УДК 517.392

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

И.П.М ы с о в с к и х (Ленинград)

Пусть G - конечная подгруппа группы $O(n)$ ортогональных преобразований пространства R^n, оставляющих неподвижным начало координат $\theta = (0,0,\dots,0)$. Множество $\Omega \subset R^n$ называется инвариантным относительно преобразований группы G, если $g(\Omega) = \Omega$ для любого $g \in G$. Инвариантными относительно G множествами являются всё пространство R^n, шар

$$B_n \overset{def}{=} \{x \in R^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\},$$

сфера

$$S_{n-1} \overset{def}{=} \{x \in R^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Если G - группа преобразований правильного многогранника U с центром в θ в себя, то инвариантен и U.

Функция $\varphi(x)$, заданная в R^n, называется инвариантной относительно преобразований группы G, если $\varphi(gx) = \varphi(x)$ для любого $g \in G$. Пример инвариантной относительно G функции дает $\psi(r)$, где ψ - любая функция, заданная на $[0,+\infty)$ и $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Совокупность точек вида ga, где a - фиксированная точка R^n и g пробегает все элементы группы G, называется орбитой, или G-орбитой, содержащей точку a, и обозначается $G(a)$. Количество точек орбиты зависит от точки a.

Кубатурная формула

$$\int_\Omega p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}) \qquad (1)$$

называется инвариантной относительно G, если область интегрирования Ω и весовая функция $p(x)$ инвариантны относительно G и если совокупность ее узлов представляет собой объединение G-орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты.

Из сказанного выше ясно, что в качестве области интегрирования в инвариантной кубатурной формуле можно брать R^n, B_n, S_{n-1} , а в случае, когда G - группа преобразований правильного многогранника U с центром в θ в себя, в качестве Ω можно брать U .

Т е о р е м а 1. Чтобы инвариантная относительно G кубатурная формула была точна для всех многочленов степени не выше m , необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех многочленов степени не выше m , которые инвариантны относительно G .

Понятие инвариантной кубатурной формулы и теорема 1 принадлежат С.Л.Соболеву [1] . Теорема 1 имеет существенное значение при построении инвариантных кубатурных формул.

Известно [2] , что рассматриваемая конечная группа G имеет n алгебраически независимых инвариантных форм (однородных многочленов), при этом любой инвариантный многочлен выражается алгебраически через эти n форм. Когда названные n инвариантных форм имеют наименьшие возможные степени, их называют базисными инвариантными формами. Одной из базисных инвариантных форм является $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Якобиан любого множества базисных инвариантных форм не зависит от выбранных конкретных форм и является относительным инвариантом: преобразование группы G либо не изменяет его, либо изменяет его знак.

Преобразование $\tau\in O(n)$, отличное от тождественного преобразования e , называется отражением, если оно удовлетворяет равенству $\tau^2=e$ и оставляет неподвижной гиперплоскость. Если группа G порождена отражениями, то совокупность всех инвариантных относительно G многочленов просто выражается через базисные инвариантные формы.

Т е о р е м а 2. Пусть G - конечная подгруппа $O(n)$, порожденная отражениями. Тогда кольцо всех инвариантных относительно G многочленов порождается n базисными формами $I_1(x),\ldots,I_n(x)$ степеней $m_1,\ldots,m_n$ соответственно. Порядок группы G равен произведению $m_1 m_2\ldots m_n$.

Теорема 2 в более общей формулировке приведена в [3] . Теорема 2 утверждает, что любой инвариантный многочлен является многочленом от базисных инвариантных форм - линейной комбинацией с числовыми коэффициентами многочленов

$$I_1^{\alpha_1}(x)I_2^{\alpha_2}(x)\ldots I_n^{\alpha_n}(x), \tag{2}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - неотрицательные целые числа. Многочлены (2) линейно-независимы, так как линейная зависимость между ними означает алгебраическую зависимость между базисными инвариантными формами.

