X}_0$ - линейный непрерывный оператор такой, что $\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}v = v$ $\forall v \in \hat{X}_0$.

Пусть $u \in X$. Представим элемент $\chi u \in \hat{X}$ в виде суммы: $\chi u = \tau + \omega$, где $\tau \in \ker\hat{\mathcal{P}}$, а $\omega \in \hat{X}_0$. Тогда, в силу (3.8),

$$\chi u = \tau + \omega = \tau + \hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\omega = \tau + \hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{P}}\chi u =$$
$$= \tau + \hat{\mathcal{P}}^{-1}\nu\mathcal{P}u. \tag{3.10}$$

---

*) См. определение 1.1.

Поскольку $\tau \in \ker \hat{\mathcal{P}}$, то, учитывая (3.7), получаем

$$\pi_0 \tau = 0. \tag{3.11}$$

Таким образом, $\forall u \in X$, в силу (2.9), (3.10) и (3.11), будем иметь:

$$(\pi - \Pi) u = \pi_0 \chi u - \pi_0 \tau + \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u = \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u . \tag{3.12}$$

Итак, равенство (3.5) переписывается следующим образом:

$$u = \Pi u + \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u + Q \mathcal{P} u \qquad \forall u \in X. \tag{3.13}$$

Если положить $Z_1 = \mathcal{P}(X)$, а через $Q_1 : Z_1 \to \mathcal{R}$ обозначить оператор, действующий по формуле: $Q_1 w = \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu w + Q w \quad \forall w \in Z_1$, то мы для оператора $\mathcal{P}$ на подпространстве X получим в силу (3.13) представление С.Л.Соболева

$$u = \Pi u + Q_1 \mathcal{P} u \qquad \forall u \in X. \tag{3.14}$$

Рассмотрим один случай, когда формулы (3.13), (3.14) могут быть записаны в более удобном с точки зрения приложений виде.

Пусть Ξ - банахово пространство над полем $\mathbb{K}$, являющееся одновременно векторным подпространством в $\mathcal{R}$, такое, что $\pi_0 (\hat{X}) \subset \Xi$. Пусть либо $0 < \dim \Xi < +\infty$, либо $\dim \Xi = +\infty$ и Σ является банаховым пространством с базисом относительно нормы σ . Положим $N = \dim \Xi$. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ - базис в Ξ , если $N < +\infty$, и $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ - базис в Ξ , если $N = +\infty$.

В силу (3.12) имеем $\forall u \in X$:

$$(\pi - \Pi) u = \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u .$$

Предположим, что оператор $\pi_0 \in [\hat{X}_0 \to \Xi]$. Тогда $\forall \omega \in \hat{X}_0$ имеем:

$$\pi_0 \omega = \sum_{j=1}^{N} < f_j , \omega > \xi_j , \tag{3.15}$$

где $f_j \in \hat{X}_0^*$ $\forall j = 1, \ldots, N$, если $N < +\infty$, и $\forall j = 1, 2, \ldots$, если $N = +\infty$.

Будем рассматривать $\hat{X}_0$ как банахово пространство с нормой $\hat{p}(v) = \|\hat{\mathcal{P}} v\|_{\hat{Z}}$, что возможно, в силу теоремы 3.1 (напомним, что по теореме 3.1 полунорма $\hat{p}$ эквивалентна на $\hat{X}_0$ норме $\|\cdot\|_{\hat{X}}$) . Продолжим при каждом фиксированном j функционал $(\hat{\mathcal{P}}^{-1})^* f_j$ с сохранением непрерывности с подпространства $\hat{\mathcal{P}}(\hat{X})$ на все пространство $\hat{Z}$. Обозначим это продолжение через φ_j (таким образом, $\varphi_j \in \hat{Z}^*$ $\forall j$). В силу равенства (3.15) будем иметь:

$$(\pi - \Pi) u = \pi_0 \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u = \sum_{j=1}^{N} < f_j , \hat{\mathcal{P}}^{-1} \nu \mathcal{P} u > \xi_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} < (\hat{\mathcal{P}}^{-1})^* f_j , \nu \mathcal{P} u > \xi_j = \sum_{j=1}^{N} < \varphi_j , \nu \mathcal{P} u > \xi_j . \tag{3.16}$$

Таким образом, в представлении (3.14) при выполнении перечисленных условий оператор $Q_1 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{R}$ действует по формуле

$$Q_1 v = \sum_{j=1}^{N} < \varphi_j , \nu v > \xi_j + Q v.$$

Если линейный оператор ν задан на всем пространстве Z и отображает его в пространство $\hat{Z}$, то относительно оператора Q_1 можно считать, что он задан на всем пространстве Z (и отображает его в $\mathcal{R}$).

Пример 3.1. Пусть Ω - область в n-мерном евклидовом пространстве R^n точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть X - векторное подпространство в пространстве $L_1^{loc}(\Omega, K^s)$, $s \in N$. Пусть на X заданы линейные операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$, отображающи X в пространства $L_1^{loc}(\Omega, K^t)$ и $L_1^{loc}(\Omega, K^\tau)$ соответственно, где $t, \tau \in N$. Пусть операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$ связаны соотношением

$$\mathcal{L} = \Gamma \mathcal{P}, \tag{3.18}$$

где $\Gamma : L_1^{loc}(\Omega, K^t) \longrightarrow L_1^{loc}(\Omega, K^s)$ - линейный непрерывный оператор.

Предположим, что имеет место равенство

$$u(x) = \pi u(x) + Q_0 \mathcal{L} u(x) \qquad \forall u(x) \in X, \tag{3.19}$$

где $\pi : L_1^{loc}(\Omega, K^s) \longrightarrow L_1^{loc}(\Omega, K^s)$ и $Q_0 : L_1^{loc}(\Omega, K^\tau) \longrightarrow L_1^{loc}(\Omega, K^s)$- линейные непрерывные операторы, причем область значений Ξ оператора Π является конечномерным подпространством в $L_1^{loc}(\Omega, K^s)$.

В силу (3.18) представление (3.19) перепишется в виде:

$$u(x) = \pi u(x) + Q \mathcal{P} u(x) \qquad \forall u(x) \in X, \tag{3.20}$$

где $Q = Q_0 \Gamma : L_1^{loc}(\Omega, K^t) \to L_1^{loc}(\Omega, K^s)$- линейный непрерывный оператор.

