УДК 517.3

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

Л. К у ф н е р (Прага), Х. Т р и б е л (Йена)

1. Введение

Известное неравенство Харди

$$\int_0^\infty t^{\alpha-p}|u(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{|\alpha-p+1|}\right)^p \int_0^\infty t^\alpha |u'(t)|^p dt, \tag{1}$$

где $1<p<\infty$ и $\alpha \neq p-1$ (см. [1, теорема 330], или [2, гл. У, §5]), является полезным средством при доказательстве теорем вложения типа

$$W^1_{p,\alpha}(G) \longrightarrow L_{p,\alpha-p}(G)$$

для весовых пространств С.Л.Соболева с весовыми функциями типа $\rho^\beta(x)$, где $\rho(x)$ - расстояние точки $x\in G$ до границы ∂G области G. При доказательстве теорем вложения для весовых классов с более общими весовыми функциями типа $\sigma(\rho(x))$ используется обобщенное неравенство Харди типа

$$\int_0^\infty \sigma_0(t)|u(t)|^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty \sigma_1(t)|u'(t)|^p dt, \tag{2}$$

где σ_0, σ_1 - некоторые функции (см. ниже формулы (13) или (14), а также [3, 4, 5, 6]).

Неравенство Харди можно обобщить также в другом направлении, используя дробные производные функции $u(t)$. Так, например, в [7] доказано, что для всех $u\in C_0^\infty(0,\infty)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty t^{-\theta p}|u(t)|^p dt \leq c \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\, dt d\tau \tag{3}$$

с некоторой постоянной $c>0$ для $1<p<\infty$, $0<\theta<1$, $\theta\neq\frac{1}{p}$ (см. также [8] или [9]).

Целью этой статьи является обобщение неравенств типа (3) для более общих весовых функций на основе интерполяционных теорем для весовых пространств.

2. Основные определения

Пусть $\sigma(t) > 0$ - непрерывная функция, определенная для $t \in (0, \infty)$. Здесь будем рассматривать два типа таких функций:

Тип А: Функция $\sigma(t)$ монотонно убывает на некотором отрезке $(0, \varepsilon)$ с $\varepsilon > 0$, и существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sigma(t) \leq C \min_{|t-\tau| \leq 1} \sigma(\tau) \tag{4}$$

для $2 < t < \infty$.

В этом случае мы будем работать с пространством $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\sigma}$, $1 < p < \infty$, определенным как замыкание пространства $C_0^\infty(0, \infty)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций по норме

$$\|u\|_{W^1_{p,\sigma}} = \left(\int_0^\infty \sigma(t) \left[|u(t)|^p + |u'(t)|^p \right] dt \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

и с пространством $L_{p,\sigma}$ функций, для которых норма

$$\|u\|_{L_{p,\sigma}} = \left(\int_0^\infty \sigma(t) |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

конечна.

С помощью метода вещественной интерполяции (см., например, [9]) можно определить дробное весовое пространство типа Соболева-Слободецкого:

$$\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{p,\sigma} = \left(L_{p,\sigma} ; \overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\sigma} \right)_{\theta,p}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{7}$$

с нормой

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{p,\sigma}} = \left\{ \iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t) - u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}} \sigma(\tau) dt d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty |u(t)|^p \sigma(t) \max(1, t^{-\theta p}) dt \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{8}$$

($\delta > 0$ произвольное, нормы для разных δ эквивалентны).

Тип B. Функция $\sigma(t)$ монотонно возрастает на некотором отрезке $(0, \varepsilon)$, и имеет место оценка (4).

В этом случае мы будем работать с пространством $W_{p,\sigma}$, $1 < p < \infty$, определенным как замыкание по норме (5) пространства $C^\infty[0, \infty)$ бесконечно дифференцируемых функций $u(t)$ на $[0, \infty)$ таких, что $\operatorname{supp} u \subset [0, \infty)$. Дробное весовое пространство определяется опять методом вещественной интерполяции:

$$W^{\theta}_{p,\sigma} = (L_{p,\sigma} ; W^{1}_{p,\sigma})_{\theta,p} , \quad 0<\theta<1, \tag{9}$$

с нормой

$$\|u\|_{W^{\theta}_{p,\sigma}} = \left\{ \iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t) - u(\tau)|^{p}}{|t-\tau|^{1+\theta p}} \sigma(t)\,dt\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{0}^{\infty} |u(t)|^{p} \sigma(t)\,dt \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

(см. [9]).