Будем теперь рассматривать инвариантные многочлены на поверхности сферы S_{n-1} . Для определенности будем считать, что $I_1(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Таким образом, $I_1(x)=1$ на S_{n-1}. По теореме 2, все инвариантные многочлены, рассматриваемые как функции на сфере S_{n-1}, являются линейными комбинациями многочленов

$$I_2^{\alpha_2}(x)\, I_3^{\alpha_3}(x)\ldots I_n^{\alpha_n}(x), \tag{3}$$

где $\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ - неотрицательные целые числа. Докажем, что сужения многочленов (3) как функций от x на S_{n-1} линейно-независимы. Нам понадобится следующая (см. [2])

Т е о р е м а 3. Якобиан базисных инвариантных форм группы G, которая является конечной подгруппой $O(n)$, порожденной отражениями, распадается в произведение $\sum_{i=1}^{n} m_i - n$ линейных форм, определяющих плоскости отражения.

Введем функции от $n-1$ переменных

$$\psi_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) = I_{i+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ i=1,2,\ldots,n-1, \tag{4}$$

где $x_n=\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}$, которые определены на $(n-1)$ -мерном шаре B_{n-1}: $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\leq 1$. Линейная независимость многочленов (3) на S_{n-1} равносильна линейной независимости функций

$$\psi_1^{\alpha_1}(x)\,\psi_2^{\alpha_2}(x)\ldots\psi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(x), \tag{5}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$ - неотрицательные целые числа, как функций на B_{n-1}.

Докажем линейную независимость функций (5) на B_{n-1}. Предположение о линейной зависимости функций (5) приводит к алгебраической зависимости между функциями (4) и, значит, к тождественному обращению в нуль якобиана

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}$$

на B_{n-1}. Но это невозможно ввиду равенства

$$\frac{D(I_1,I_2,\ldots,I_n)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = 2(-1)^{n+1}x_n\,\frac{D(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1})}{D(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})},$$

так как якобиан, по теореме 3, в левой части на S_{n-1} отличен от тождественного нуля, а тогда тем же свойством на B_{n-1} обладает и якобиан в правой части.

Т е о р е м а 4. Пусть G - конечная подгруппа $O(n)$, порожденная отражениями. Тогда размерность векторного пространства инвариантных относительно G многочленов степени K равна числу решений уравнения

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_n\alpha_n = K$$

в неотрицательных целых числах. Размерность векторного пространства функций - сужений инвариантных многочленов степени K на S_{n-1} равна числу решений уравнения

$$m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + \ldots + m_n\alpha_n = K \tag{6}$$

в неотрицательных целых числах. Здесь, как и ранее, m_i - степень базисной инвариантной формы $I_i(x)$.

Приведем примеры групп G , порожденных отражениями.

1. Гипероктаэдр W_n - это выпуклая оболочка точек

$$(\pm 1, 0, \ldots, 0),\ (0, \pm 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ (0, 0, \ldots, \pm 1),$$

называемых вершинами W_n . Рассмотрим группу $W_n G^*$ преобразований гипероктаэдра в себя, порожденную отражениями относительно гиперплоскостей $x_1 = x_2,\ x_2 = x_3, \ldots, x_{n-1} = x_n,\ x_n = 0$. Порядок группы равен $n!\,2^n$. Базисными инвариантными формами являются элементарные симметрические функции от $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ степеней $2, 4, \ldots, 2n$:

$$\sigma_2 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\quad \sigma_4 \overset{def}{=} \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2, \ldots, \sigma_{2n} \overset{def}{=} x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2.$$

2. Положим

$$a^{(s)} = (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \ldots, a_n^{(s)}),\quad s = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{7}$$

где

$$a_i^{(s)} \overset{def}{=} \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{n+1}{n(n-i+2)(n-i+1)}}, & i < s, \\ \sqrt{\dfrac{(n+1)(n-s+1)}{n(n-s+2)}}, & i = s, \\ 0, & i > s. \end{cases}$$

Правильный симплекс V_n - это выпуклая оболочка точек (7). Точки (7) называются вершинами V_n . Группу всех преобразований V_n в себя будем обозначать $V_n G$. Группа $V_n G$ изоморфна симметрической группе S_{n+1} (перестановок $n+1$ вершин V_n), и, следовательно, ее порядок равен $(n+1)!$ Она является группой, порожденной отражениями. Гиперплоскость, которая проходит через середину ребра, соединяющего две данные вершины V_n , и через остальные $n-1$ вершин, является гиперплоскостью отражения. Число всех гиперплоскостей отражения равно $(n+1)n/2$.