Зафиксируем в Ω некоторое непустое открытое множество $\hat{\Omega}$. Обозначим через χ (через ν) оператор, сопоставляющий каждой функции $u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, K^s)$ $(L_1^{loc}(\Omega, K^t))$ ее след на $\hat{\Omega}$. Пусть $\mathcal{R} = L_1^{loc}(\Omega, K^s)$, Z - произвольное векторное подпространство в $L_1^{loc}(\Omega, K^t)$, содержащее подпространство $\mathcal{P}(X)$, $\hat{\mathcal{R}} = L_1^{loc}(\hat{\Omega}, K^s)$, $\hat{X} = \chi(X)$. Обозначим через $\hat{\mathcal{P}} : \hat{X} \longrightarrow L_1^{loc}(\hat{\Omega}, K^t)$ оператор, действующий по формуле, $\hat{\mathcal{P}} v = \mathcal{P} v \quad \forall v \in \hat{X}$. Ясно, что соотношение (3.8) выполнено.

Пусть $\hat{Z}$ - произвольное нормированное пространство, непрерывно вложенное в пространство $L_1^{loc}(\hat{\Omega}, K^t)$ и такое, что $\hat{\mathcal{P}} v \in \hat{Z} \quad \forall v \in \hat{X}$.

Предположим, что для множества $\hat{\Omega}$ имеют место импликации:

$$\{v(x) \in \ker \hat{\mathcal{P}}\} \Longrightarrow \{\exists u(x) \in \ker \mathcal{P} : v(x) = \chi u(x)\}, \tag{3.21}$$

$$\{u(x) \in \Xi \text{ и } \chi u(x) = 0 \text{ на } \hat{\Omega}\} \Longrightarrow \{u(x) = 0 \text{ на } \Omega\}, \tag{3.22}$$

$$\{u(x), v(x) \in X,\ \chi u(x) = \chi v(x)\} \Longrightarrow \{\pi u(x) = \pi v(x)\}.^{*)} \qquad (3.23)$$

В силу (3.22) и конечномерности подпространства Ξ, существует ограниченное открытое множество $\mathscr{E}$ в R^n такое, что $\overline{\mathscr{E}} \subset \hat{\Omega}$, и определенная на пространстве $\hat{\mathscr{R}}$ полунорма

$$\hat{\sigma}(v) = \int\limits_{\mathscr{E}} |v(x)| dx$$

является нормой на подпространстве Ξ. На пространстве $\hat{X}$ полунорму $\hat{\rho}$ определим равенством $\hat{\rho}(v) = \|\hat{\mathscr{P}} v\|_{\hat{Z}}$.

Будем рассматривать $\hat{X}$ как нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_{\hat{X}} = \hat{\sigma}(\cdot) + \hat{\rho}(\cdot)$.

Оператор $\hat{\Pi}: \hat{X} \to \hat{\mathscr{R}}$ зададим так: $\hat{\pi} v = \chi \pi u \quad \forall v \in \hat{X}$, где u - любой элемент из X такой, что $\chi u = v$ (это определение корректно, поскольку, в силу (3.23), $\pi u = \pi w \quad \forall u, w \in X$ таких, что $\chi u = \chi w$).

Неравенство (3.9), очевидно, выполнено.

Положим $Y = \ker \mathscr{P}$, $^{**)}$ $\hat{Y} = \chi(Y)$, $\hat{\chi}: \hat{Y} \to Y$ - оператор, сопоставляющий каждой функции $\hat{u}(x)$ из $\hat{Y}$ ее продолжение на область Ω, т.е. такую функцию $u(x)$, что $\hat{u}(x) = \chi u(x)$. Пусть $\hat{\Pi}: \hat{X} \xrightarrow{\text{на}} \hat{Y}$ - произвольный непрерывный линейный проекционный оператор. Введем оператор

$$\Pi = \hat{\chi} \hat{\Pi} \chi : X \xrightarrow{\text{на}} Y,$$

а также векторные пространства $\Sigma = \{u \in \Xi \mid \Pi u = 0\}$, $\hat{\Xi} = \chi(\Xi)$ и $\hat{\Sigma} = \chi(\Sigma)$. Ясно, что $\Xi = \Sigma \oplus Y$, $\hat{\Xi} = \hat{\Sigma} \oplus \hat{Y}$, $\hat{Y} = \ker \hat{\mathscr{P}}$ и $\hat{\pi}(\hat{X}) \to \hat{\Sigma} \oplus \ker \hat{\mathscr{P}}$. Оператор $\pi_0: \hat{X} \to \Xi$ мы определим следующим образом: $\pi_0 v = \pi u - \Pi u \quad \forall v \in \hat{X}$, где u - любой элемент из X такой, что $\chi u = v$ (это определение корректно, поскольку $\pi u = \pi w$ и $\Pi u = \Pi w$ $\forall u, w \in X$ таких, что $\chi u = \chi w$), $\pi_0 \in [\hat{X} \to \Xi]$ и выполнены соотношения (3.6) и (3.7) (последнее в силу импликации (3.21)).

Если $\pi u = \Pi u \quad \forall u \in X$, то представление (3.19) искомое. В противном случае, выбирая произвольное векторное подпространство Ξ_0 в Ξ с

---

*) Если $\hat{\Omega} = \Omega$, то все импликации (3.21)-(3.23), очевидно, справедливы. Если $\mathscr{P}$ - оператор с постоянными матричными коэффициентами и все его обобщенные в смысле С.Л.Соболева решения в R^n суть вектор-функции, компонентами которых являются многочлены и следы которых на Ω содержатся в подпространстве X, то импликация (3.21) имеет место для любого непустого открытого множества $\hat{\Omega} \subset \Omega$. Импликация (3.22) верна для любого непустого открытого множества $\hat{\Omega} \subset \Omega$, например, в случае, когда подпространство Ξ состоит из вектор-функций, компоненты которых являются многочленами.

**) В силу (3.20), $u = \pi u \quad \forall u \in Y$, откуда следует, что $Y \subset \Xi$.

базисом $\{\xi^{(1)}(x),\dots,\xi^{(N)}(x)\}$ такое, что $\pi_0(\hat{X})\subset\Xi_0$, мы получим, в силу (3.16), представление

$$u(x)=\Pi u(x)+\sum_{j=1}^{N}<\varphi^{(j)},\ \nu\mathcal{P}u(x)>\xi^{(j)}(x)+Q\mathcal{P}u(x)\quad \forall u\in X, \tag{3.24}$$

где $\varphi^{(j)}\in\hat{Z}^*\quad \forall j=1,\dots,N$.