3. Основные идеи и результаты

Пусть $\lambda(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, определенная на $(0,\infty)$ и такая, что

$$\lambda'(t) > 0 \quad \text{для } t>0, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t) = -\infty , \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty . \tag{12}$$

Тогда обобщенное неравенство Харди (2) имеет место для следующих пар весовых функций:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= e^{(1-p)\lambda(t)} [\lambda'(t)]^{1-p} , \\ \sigma_0(t) &= e^{(1-p)\lambda(t)} \lambda'(t). \end{aligned} \tag{13}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= e^{(p-1)\lambda(t)} [\lambda'(t)]^{1-p} , \\ \sigma_0(t) &= e^{(p-1)\lambda(t)} \lambda'(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Будем рассматривать случай (13) и предположим, что функция σ_1 является σ -функцией типа А. Неравенство (2) тогда можно писать в виде

$$\|u\|_{L_{p,\sigma_0}} \le c\|u\|_{W^{1}_{p,\sigma_1}} , \tag{15}$$

добавляя в правой части (2) слагаемое $\|u\|_{L_{p,\sigma_1}}$. Оценка (15) имеет место для $u \in C_0^{\infty}(0,\infty)$; переходя к замыканию, получаем вложение

$$\overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\sigma_1} \longrightarrow L_{p,\sigma_0} . \tag{16}$$

Так как одновременно $L_{p,\sigma_1} \longrightarrow L_{p,\sigma_1}$, то с помощью теории интерполяции получаем вложение

$$(L_{p,\sigma_1} ; \overset{\circ}{W}{}^{1}_{p,\sigma_1})_{\theta,p} \longrightarrow (L_{p,\sigma_0} ; L_{p,\sigma_1})_{\theta,p}$$

или

$$\overset{\circ}{W}{}^{\theta}_{p,\sigma_1} \longrightarrow L_{p,\sigma_{1-\theta}} , \tag{17}$$

где

$$\sigma_{1-\theta}(t) = \sigma_1^{1-\theta}(t)\sigma_0^{\theta}(t) \tag{18}$$

(см., например, [9]).

Вложение (17) представляет уже некоторое обобщение неравенства Харди типа (3), но отличается присутствием самой функции u (с некоторым весом) в правой части соответствующего неравенства. Рассмотрим поэтому роль слагаемого $\|u\|_{L_{p,\sigma_1}}$ в правой части неравенства (15). Ясно, что оценка (15) и оценка, вытекающая из вложения (17), играют роль только в окрестности точек $t=0$ и $t=\infty$. Если в окрестности этих точек имеет место оценка $\sigma_0(t) \le c\sigma_1(t)$, то получается тривиальное утверждение. Поэтому, казалось бы, целесообразно ограничиться только такими весовыми функциями σ_0 и σ_1, для которых в окрестности точек $t=0$ и $t=\infty$ верно $\sigma_0(t) \ge c\sigma_1(t)$. Это значит, что

$$\lambda'(t) \ge c > 0 \tag{19}$$

для $0 < t < \infty$.

Очевидно, что многие весовые функции типа (13) удовлетворяют условию (19), но, с другой стороны, имеются примеры весовых функций (в том числе и весовых функций типа t^{β}, выступающих в "классическом" неравенстве Харди (1)), для которых (19) верно только в окрестности точки $t=0$.

Поэтому будет целесообразным предположить, что (19) имеет место для малых значений t, и (во избежание трудностей, связанных с точкой $t=\infty$) ограничиться случаем таких функций u, для которых $\operatorname{supp} u \subset [0,1]$ (ясно, что вместо 1 можно поставить любое положительное число).

Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести и для таких функций λ, для которых соответствующая функция σ_1 из формулы (14) является функцией типа B.

3.1. Т е о р е м а. Пусть функция λ удовлетворяет условиям (11) и (12); пусть

$$\lambda'(t) > c > 0 \tag{20}$$

для $t \in (0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ и пусть $e^{\lambda(t)}$ является выпуклой в $(0,\varepsilon)$. Пусть σ_1 определяется через (13) и выполняется

$$\sigma_\theta(t) = e^{(1-p)\lambda(t)}\left[\lambda'(t)\right]^{1-\theta p}, \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{21}$$

Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для всех непрерывно дифференцируемых функций u таких, что $\operatorname{supp} u \subset (0,1)$, имеет место оценка

$$\int_0^\infty \sigma_{1-\theta}(t)|u(t)|^p\,dt \le$$

$$\leq C\left(\iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta_p}}\sigma_1(\tau)\,dt\,d\tau + \int\limits_0^\infty \frac{\sigma_1(t)}{t^{\theta p}}|u(t)|^p dt\right) \tag{22}$$

с $0<\theta<1$ и $\delta>0$; C зависит от θ и δ.