Обозначим

$$L_s(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(s)} x_i,\quad s = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Базисные инвариантные формы группы $V_n G$ таковы

$$\pi_\ell(x) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n+1} L_i^\ell(x),\qquad \ell = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{8}$$

3. Рассмотрим двенадцать точек в R^3 , расположенных на сфере S_2 :

$$(0, 0, \pm 1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\cos\frac{\pi}{5}2i,\ 2\sin\frac{\pi}{5}2i,\ 1\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\cos\frac{\pi}{5}(2i+1),\ 2\sin\frac{\pi}{5}(2i+1),\ -1\right),\quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Выпуклая оболочка этих точек называется икосаэдром $И$, а сами точки называются вершинами икосаэдра. Рассмотрим группу вращений икосаэдра, которую обозначим $ИG$. Порядок $ИG$ равен 60. Дополнив образующие группы $ИG$ центральным отражением относительно начала координат, придем к группе $ИG^*$, которая является группой, порожденной отражениями, и ее порядок равен 120. Плоскость отражения проходит через середины двух противоположных ребер и перпендикулярна этим ребрам. Число плоскостей отражения равно 15.

Приведем базисные инвариантные формы группы $ИG^*$:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} 5x_1^4 x_3^2 + 5x_2^4 x_3^2 + x_3^6 + 10x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 5x_1^2 x_3^4 -$$

$$- 5x_2^2 x_3^4 + 2x_1^5 x_3 + 10x_1 x_2^4 x_3 - 20x_1^3 x_2^2 x_3,$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} (4x_1^2 - 6x_1 x_3 + x_3^2) \times$$

$$\times (x_3^4 + 5x_2^4 + x_1^4 + 2x_1^3 x_3 - 2x_1 x_3^3 - 10x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_3^2 - 30x_1 x_2^2 x_3 - 25x_2^2 x_3^2) \times$$

$$\times (x_1^4 + 5x_2^4 + x_3^4 - 8x_1^3 x_3 + 8x_1 x_3^3 - 10x_1^2 x_2^2 + 14x_1^2 x_3^2 - 10x_2^2 x_3^2).$$

Обозначим через D якобиан базисных форм A, B, C. В силу теоремы 3 он меняет знак при отражении, поэтому D не инвариант группы $ИG^*$, но D^2 является инвариантом $ИG^*$ и выражается через базисные формы

$$D^2 = -1728B^5 + C^3 + 720ACB^3 - 80A^2C^2B + 64A^3(5B^2 - AC)^2. \qquad (9)$$

Якобиан D - инвариант группы $ИG$, которая не порождена отражениями, и не является многочленом от A, B, C, а выражается через них алгебраически, как это видно из (9).

Найдем размерность векторного пространства функций - сужений на S_{n-1} инвариантных относительно W_3G^* многочленов степени K, другими словами, найдем число линейно-независимых сферических гармоник порядка K, инвариантных относительно W_3G^*. Обозначим это число $S(K)$. По теореме 4, оно совпадает с числом решений уравнения (6) в неотрицательных целых числах. Уравнение (6) в случае группы W_3G^* записывается в виде

$$4\alpha_2 + 6\alpha_3 = K.$$

Ясно, что это уравнение может иметь требуемые решения лишь при K четном, поэтому $S(K) = 0$ при K нечетном. Нетрудно показать, что при K четном

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1+\left[\frac{\kappa}{4}\right]-\left[\frac{\kappa}{6}\right] & , \text{если } \kappa \equiv 0 \pmod 3, \\ \left[\frac{\kappa}{4}\right]-\left[\frac{\kappa}{6}\right] & , \text{если } \kappa \not\equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Число $\delta(\kappa)$ линейно-независимых гармоник порядка κ, инвариантных относительно группы $V_n G$, равно числу решений уравнения

$$3\alpha_2 + 4\alpha_3 = \kappa$$

в неотрицательных целых числах. Можно показать, что

$$\delta(\kappa) = \left[\frac{\kappa-4\ell}{12}\right] + 1,$$

где ℓ равно тому из чисел 0, 1, 2, которое удовлетворяет сравнению $\kappa \equiv \ell \pmod 3$.