Возьмем в качестве $\hat{Z}$ банахово пространство функций $\sigma(x)$ из $L_1^{loc}(\hat{\Omega},K^{\tau})$ с конечной нормой

$$\|\sigma\|_{\hat{Z}}=\sum_{k=1}^{\tau}\|\mu_k(x)\sigma_k(x)\|_{L_{q_k}(\hat{\Omega})},$$

где $1\leqslant q_k<+\infty$, $\mu_k(x)>0\quad\forall x\in\hat{\Omega}$ и $\mu_k^{-1}(x)\in L_{q_k'}^{loc}(\hat{\Omega})$. Пространство $\hat{Z}^*$ будет в этом случае состоять из функций $\varphi(x)\in L_1^{loc}(\hat{\Omega},K^{\tau})$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{Z^*}=\sum_{k=1}^{\tau}\|\varphi_k(x)\mu_k^{-1}(x)\|_{L_{q_k'}(\hat{\Omega})}.$$

Представление (3.24) запишется тогда в виде

$$u(x)=\Pi u(x)+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\hat{\Omega}}\left(\nu\mathcal{P}u(x),\varphi^{(j)}(x)\right)dx\right)\xi^{(j)}(x)+Q\mathcal{P}u(x)\quad\forall u\in X, \tag{3.25}$$

где $\varphi^{(j)}\in\hat{Z}^*\quad\forall j=1,\dots,N$, а символом $(.,.)$ обозначено скалярное произведение в K^{τ}.

§ 4. О некоторых представлениях С.Л.Соболева для дифференциальных операторов с бесконечномерным ядром

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство R^n, $n>1$, точек $x=(x_1,\dots,x_n)$. Разобьем его в прямую сумму N подпространства переменных, $N>1$:

$$x^{(1)}=(x_1,\dots,x_{n_1}),\quad x^{(2)}=(x_{n_1+1},\dots,x_{n_1+n_2}),$$

$$x^{(N)}=(x_{n_1+n_2+\dots+n_{N-1}+1},\dots,x_{n_1+n_2+\dots+n_N}),$$

так что $x=(x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(N)})$. Положим $x^{(i)*}=(x^{(1)},\dots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\dots,x^{(N)})$.

Пусть Ω - область в R^n. Через Ω_i обозначим ортогональную проекцию Ω на подпространство R^{n_i} переменных $x^{(i)}$, а через Ω_i^* - ортогональную проекцию Ω на подпространство R^{n-n_i} переменных $x^{(i)*}$. Зафиксируем в Ω_i некоторый открытый шар b_i и некоторую область $\hat{\Omega}_i\supset b_i$. Предположим, что $\forall i=1,\dots,N$ - ортогональная проекция пересечения области Ω со всякой осью размерности n_i, параллельной пространству переменных $x^{(i)}$, на это подпространство представляет собой либо пустое множество, либо область в R^{n_i}, содержащую область $\hat{\Omega}_i$ и звездную относительно замкнутого шара $\overline{\mathscr{b}}_i$.

Построим и исследуем одно функциональное пространство с элементарной полунормой (см. § 1). Пусть заданы натуральные числа $s_0, s_1, \ldots, s_N$. Пусть $L = L_1^{loc}(\Omega, K^{s_N})$. Зададим $\forall i = 1, \ldots, N$ на область Ω_i матричный дифференциальный оператор

$$\mathscr{P}^{(i)} = \Big\| \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{(k,\ell,i)}(x)\, \mathscr{D}_{x^{(i)}}^{\alpha} \Big\|_{\substack{k=1,\ldots,s_{i-1} \\ \ell=1,\ldots,s_i}} ,$$

где $a_{\alpha}^{(k,\ell,i)}(x)$ - K -значная функция из $L_1^{loc}(\Omega)$, имеющая такие обобщенные производные, которых достаточно для определения в обобщенном смысле как оператора $\mathscr{P}^{(i)}$, так и определенного ниже оператора $\mathscr{P}$. Будем считать, что $a_{\alpha}^{(k,\ell,i)}(x) \not\equiv 0$ на Ω лишь для конечной совокупности мультииндексов α .

Введем следующие обозначения:

$$\gamma_{a^{(i)*}} = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x^{(i)*} = a^{(i)*} \right\} \quad \forall a^{(i)*} \in \Omega_i^*, \quad \forall i = 1, \ldots, N,$$

$$\Omega_i(x^{(i)*}) = \Omega \cap \gamma_{x^{(i)*}} \qquad \forall x_i^* \in \Omega_i^* .$$

Зададим $\forall i = 1, \ldots, N$ банахово пространство $\hat{Z}_i$ функций $v(x^{(i)})$ из $L_1^{loc}(\hat{\Omega}_i, K^{s_{i-1}})$ с конечной нормой

$$\| v \|_{\hat{Z}_i} = \sum_{k=1}^{s_{i-1}} \| v_k(x^{(i)}) \mu_{ki}(x^{(i)}) \|_{L_{q_{ki}}(\hat{\Omega}_i)} ,$$

где $1 \le q_{ki} < +\infty$, $\mu_{ki}(x^{(i)}) > 0$ $\forall x^{(i)} \in \hat{\Omega}_i$ и $\mu_{ki}^{-1}(x^{(i)}) \in L_{q'_{ki}}^{loc}(\Omega_i)$.

Пусть, далее, $\forall x^{(i)*} \in \Omega_i^*$ в пространстве $L_1^{loc}(\Omega_i(x^{(i)*}), K^{s_i})$ задано векторное подпространство $X_i(x^{(i)*})$ такое, что каждая функция $v(x^{(i)}) \in X_i(x^{(i)*})$ имеет на $\Omega_i(x^{(i)*})$ обобщенный в смысле С.Л.Соболева оператор $\mathscr{P}^{(i)}$, причем $\mathscr{P}^{(i)} v(x^{(i)}) \in \hat{Z}_i$. Образуем оператор $\mathscr{P} = \mathscr{P}^{(1)} \ldots \mathscr{P}^{(N)}$, определив его на совокупности $\mathfrak{M}$ таких функций $u(x) \in L$, у которых он существует в обобщенном смысле С.Л.Соболева, так что $\nabla = L_1^{loc}(\Omega, K^{s_0})$.