Если дополнительно предположить $\frac{1}{\lambda'(t)}=\sigma(t)$, то неравенство (22) можно усилить:

$$\int\limits_0^\infty \sigma_{1-\theta}(t)|u(t)|^p dt \leq$$

$$\leq C\iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\sigma_1(\tau)\,dt\,d\tau. \tag{23}$$

Доказательство. Во-первых, надо показать, что функция σ_1 монотонно убывает на отрезке $(0,\varepsilon)$. Но так как из (13) или из (21) следует, что $\sigma_1(t)=\left[e^{\lambda(t)}\lambda'(t)\right]^{1-p}$, то это равносильно тому, что функция $e^{\lambda(t)}\lambda'(t)=\left(e^{\lambda(t)}\right)'$ монотонно возрастает, что обеспечивается выпуклостью функции $e^{\lambda(t)}$. Можно тоже предполагать, что выполнено условие (4) (оно, вообще говоря, неинтересно, так как мы ограничились функциями u с носителем в $(0,1)$), и поэтому $\sigma_1(t)$ - функция типа А. Значит, имеет место вложение (17), и неравенство (22) является следствием формул (8) и (18).

Если дополнительно $\frac{1}{\lambda'(t)}=\sigma(t)$, то

$$\sigma_1(t)\cdot t^{-\theta p}=_{\cdot}\sigma(\sigma_{1-\theta}(t)).$$

Из (22) следует

$$\int\limits_0^\infty \sigma_{1-\theta}(t)|u(t)|^p dt \leq$$

$$\leq C\iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\sigma_1(\tau)\,dt\,d\tau + \tilde{C}\int\limits_{\eta}^{2}|u(t)|^p dt \tag{24}$$

с некоторым $\eta>0$. Так как оператор вложения $W_p^\theta(\eta,2)\to L_p(\eta,2)$ является вполне непрерывным, то

$$\int\limits_\eta^1 |u(t)|^p dt \leq c\iint\limits_{\eta<t<\tau<2} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\,dt\,d\tau \tag{25}$$

(доказательство этого утверждения приведем в конце статьи) и неравенство (23) является теперь следствием формул (24) и (25).

В теореме 3.2 рассмотрен случай, соответствующий σ-функциям типа B.

3.2. Т е о р е м а. Пусть функция λ удовлетворяет условиям (11), (12) и (20) и пусть $e^{-\lambda(t)}$ является выпуклой в $(0,\varepsilon)$. Пусть σ_1 определяется через (14) и выполняется

$$\sigma_\theta(t) = e^{(p-1)\lambda(t)}\left[\lambda'(t)\right]^{1-\theta p}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{26}$$

Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что для всех непрерывно дифференцируемых функций u таких, что $\operatorname{supp} u \subset [0,1]$, имеет место оценка

$$\int_0^\infty \sigma_{1-\theta}(t)|u(t)|^p dt \leq$$

$$\leq C\left(\iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\sigma_1(t)dt d\tau + \int_0^\infty \sigma_1(t)|u(t)|^p dt\right) \tag{27}$$

с $0<\theta<1$, $\delta>0$; C зависит от θ и δ.

Если дополнительно $\lambda'(t) \to \infty$ для $t \to 0$, то неравенство (27) можно усилить:

$$\int_0^\infty \sigma_{1-\theta}(t)|u(t)|^p dt \leq$$

$$\leq C\iint\limits_{0<t<\tau<t+\delta} \frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\sigma_1(t)dt \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, надо показать, что функция σ_1 монотонно возрастает на отрезке $(0,\varepsilon)$, но это следует из выпуклости функции $e^{-\lambda(t)}$, так как $\sigma_1(t) = \left[e^{-\lambda(t)}\lambda'(t)\right]^{1-p}$. Поэтому $\sigma_1(t)$ - функция типа B, и (27) следует из формул (10) и (18).

Если дополнительно $\frac{1}{\lambda'(t)} = o(1)$, то $\sigma_1(t) = o\left(\sigma_{1-\theta}(t)\right)$ и (28) следует из (27) аналогично, как при доказательстве теоремы 3.1.