Приведем еще формулу для числа $\delta(\kappa)$ линейно-независимых сферических гармоник порядка κ, инвариантных относительно группы $ИG^*$. Число $\delta(\kappa)$ равно числу решений уравнения $6\alpha_2+10\alpha_3 = \kappa$. Ясно, что $\delta(\kappa) = 0$ при κ нечетном. Если κ четное, то

$$\delta(\kappa) = \left[\frac{\kappa+10\ell}{30}\right],$$

где ℓ равно тому из чисел 1, 2, 3, которое удовлетворяет сравнению $\kappa \equiv 2\ell \pmod 3$.

Другие формулы для числа $\delta(\kappa)$ указал С.Л.Соболев [1].

Рассмотрим ℓ-мерную грань гипероктаэдра W_n, $0 \leq \ell \leq n-1$, которая определяется вершинами

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i,\ell+1}, 0, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, \ell+1,$$

и является выпуклой оболочкой этих точек. Центром грани является точка

$$(\overbrace{1/(\ell+1), 1/(\ell+1), \ldots, 1/(\ell+1)}^{\ell+1}, 0, 0, \ldots, 0), \tag{10}$$

у которой координаты равны среднему арифметическому координат рассматриваемых вершин. Центры остальных ℓ-мерных граней имеют координаты, которые получаются из координат (10) всевозможными перестановками и изменениями знаков. Число ℓ-мерных граней W_n равно $2^{\ell+1} C_n^{(\ell+1)}$ $(\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Проекции центров всех ℓ-мерных граней W_n (при фиксированном ℓ) из начала координат θ на сферу с центром в θ и радиусом $R > 0$ образуют $W_n G^*$-орбиту, и их можно брать в качестве узлов инвариантной кубатурной формулы.

Очевидно, центр каждой ℓ-мерной грани W_n при всех $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ лежит по крайней мере на одной из четырех гиперплоскостей $x_1 = x_2$, $x_1 = -x_2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, каждая из которых проходит через θ - центр W_n. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех прямых, проходящих через θ и центры всех ℓ-мерных граней W_n при $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ясно, что любая прямая из $\mathcal{L}$ содержится хоть в одной из указанных выше четырех гиперплоскостей. Отсюда следует, что многочлен восьмой степени $\mathcal{P}_8(x) \stackrel{def}{=}$ $\stackrel{def}{=} (x_1^2 - x_2^2) x_1^2 x_2^2$ обращается в нуль в точках любой прямой из $\mathcal{L}$.

Пусть в кубатурной формуле (1) весовая функция $p(x)$ неотрицательна в Ω и такова, что $\int_{\Omega} p(x)dx > 0$. Если в качестве узлов кубатурной формулы (1) взять точки, расположенные на прямых из $\mathcal{L}$, то ее алгебраическая степень точности не может быть более семи, так как для многочлена $\mathcal{P}_8(x)$ кубатурная формула не точна. С другой стороны, существует кубатурная формула для $\Omega = S_{n-1}$ и $p(x) = 1$, у которой узлами являются центры l-мерных граней W_n при $l = 0, 1, 2$ и алгебраическая степень точности которой равна семи [4]. Отсюда следует, что число гиперплоскостей, на которых лежат центры всех граней W_n , включая n-мерную грань W_n , равное четырем, является минимальным.

Можно показать, что центры всех l-мерных граней правильного симплекса V_n , $0 \le l \le n-1$, лежат в трех гиперплоскостях, проходящих через θ .