Далее, $\forall i = 1, \ldots, N$ через $\hat{\Lambda}_i$ обозначим совокупность всех таких функций $u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, s_i)$, которые после возможного изменения на множестве меры нуль в Ω удовлетворяют условию:

$$u(x^{(i)}, x^{(i)*}) \in X_i(x^{(i)*}) \qquad \forall x^{(i)*} \in \Omega_i^* .$$

Пусть имеет место следующая импликация $\forall x^{(i)*} \in \Omega_i^*$, $\forall i = 1, \ldots, N$:

$$\left\{ v(x^{(i)}) \in X_i(x^{(i)*}) \ \text{ и } \ \mathscr{P}^{(i)} v(x^{(i)}) = 0 \ \text{ на } \hat{\Omega}_i \right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \exists u(x^{(i)}) \in X_i(x^{(i)*}) : u(x^{(i)}) = v(x^{(i)}) \text{ на } \hat{\Omega}_i \text{ и } \mathscr{P}^{(i)} u(x^{(i)}) = 0 \quad \text{ на } \Omega_i(x^{(i)*}) \right\}.$$

Пусть еще $\forall i = 1, \ldots, N$ в пространстве $L_1^{loc}(\Omega_i, K^{s_i})$ найдется конечномерное векторное подпространство Y_i , сужение которого на область

$\Omega_i(x^{(i)*})$ совпадает с подпространством

$$\{u(x^{(i)})\in X_i(x^{(i)*})\mid \mathcal{P}^{(i)}u(x^{(i)})=0 \text{ на } \Omega_i(x^{(i)*})\}\quad \forall x^{(i)*}\in\Omega_i^*$$

и которое обладает следующим свойством: если $u(x^{(i)})\in Y_i$ и $u(x^{(i)})=0$ почти всюду на $\hat{\Omega}_i$, то $u(x^{(i)})=0$ почти всюду на Ω_i.

Зададим теперь $\forall i=1,\dots,N$ некоторый оператор $\mathcal{L}_i$. Если $n_i=1$, то в качестве $\mathcal{L}_i$ возьмем канонический обыкновенный дифференциальный оператор по переменной $x^{(i)}$, коэффициенты которого являются $\mathbb{K}$-значными функциями из пространства $L_1^{loc}(\Omega_i)$. Если $n_i>1$, то оператор $\mathcal{L}_i$ задается следующим образом. Пусть зафиксированы неотрицательные целые числа m_{ij}, $j=1,\dots,s_i$. Обозначим через r_{ij} число всех операторов дифференцирования вида $\mathcal{D}^{\alpha}_{x^{(i)}}$, $|\alpha|=m_{ij}$, а через l_{ij} - матрицу размера $r_{ij}\times 1$, состоящую из этих операторов. Пусть $r_i=\sum\limits_{j=1}^{s_i} r_{ij}$, а $\mathcal{L}^{(i)}=diag[l_{i1},l_{i2},\dots,l_{is_i}]$ (т.е. $\mathcal{L}_i$ - квазидиагональная матрица-оператор размера $r_i\times s_i$).

Предположим, что $\forall i=1,\dots,N$ у всех функций $u(x^{(i)})\in L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_i})$, обладающих на Ω_i обобщенным в смысле С.Л.Соболева оператором $\mathcal{P}^{(i)}$, существует на Ω_i в обобщенном смысле оператор $\mathcal{L}^{(i)}$, причем найдется функциональная матрица $\Gamma^{(i)}$ размера $r_i\times s_{i-1}$, элементы которой суть $\mathbb{K}$-значные функции из пространства $L_\infty^{loc}(\Omega)$ и которая связывает операторы $\mathcal{L}^{(i)}$ и $\mathcal{P}^{(i)}$ равенством $\mathcal{L}^{(i)}=\Gamma^{(i)}\mathcal{P}^{(i)}$.

Запишем $\forall i=1,\dots,N$ для оператора $\mathcal{L}^{(i)}$ представление С.Л.Соболева при $n_i>1$ (см. монографию С.Л.Соболева [4, с.62, формула (1.12)], а при $n_i=1$ работу автора [14]):

$$u(x)=\pi^{(i)}u(x)+Q_0^{(i)}\mathcal{L}^{(i)}u(x)\qquad \forall u(x)\in\hat{\Lambda}_i,$$

где $\pi^{(i)}$ - шаровой проекционный оператор, "сосредоточенный" на шаре b_i.

Введем проекционный оператор $\Pi^{(i)}: L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_i})\longrightarrow L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_i})$. Пусть $d_i=\dim Y_i$. Если $d_i=0$, то $\Pi^{(i)}$ будем считать нулевым оператором, а если $d_i>0$, то положим

$$\Pi^{(i)}u(x)=\sum_{j=1}^{d_i}\left(\int\limits_{b_i}\left(u(x),\varphi_j^{(i,j)}(x^{(i)})\right)dx^{(i)}\right)\zeta^{(i,j)}(x^{(i)})\quad \forall u(x)\in L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_i}),$$

где $(.,.)$ - скалярное произведение в $\mathbb{K}^{s_i}$, $\varphi^{(i,j)}(x^{(i)})$ - бесконечно дифференцируемая функция из $L_1^{loc}(b_i,\mathbb{K}^{s_i})$ с носителем в b_i, а $\{\zeta^{(i,1)}(x^{(i)}),\dots,\zeta^{(i,d_i)}(x^{(i)})\}$ - базис в Y_i.

Из результатов § 3 (см., пример, 3.1, формула (3.24)) следует такое представление С.Л.Соболева:

$$u(x)=\Pi^{(i)}u(x)+\sum_{j=1}^{N_i}\left(\int\limits_{\Omega_i}\left(\mathcal{P}^{(i)}u(x),\varphi_j^{(i,j)}(x^{(i)})\right)dx^{(i)}\right)\xi^{(i,j)}(x^{(i)})+$$

$$+ Q_0^{(i)} \Gamma^{(i)} \mathcal{P}^{(i)} u(x) \qquad \forall u(x) \in \hat{\Lambda}_i, \tag{4.1}$$

где $(.,.)$ - скалярное произведение в $\mathbb{K}^{s_{i-1}}, N_i \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(i,j)}(x^{(i)})$ - функция из $\hat{Z}_i^*$, а $\xi^{(i,j)}(x^{(i)})$ - функция, обладающая на Ω_i обобщенным в смысле С.Л.Соболева оператором $\mathcal{L}^{(i)}$, равным нулю.