4. Замечание

Недостатком вышеупомянутого метода является то, что нужно было исходить из неравенства (15) вместо неравенства (2). Вследствие этого мы ограничились в наших рассуждениях функциями u с носителем в отрезке $[0,1]$, получили оценки (22) и (27) и при дополнительных условиях лучшие оценки (23) и (28). Возникает вопрос, можно ли найти дополнительные условия на λ, которые бы гарантировали выполнение оценок (23) и (28) для непрерывно дифференцируемых функций u с носителем в $[0,\infty)$ (или в $(0,\infty)$ для σ-функций типа A)?

Опишем здесь коротко один метод. Пусть $\sigma_\theta(t)$ - функция из (21) или (26), и предположим, что существует положительная функция $k(c)$ на $(0,1)$

такая, что

$$\sup_{t>0}\frac{\sigma_{1-\theta}(t)}{\sigma_{1-\theta}(ct)} \leq k(c) \leq \inf_{t>0}\frac{\sigma_1(t)}{\sigma_1(ct)}\, c^{\theta p} \tag{29}$$

(это некоторое условие слабой однородности; оно выполнено, например, для "классических" весовых функций из неравенства (1), где $\sigma_1(t)=t^{\alpha}$, $\sigma_{1-\theta}(t)=const\cdot t^{\alpha-\theta p}$). Далее предположим, что (23) или (28) имеют место тоже для $\delta=\infty$ (из теории интерполяции, см., например, [9], следует, что это предположение выполняется, если σ_1 будет монотонно убывать или возрастать не только в окрестности точки $t=0$, но и на всей полупрямой $(0,\infty)$). Если теперь u - допустимая функция, описанная выше, то для функции $u\left(\frac{t}{c}\right)$ с некоторым c, $0<c<1$, имеют место оценки (23) или (28). Заменой координат получим, что эти неравенства справедливы также и для исходной функции u.

5. Доказательство неравенства (25)

Докажем следующее утверждение: Пусть $1<p<\infty$, $0<\theta<1$, $0<\eta<1$. Тогда существует положительная постоянная C такая, что для всех $u\in W_{p_1}^{\theta}(\eta,2)$ таких, что $supp\, u\subset[\eta,1]$, имеет место оценка

$$\int_{\eta}^{1}|u(t)|^p dt \leq c\iint\limits_{\eta<t<\tau<2}\frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\,dt\,d\tau. \tag{30}$$

Предположим, что такое число C не существует. Тогда можно найти последовательность функций $u_j\in W_p^{\theta}(\eta,2)$, $supp\, u\subset[\eta,1]$ таких, что

$$1=\int_{\eta}^{2}|u_j(t)|^p dt > j\iint\limits_{\eta<t<\tau<2}\frac{|u_j(t)-u_j(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\,dt\,d\tau \tag{31}$$

для $j=1,2,\dots$. Множество $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ограничено в пространстве $W_p^{\theta}(\eta,2)$ и поэтому компактно в пространстве $L_p(\eta,2)$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\tilde{u}_j\}_{j=1}^{\infty}$, сходящаяся в пространстве $L_p(\eta,2)$ к некоторой функции u, для которой имеет место

$$\|u\|_{L_p(\eta,2)}=1,\quad supp\, u\subset[\eta,1]. \tag{32}$$

Но из (31) вытекает, что $\tilde{u}_j$ сходится к u также в пространстве $W_p^{\theta}(\eta,2)$. Из (31) далее следует, что

$$\iint\limits_{\eta<t<\tau<2}\frac{|u(t)-u(\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\theta p}}\,dt\,d\tau=0.$$

Так как $u(\tau)=0$ для $1<\tau<2$, то $u(t)=0$ почти всюду. Но это противоречит первому условию в (32).

Литература

1. Харди Г.Г. и др. Неравенства. М., Издво иностр. лит., 1948, 456 с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 808 с.
3. Портнов В.Р. Две теоремы вложения для пространства $L^{(1)}_{p,b}(\Omega\times R_+)$. и их применения. - "Докл. АН СССР", 1964, т.155, № 4, с.761-764.
4. Сысоева Ф.А. Обобщения одного неравенства Харди. - "Изв. вузов. Математика", 1965, № 6, с.140-143.
5. Kufner A. Imbedding theoreme for general Sobolev weight spaces. - "Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa", 1969, v.23, f.2, p.373-386.
6. Седов В.Н. Весовые пространства. Теорема вложения. - "Дифференц. уравнения", 1972, т.8, № 8, с.1452-1462.
7. Grisvard P. Espaces intermediaires entre espaces de Sobolev avec poids. - "Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa", 1963, v.17, f.3, p.255-296.
8. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир", 1971, т.1, 371 с.
9. Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Berlin, 1977.