Отметим также, что вершины икосаэдра $И$, середины его ребер и центры двумерных граней лежат в шести плоскостях

$$x_3 = 0, \quad x_2 - x_1 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} j = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

проходящих через центр икосаэдра θ .

В рассмотренных нами случаях минимальное число гиперплоскостей, на которых лежат центры всех граней правильного многогранника, включая центр самого многогранника, совпадает с минимальной степенью базисной инвариантной формы, отличной от $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

Группу $V_n G$ дополним преобразованием центральной симметрии относительно начала координат. Это приведет к группе порядка $(n+1)!\,2$, которую будем обозначать $V_n G^*$. Инвариантные многочлены группы $V_n G^*$ содержатся среди инвариантных многочленов группы $V_n G$. Пусть $\mathcal{P}(x)$ - инвариантный многочлен группы $V_n G$. Чтобы он был инвариантным относительно $V_n G^*$, необходимо и достаточно, чтобы он не изменялся при центральной симметрии: $\mathcal{P}(-x) = \mathcal{P}(x)$. Отсюда следует, что множество многочленов, инвариантных относительно группы $V_n G^*$, совпадает с множеством четных многочленов, инвариантных относительно $V_n G$

Построим кубатурную формулу для вычисления интеграла по шару

$$I(f) \stackrel{def}{=} \int_{B_n} f(x)dx,$$

точную для всех многочленов не выше пятой степени, инвариантную относительно группы $V_n G^*$. Инвариантные относительно $V_n G^*$ многочлены не выше пятой степени таковы:

$$1,\ \pi_2(x),\ \pi_4(x),\ \pi_2^2(x), \tag{11}$$

где многочлены $\pi_k(x)$ определены формулами (8). В качестве узлов возьмем две орбиты

$$V_n G^*(\lambda a^{(1)}),\quad V_n G^*(\mu b^{(1)}),$$

где λ и μ - подлежащие определению параметры, $a^{(1)}=(1,0,\ldots,0)$ - вершина V_n и

$$b^{(1)}=\left(\sqrt{\frac{n-1}{2n}},\ \sqrt{\frac{n+1}{2n}},\ 0,\ldots,0\right)$$

- проекция на S_{n-1} середины ребра, соединяющего вершины $a^{(1)}$ и

$$a^{(2)}=\left(-\frac{1}{n},\ \frac{\sqrt{n^2-1}}{n},\ 0,\ldots,0\right).$$

Первая орбита состоит из точек $\pm\lambda a^{(j)}$, где $a^{(j)}$- вершины симплекса V_n, вторая орбита состоит из $\pm\mu b^{(j)}$, где $b^{(j)}$- проекции на S_{n-1} середин ребер V_n. Коэффициенты, отвечающие узлам первой и второй орбит, обозначим через A и B соответственно. Таким образом, кубатурную формулу будем искать в виде

$$I(f)\simeq A\sum_{i=1}^{n+1}\left[f(\lambda a^{(i)})+f(-\lambda a^{(i)})\right]+$$
$$+B\sum_{i=1}^{(n+1)n/2}\left[f(\mu b^{(i)})+f(-\mu b^{(i)})\right]. \tag{12}$$

Кубатурная сумма зависит от четырех параметров λ,μ,A,B, для определения которых мы имеем четыре условия: кубатурная формула должна быть точна для многочленов (11).

Нам понадобятся значения многочленов (11) в точках $\pm a^{(j)}$ и $\pm b^{(j)}$:

$$\pi_k(\pm a^{(j)})=(\pm 1)^k\left[1+(-1)^k/n^{k-1}\right],$$

$$\pi_k(\pm b^{(j)})=2(\pm 1)^k\left(\frac{n-1}{2n}\right)^{k/2}\left[1+(-1)^k 2^{k-1}/(n-1)^{k-1}\right].$$