Введем $\forall i = 1,\dots,N$ пространство

$$\dot{Z}_i = \{u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_{i-1}}) \mid u(x^{(i)}, x^{(i)*}) \in \hat{Z}_i \quad \forall x^{(i)*} \in \Omega_i^*\}$$

и через $Q^{(i)} : \dot{Z}_i \to L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_i})$ обозначим оператор, действующий по формуле

$$Q^{(i)} w(x) = \sum_{j=1}^{N_i} \left(\int_{\hat{\Omega}_i} (w(x), \varphi^{(i,j)}(x^{(i)}) dx^{(i)} \right) \xi^{(i,j)}(x^{(i)}) + Q_0^{(i)} \Gamma^{(i)} w(x). \tag{4.2}$$

Введем далее пространства

$$\Lambda_N = \{ u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_N}) \mid u(x^{(N)}, x^{(N)*}) \in X_N(x^{(N)*}) \quad \forall x^{(N)*} \in \Omega_N^*, \mathcal{P}^{(N)} u \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s-1})\},$$

$$Z_N = \{u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_{N-1}}) \mid u(x^{(N)}, x^{(N)*}) \in \hat{Z}_N \quad \forall x^{(N)*} \in \Omega_N^*\}.$$

Пространства Λ_i и Z_i для $i=1,\dots,N-1$ определим по индукции. Пусть построено пространство Z_{i+1} при $1 \leq i < N$.
Тогда

$$\Lambda_i = \{u(x) \in Z_{i+1} \mid u(x^{(i)}, x^{(i)*}) \in X_i(x^{(i)*}) \forall x^{(i)*} \in \Omega_i^*,$$
$$\Pi^{(i)} u \in Z_{i+1}, \quad \mathcal{P}^{(i)} u \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_{i-1}})\},$$
$$Z_i = \{u(x) \in \dot{Z}_i \mid Q^{(i)} u \in Z_{i+1}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{P}^{(i)}(\Lambda_i) \subset Z_i$ $\forall i = 1,\dots,N$, $Q^{(N)}(Z_N) \subset L$, $Q^{(i)}(Z_i) \subset Z_{i+1}$ $\forall i = 1,\dots,N-1$ и $\Pi^{(i)}(\Lambda_i) \subset \Lambda_i$ $\forall i = 1,\dots,N$.

Из (4.1), в силу соотношения (4.2), следует такое равенство

$$u(x) = \Pi^{(i)} u(x) + Q^{(i)} \mathcal{P}^{(i)} u(x) \qquad \forall u(x) \in \Lambda_i, \ \forall i = 1,\dots,N.$$

Обозначим через Λ совокупность таких функций $u(x) \in \Lambda_N$, у которых $\mathcal{P}^{(N)} u(x) \in \Lambda_{N-1}$, $\mathcal{P}^{(N-1)} \mathcal{P}^{(N)} u(x) \in \Lambda_{N-2}, \dots, \mathcal{P}^{(2)} \dots \mathcal{P}^{(N)} \in \Lambda_1$.

Пусть $\mathcal{R}$ - векторное подпространство в Λ. Будем считать, что $\Pi^{(N)}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ и $\forall i = 1,\dots,N-1$ найдется линейный оператор $\Pi_0^{(i)} : L \to L$ такой, что

$$\Pi_0^{(i)}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$$

и имеет место тождество (1.4).

Введем операторы $\Pi: L \to L$ и $Q: Z_1 \to L$ следующего вида:

$$\Pi = I - (I-\Pi^{(N)})(I-\Pi_0^{(N-1)})\dots(I-\Pi_0^{(1)}), \quad Q = Q^{(N)}\dots Q^{(1)}.$$

Таким образом, мы имеем ситуацию, описанную в начале § 1.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим вопрос о выборе оператора $\Pi_0^{(i)}$, участвующего в тождестве (1.4). Пусть при фиксированном $i \in \mathbb{N}$, $i \le N-1$, пространство Y_i состоит из функций, у которых каждая компонента пробегает одно и то же конечномерное пространство $Y_i^{(0)} \subset L_1^{loc}(\Omega_i)$, так что $Y_i = \underbrace{Y_i^{(0)} \times \dots \times Y_i^{(0)}}_{s_i \text{ раз}}$ и оператор $\Pi^{(i)}$ может быть записан в виде

$$\Pi^{(i)} u(x) = \begin{pmatrix} \sigma_i u_1(x) \\ \sigma_i u_2(x) \\ \vdots \\ \sigma_i u_{s_i}(x) \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i : L_1^{loc}(\Omega) \to L_1^{loc}(\Omega)$ - нулевой оператор при $d_i = 0$, а при $d_i > 0$ - оператор, действующий по формуле:

$$\sigma_i v(x) = \sum_{j=1}^{d_i/s_i} \left(\int_{\mathcal{E}_i} \varphi^{(i,j)}(x^{(i)}) v(x)\, dx^{(i)} \right) \xi^{(i,j)}(x^{(i)}),$$

где $\varphi^{(i,j)}(x^{(i)}) \in C_0^\infty(\mathcal{E}_i)$, а $\xi^{(i,j)}(x^{(i)}) \in Y_i^{(0)}$.

Если $d_i = 0$, то в качестве $\Pi_0^{(i)}$ естественно взять нулевой оператор. Если $d_i > 0$, то оператор $\Pi_0^{(i)} : L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_N}) \to L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_N})$ зададим так:

$$\Pi_0^{(i)} u(x) = \begin{pmatrix} \sigma_i u_1(x) \\ \sigma_i u_2(x) \\ \vdots \\ \sigma_i u_{s_N}(x) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что коэффициенты операторов $\mathcal{P}^{(i+1)} \dots \mathcal{P}^{(N)}$ не зависят от $x^{(i)}$ и $\Pi_0^{(i)}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$, то тождество (1.4) выполнено.

П р и м е р 4.2. Пусть $\forall i = 1, \dots, N$ оператор $\mathcal{P}$ имеет постоянные коэффициенты $\hat{\Omega}_i = \mathcal{E}_i$, $\hat{Z}_i = \underbrace{L_1(\mathcal{E}_i) \times \dots \times L_1(\mathcal{E}_i)}_{s_{i-1}}$, Y_i - совокупность всех таких функций $u(x^{(i)}) \in L_1^{loc}(\Omega_i, \mathbb{K}^{s_i})$, которые имеют на Ω_i обобщенный в смысле С.Л.Соболева оператор $\mathcal{P}^{(i)}$, равный 0 на Ω_i, $X_i(x_i^*)$ $\forall x^{(i)*} \in \Omega$ - совокупность функций из $L_1^{loc}(\Omega_i(x^{(i)*}), \mathbb{K}^{s_i})$, которые обладают на $\Omega_i(x^{(i)*})$ обобщенным в смысле С.Л.Соболева оператором $\mathcal{P}^{(i)}$. В данном случае $\forall i = 1, \dots, N$ имеем $\dot{Z}_i = Z_i = L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_{i-1}})$, а в качестве Λ_i взята совокупность всех таких функций $u(x) \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{K}^{s_i})$, которые обладают на Ω

обобщенным в смысле С.Л.Соболева оператором $\mathcal{P}^{(i)}$.

Положим $\mathcal{R}=\Lambda$, $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}=\ker\mathcal{P}$ (так что $\mathcal{M}_0+\mathcal{H}=\mathcal{M}$). Тогда условие 1.2 выполняется автоматически, поскольку $\mathcal{H}\setminus\mathcal{M}_0=\emptyset$. Условие 1.3 также, очевидно, выполнено. Проверим выполнение условия 1.1. Пусть $u(x)\in\mathcal{M}$. Построим последовательность областей $\omega_1,\omega_2,\ldots$ такую, что $\overline{\omega}_\mu$ - компакт, содержащийся в Ω $\forall\mu=1,2,\ldots$, причем $\omega_1\subset\omega_2\subset\omega_3\subset\ldots$ и $\bigcup_\mu\omega_\mu=\Omega$. Применяя операцию усреднения с бесконечно дифференцируемым ядром, можно $\forall\mu=1,2,\ldots$ найти такую функцию $u_\mu(x)\in L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_N})$ с бесконечно дифференцируемыми компонентами, что $\int(|u-u_\mu|+|\mathcal{P}u-\mathcal{P}u_\mu|)dx<\frac{1}{\mu}$. Поскольку операторы $\Pi:L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_N})\xrightarrow{\omega_\mu}L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_N})$ и $Q:L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_0})\longrightarrow L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_N})$ непрерывны, то условие 1.1 выполнено, так что, в силу теоремы 1.1, имеет место представление С.Л.Соболева вида

$$u=\Pi u+Q\mathcal{P}u\qquad\forall u\in\mathcal{M}.$$

Пусть, далее, Z_0 и Σ - банаховы пространства над полем $\mathbb{K}$, непрерывно вложенные в пространства $L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_0})$ и $L_1^{loc}(\Omega,\mathbb{K}^{s_N})$ соответственно, причем $Q\in[Z_0\longrightarrow\Sigma]$. Тогда, очевидно, условие 1.4 выполнено и в силу теоремы 1.1, является оператором С.Л.Соболева на подпространстве $\hat{\mathcal{M}}$ для полунормы $p(\cdot)=\|\mathcal{P}\|_{Z_0}$, где $\hat{\mathcal{M}}=\{u\in\mathcal{M}\,|\,\mathcal{P}u\in Z_0\}$.

В следующих примерах будут указаны приложения к задачам вариационного исчисления.

П р и м е р 4.3. Пусть Ω - область в $\mathbb{R}^n$, описанная в начале параграфа. Пусть $T\in\mathbb{N}$ и пусть при каждом $K\in\mathbb{N}$, $K\leq T$, заданы неотрицательные целые числа $m_1^{(K)},\ldots,m_N^{(K)}$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность таких вещественных функций $u(x)$, заданных на Ω, у которых конечна полунорма *)

$$p(u)=\sum_{K=1}^{T}\sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(K)}\\ i=1,\ldots,N}}\left(\int_\Omega a^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x)\left|\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}\ldots\mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}u\right|^{q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}}dx\right)^{\frac{1}{q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}}},$$

где $q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}\in(1,+\infty)$ и $a^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x)$ - измеримая на Ω, всюду положительная функция такая, что

$$\left(a^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x)\right)^{\frac{1}{1-q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}}}\in L_1^{loc}(\Omega).$$

Зафиксируем некоторое подмножество $\mathcal{A}$ множества $\{1,\ldots,T\}$ и каждому $K\in\mathcal{A}$ сопоставим число $i_K\in\mathbb{N}$, $i_K\leq N$, причем будем считать, что: 1) $\Omega_{i_K}=\Omega_{i_K}(x^{(i_K)*})$ $\forall x^{(i_K)*}\in\Omega^*_{i_K}$, 2) $a^{(K)}_{\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(N)}}(x)\equiv$

*) Предполагается, что производные $\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}\ldots\mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}$ у $u(x)$ существуют в соболевском смысле.

$$= \hat{a}^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x^{(i_K)})\tilde{a}^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x^{(i_K)*}).$$

Пусть $K \in \mathcal{A}$ и $\alpha^{(i_K)*} = (\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(i_K-1)},\alpha^{(i_K+1)},\dots,\alpha^{(N)})$ - набор мультииндексов с $|\alpha^{(i)}| = m_i^{(K)}$ $\forall i \neq i_K$. Пусть, далее, $\mathcal{R}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ - вещественное банахово пространство функций $v(x^{(i_K)})$, заданных на Ω_{i_K}, с конечной нормой

$$\|v\|_{\mathcal{R}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}} = |v|_{L_1(\delta_{i_K})} + \sum_{|\alpha^{(i_K)}| = m^{(K)}_{i_K}} \left(\int_{\Omega_{i_K}} \hat{a}^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x^{(i_K)}) |\mathcal{D}^{\alpha^{(i_K)}}_{x^{(i_K)}} v|^{q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}} dx^{(i_K)} \right)^{\frac{1}{q^{(K)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}}},$$

$\bar{\mathcal{R}}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ - замкнутое векторное подпространство в пространстве $\mathcal{R}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$, $\Psi^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ - вещественное банахово пространство, $\mathcal{B}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ - линейный непрерывный оператор, отображающий подпространство $\bar{\mathcal{R}}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ в пространство $\Psi^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$, $X^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}} = \ker \mathcal{B}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$, $S^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ - векторное пространство многочленов от аргумента $x^{(i_K)}$ из пространства $X^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$, степень которых $< m^{(K)}_{i_K}$ *). Предположим, что пространство $S^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ одно и то же для различных значений своего нижнего индекса, так что имеет смысл обозначить его просто через $S^{(K)}$.

Для $K \in \mathcal{A}$ через $\mathfrak{A}_K$ обозначим совокупность всех мультииндексов $\alpha^{(i_K)*} = (\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(i_K-1)},\alpha^{(i_K+1)},\dots,\alpha^{(N)})$ с $|\alpha^{(i)}| = m_i^{(K)}$ $\forall i \neq i_K$.