Выпишем также значения интегралов по B_n от многочленов (11):

$$I(\pi_2)=\frac{n+1}{n+2}\,\mu(B_n),\quad I(\pi_2^2)=\frac{(n+1)^2}{n(n+4)}\,\mu(B_n),$$

$$I(\pi_4)=\frac{3(n+1)}{(n+2)(n+4)}\,\mu(B_n),$$

где

$$\mu(B_n)\ \stackrel{\mathrm{def}}{=}\ I(1)=2\pi^{n/2}/n\,\Gamma(n/2).$$

Запишем теперь, что кубатурная формула (12) точна для многочленов (11). Это приведет к системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&f=1:\ \mathcal{A}+\mathcal{B}=1;\\
&f=\pi_2:\ \mathcal{A}\lambda^2+\mathcal{B}\mu^2=\frac{n}{n+2};\\
&f=\pi_4:\ (n^2-n+1)\mathcal{A}\lambda^4+\frac{n(n^2-4n+7)}{2(n-1)}\mathcal{B}\mu^4=\frac{3n^3}{(n+2)(n+4)};\\
&f=\pi_2^2:\ \mathcal{A}\lambda^4+\mathcal{B}\mu^4=\frac{n}{n+4}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь для сокращения записи введены новые неизвестные $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A}\mu(B_n)=2(n+1)A,\quad \mathcal{B}\mu(B_n)=n(n+1)B. \tag{14}$$

Из двух последних уравнений системы (13) находим

$$\mathcal{A}\lambda^4=-\frac{n^2(n-7)}{(n+1)(n+2)(n+4)},\quad \mathcal{B}\mu^4=\frac{2n(n-1)^2}{(n+1)(n+2)(n+4)}. \tag{15}$$

Введем новые неизвестные u и v

$$u=\frac{1}{\lambda^2},\quad v=\frac{1}{\mu^2}. \tag{16}$$

Теперь с помощью равенств (15) первое и второе уравнения системы (13) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
-n^2(n-7)u^2+2n(n-1)^2v^2&=(n+1)(n+2)(n+4),\\
-n(n-7)u+2(n-1)^2v&=(n+1)(n+4).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для определения v

$$(n-1)^2(n+2)v^2-2(n-1)^2(n+4)v+(n+4)(n^2-5)=0.$$

Из квадратного уравнения и второго из равенств (17) получаем

$$
\begin{aligned}
u&=\frac{n+4}{n+2}\pm\frac{2(n-1)}{n(n+2)(7-n)}\sqrt{2(7-n)(n+4)},\\
v&=\frac{n+4}{n+2}\mp\frac{1}{(n-1)(n+2)}\sqrt{2(7-n)(n+4)}.
\end{aligned}
$$

Параметры u и v вещественны при $n\le 7$. При $n=7$ кубатурная формула не существует, так как в этом случае $u=v$ и, следовательно, все узлы лежат на сфере. Значения параметров λ и μ находим с помощью равенств (16), а значения коэффициентов A и B - с помощью (14), (15). При $n=5,6$ верхние знаки в значениях u и v приводят к узлам, принадлежащим B_n. Во всех остальных случаях среди узлов имеются не принадлежащие B_n.

Число узлов кубатурной формулы (12) при $n=4,5,6$ равно $(n+1)(n+2)$.

Это число превышает нижнюю границу на $2n$ (см. [5]). При $n=3$ середины ребер правильного симплекса образуют центрально симметричное относительно его центра множество, поэтому число узлов уменьшается до 14, что совпадает с нижней границей.

Литература

1. Соболев С.Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы. - "Сиб. мат. журн.", 1962, т.3, № 5, с.769-796.
2. Coxeter H.S.M. The product of the generators of a finite group generated by reflections. - "Duke Math. J.", 1951, v.18, № 4, p.765-782.
3. Chevalley Clande. Invariants of finite groups generated by reflections. - "Amer. J. Math.", 1955, v.77, № 4, p.778-782.
4. Мысовских И.П. О вычислении интегралов по поверхности сферы. - "Докл. АН СССР", 1977, т.235, № 2, с.269-272.
5. Мысовских И.П. К построению кубатурных формул. - В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1975, вып.32, с.85-98.