Пусть $\mathfrak{M}'$ - векторное пространство всех таких функций $u(x)$ из $\mathfrak{M}$ у которых $\forall K \in \mathcal{A}$, $\forall \alpha^{(i_K)*} \in \mathfrak{A}_K$ на Ω существует обобщенная в смысле С.Л.Соболева производная $\mathcal{D}^{\alpha^{(i_K)*}}_{x^{(i_K)*}} u(x)$, причем (после возможного изменения на множестве меры нуль в Ω) $\mathcal{D}^{\alpha^{(i_K)*}}_{x^{(i_K)*}} u(x) \in \bar{\mathcal{R}}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ $\forall x^{(i_K)*} \in \Omega^*_{i_K}$.

Через $\hat{\Psi}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ обозначим совокупность функций на $\Omega^*_{i_K}$ со значениями в пространстве $\Psi^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ $(\alpha^{(i_K)*} \in \mathfrak{A}_K,\ K \in \mathcal{A})$.

Рассмотрим векторное пространство $\Psi = \prod_{\alpha^{(i_K)*} \in \mathfrak{A}_K, K \in \mathcal{A}} \hat{\Psi}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}}$ и линейный оператор $\mathcal{B} : \mathfrak{M}' \longrightarrow \Psi$, действующий по формуле

$$\mathcal{B}u = \{\mathcal{B}^{(K)}_{\alpha^{(i_K)*}} \mathcal{D}^{\alpha^{(i_K)*}}_{x^{(i_K)*}} u\}_{\alpha^{(i_K)*} \in \mathfrak{A}_K, K \in \mathcal{A}} \quad \forall u \in \mathfrak{M}'.$$

Пусть $i, K \in \mathbb{N}$, $i \le N$, $K \le T$. Если $K \bar{\in} \mathcal{A}$ или если $K \in \mathcal{A}$ и $i \neq i_K$, то через $\hat{S}^{(i,K)}$ мы обозначим векторное пространство многочленов степени $< m_i^{(K)}$ по переменной $x^{(i)}$, а если $K \in \mathcal{A}$ и $i = i_K$, то $\hat{S}^{(i,K)} = S^{(K)}$. Предположим, что для любого фиксированного $i = 1,\dots,N$ в алгебраической сумме $\sum_{K=1}^{T} \hat{S}^{(i,K)}$ можно выбрать базис $\tau_i = \{\xi_i^{(1)}(x^{(i)}),\dots,\xi_i^{(d_i)}(x^{(i)})\}$ таким образом, что в каждом пространстве $\hat{S}^{(i,K)}$, $K = 1,\dots,T$, базисом служит часть базиса τ_i.

Пусть $\{\zeta_i^{(1)}(x^{(i)}),\dots,\zeta_i^{(d_i)}(x^{(i)})\}$ - семейство вещественных функций из $C^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, $supp\,\zeta_i^{(j)}(x^{(i)}) \subset \delta_i$ $\forall j = 1,\dots,d_i$, биортогональное базису τ_i в смысле скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^{n_i})$. Введем оператор

---

*) Если $m^{(K)}_{i_K} = 0$, то эта совокупность, по определению, состоит лишь из нулевого многочлена.

$\Pi^{(i,\kappa)}: L_1^{loc}(\Omega) \to L_1^{loc}(\Omega)\ \forall i=1,\dots,N,\ \forall \kappa=1,\dots,T$ по следующему правилу: если $\dim \hat{S}^{(i,\kappa)} = 0$, то $\Pi^{(i,\kappa)}$ - нулевой оператор, а если $\dim \hat{S}^{(i,\kappa)} = d_i^{(\kappa)} > 0$ и $\{\xi_i^{(j_1)}(x^{(i)}), \dots, \xi_i^{(j_{d_i^{(\kappa)}})}(x^{(i)})\}$ - базис в $\hat{S}^{(i,\kappa)}$, то оператор $\Pi^{(i,\kappa)}$ действует по формуле:

$$\Pi^{(i,\kappa)} u(x) = \sum_{\ell=1}^{d_i^{(\kappa)}} \left(\int_{\Omega_i} \xi_i^{(j_\ell)}(x^{(i)}) u(x) dx^{(i)} \right) \xi_i^{(j_\ell)}(x^{(i)}).$$

Введем также операторы

$$\Pi^{(\kappa)} = I - (I - \Pi^{(1,\kappa)})(I - \Pi^{(2,\kappa)}) \dots (I - \Pi^{(N,\kappa)}) \quad \forall \kappa = 1,\dots,T$$

и

$$\Pi = \Pi^{(1)} \Pi^{(2)} \dots \Pi^{(T)}.$$

Обозначим через $\hat{\mathfrak{M}}$ совокупность тех функций $u(x)$ из $\mathfrak{M}'$, у которых $\mathcal{B}u = 0$. Запишем для каждой функции $u(x) \in \hat{\mathfrak{M}}$ представление (см. формулу (2.3)):

$$u = \Pi u + Q\mathcal{P}u,$$

где $\mathcal{P} = \{\mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}}, \dots, \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}}\}_{|\alpha^{(i)}|=m_i^{(\kappa)};\ i=1,\dots,N;\ \kappa=1,\dots,T}$, а Q - интегральный оператор, который в явном виде выражается через интегральный оператор, участвующий в соболевском представлении функций через набор частных производных одного и того же порядка.

Легко проверяется, что $\Pi(\hat{\mathfrak{M}}) \subset \hat{\mathfrak{M}}$.

Предположим, что найдется вещественная измеримая на Ω функция $\mu(x)$ такая, что $\inf\limits_{x\in\omega} \mu(x) > 0$ для любого компакта $\omega \subset \Omega$ и $Q\mathcal{P}(\hat{\mathfrak{M}}) \subset \Sigma_\mu$, причем имеет место неравенство

$$\|Q\mathcal{P}u\|_{\Sigma_\mu} \le C\rho(u) \quad \forall u \in \hat{\mathfrak{M}},$$

где $C \in R$ и не зависит от $u \in \hat{\mathfrak{M}}$, а Σ_μ - банахово пространство вещественных функций $u(x)$, заданных на Ω, с конечной нормой

$$\|u\|_{\Sigma_\mu} = \|\mu u\|_{L_1(\Omega)} + \sum_{\kappa\in\mathcal{K}} \sum_{\alpha^{(i_\kappa)*} \in \mathfrak{A}_\kappa} \|\mu \mathcal{D}_{x^{(i_\kappa)*}}^{\alpha^{(i_\kappa)*}} u\|_{L_1(\Omega)}.$$

Можно доказать, что векторные пространства $\mathcal{R} = \mathfrak{M}' \cap \Sigma_\mu$ и $X = \hat{\mathfrak{M}} \cap \Sigma_\mu$ полны по норме $\|\cdot\|_{\Sigma_\mu} + \rho(\cdot)$, векторное пространство $X_0 = \hat{\mathfrak{M}} \cap \Sigma_\mu \cap \ker \Pi$ замкнуто в X по указанной норме, которая на X_0 эквивалентна полунорме ρ.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{R}$ функционал g, определенный с помощью равенства:

$$g(\cdot) = \sum_{\kappa=1}^{T} \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}| = m_i^{(\kappa)} \\ i=1,\dots,N}} \left(\int_\Omega a^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x) \left| \mathcal{D}_{x^{(1)}}^{\alpha^{(1)}} \dots \mathcal{D}_{x^{(N)}}^{\alpha^{(N)}} \right|^{q^{(\kappa)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}} dx \right) \quad (4.3)$$

Пусть $\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ и $f \in \mathcal{R}^*$, причем $\langle f,v\rangle = 0$ $\forall v \in X \cap \ker p$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 4.1. Существует единственная с точностью до подпространства $X \cap \ker p$ функция $u(x) \in \mathcal{R}$ такая, что

$$g(u) - \langle f,u\rangle = \inf_{v \in \mathcal{R}, \mathcal{B}v = \psi} (g(v) - \langle f,v\rangle).$$

П р и м е р 4.4. Пусть Ω - область в R^n, описанная в начале параграфа, а $\mathfrak{M}$ - пространство с полунормой p, введенное в начале примера 4.3. Пусть $\hat{\mathfrak{M}}$ - пространство функций, заданных на Ω, конечную полунорму $\hat{p}$, аналогичную полунорме p, но, вообще говоря, с другими T, $m_i^{(k)}$, $a^{(k)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}(x)$ и $\varphi^{(k)}_{\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(N)}}$. Построим для функций $u(x)$ из пространства $\hat{\mathfrak{M}}$ интегральное представление $u = \Pi u + Q\mathcal{P}u$, подобное тому, которое было построено в примере 4.3 (здесь $\mathcal{P}$ - набор операторов дифференцирования, входящих в полунорму $\hat{p}$, а $\Pi : \hat{\mathfrak{M}} \xrightarrow{\text{на}} \ker \mathcal{P}$ - проекционный оператор). Пусть, далее, Σ - гильбертово пространство, вложенное в пространство $\hat{\mathfrak{M}}$ и непрерывно вложенное в пространство $L_1^{loc}(\Omega)$, такое, что $Q\mathcal{P}(\Sigma) \subset \Sigma$ и имеет место неравенство $\|Q\mathcal{P}u\|_\Sigma \leq C\hat{p}(u)$ $\forall u \in \Sigma$, где $C \in R$ и не зависит от $u \in \Sigma$. Пусть Ψ - вещественное векторное пространство и $\mathcal{B} : \Sigma \longrightarrow \Psi$ - линейный оператор с замкнутым ядром $\hat{X}$. Пусть $\hat{X} \cap \ker \hat{p} \subset \ker p$. Положим $X = \hat{X} \cap \mathcal{R}$. Будем считать, что имеет место неравенство $\hat{p}(u) \leq C_1 p(u)$ $\forall u \in X$, где $C_1 \in R$ и не зависит от $u \in X$. Введем, наконец, пространство $\mathcal{R} = \mathfrak{M} \cap \Sigma$ и рассмотрим на $\mathcal{R}$ функционал (4.3). Пусть $\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ и $f \in \mathcal{R}^*$ ($\mathcal{R}$ считается нормированным пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{R}} = p(\cdot) + \|\cdot\|_\Sigma$), причем $\langle f,v\rangle = 0$ $\forall v \in X \cap \ker p$. Тогда имеет место утверждение теоремы 4.1.

Заметим, что размерность подпространства $X \cap \ker p$ в примерах 4.3 и 4.4 может быть как конечной, так и бесконечной.

Л и т е р а т у р а

1. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., изд-во ЛГУ им.Жданова, 1950, 251 с.
2. И л ь и н В.П. Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций из $W_p^{(l)}$. - "Сиб. мат. журн.", 1967, т.8, № 3, с.573-586.
3. Б е с о в О.В. Продолжение функций из $L_p^{(l)}$ в $W_p^{(l)}$. - "Труды Мат. ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР", 1967, т.89, с.5-17.
4. Р е ш е т н я к Ю.Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром. - "Сиб. мат. журн.", 1970, т.11, № 2, с.414-428.

5. Р е ш е т н я к Ю.Г. Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций. - "Сиб. мат. журн.", 1971, т.12, № 2, с.420-432.

6. П о р т н о в В.Р. О некоторых интегральных неравенствах. - В кн.: Теоремы вложения и их приложения. Баку, 1966. М., 1970, с.195-203.

7. П о р т н о в В.Р. Об одном проекционном операторе С.Л.Соболева. - "Докл. АН СССР", 1969, т.189, № 2, с.257-260.

8. П о р т н о в В.Р. Об интегральном представлении функций через обыкновенный дифференциальный оператор. - "Дифференц. уравнения", 1970, т.6, № 8, с.1424-1438.

9. Н и к о л ь с к и й С.М., Л и з о р к и н П.И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе. - "Докл. АН СССР", 1964, т.159, № 3, с.512-515.

10. Б е с о в О.В. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С.Л.Соболева. - "Мат. сб.", 1967, т.73, № 4, с.585-599.

11. К а з а р я н Г.Г. Об оценках производных через дифференциальные операторы. - "Сиб. мат. журн.", 1970, т.11, № 2, с.343-357.

12. У с п е н с к и й С.В. О дифференциальных свойствах решений квазиэллиптических уравнений в неограниченных областях. - "Докл. АН СССР", 1968, т.181, № 3, с.562-564.

13. У с п е н с к и й С.В., Ч и с т я к о в Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.

14. П о р т н о в В.Р. Проекционные операторы С.Л.Соболева для полунорм с бесконечномерными ядрами. - "Труды Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1976, т.140, с.252-263.