УДК 517.948

О ВЫХОДЕ НА ПОЛИНОМ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ $|x| \to \infty$ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Б.Н.Ч и с т я к о в (Новосибирск)

В работе [1, 2] было доказано, что при условии $n > \ell p$ всякую функцию f, принадлежащую соболевскому пространству $L_p^\ell(E_n)$, можно так видоизменить на множестве меры нуль, что при стремлении точки x к бесконечности вдоль радиуса-вектора из начала координат функция f будет стремиться к одной и той же постоянной.

Полученные в работах [1, 2] результаты обобщались на случай анизотропных классов функций, а также весовых классов (см. [3-9]). Были рассмотрены также другие постановки этой задачи.

Так, Л.Д.Кудрявцев [8] поставил вопрос о поведении классов дифференцируемых функций при стремлении аргумента к бесконечности в направлении некоторой координатной оси. В.Р.Портнов [10] дал следующий ответ на поставленный вопрос: при условии $\nu + \frac{n}{p} > 1$, $\nu \geqslant 0$, всякую функцию f, принадлежащую пространству $L_{p,\nu}^{(1)}(E_n)$, $n > 1$, $p > 1$, можно так видоизменить на множестве меры нуль, что при стремлении аргумента к бесконечности в направлении любой координатной оси f будет стремиться к одной и той же постоянной.

Независимо этот результат для случая $\nu = 0$ был получен Ферерманом [11] . Поставленный в [8] вопрос изучался и другими авторами (см., например, [12]). Другая постановка этой задачи была рассмотрена в работе [13] , где изучалось поведение решений псевдодифференциального уравнения

$$\int_{E_n} e^{ix\xi} p(i\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi = f(x)$$

на бесконечности. В предположении, что символ $p(i\xi)\neq 0$ при $|\xi|\neq 0$, $\xi\in E_n$ и однороден, установлены условия, когда решение выходит на полином по любым кривым, уходящим в бесконечность.

Из результатов, полученных в работе [13], как следствие получаются условия для выхода на полином при стремлении к бесконечности для классов L_p^{ℓ}, $L_{p,\alpha}^{\ell}$ с лиувиллевскими производными (см. [14]).

В настоящей работе рассматривается поведение на бесконечности решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами гипоэллиптического типа

$$L(x,D)u=\sum_{\beta\alpha=1} a_\beta(x)D^\beta u=f(x), \tag{1}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i=\frac{1}{\ell_i}$, ℓ_i – натуральные числа; предполагается, что характеристический многочлен оператора $L(x,i\xi)$ удовлетворяет условию

$$|L(x,i\xi)|\geq c\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{\ell_j} \tag{2}$$

для всех $x,\xi\in E_n$.

Будем считать, что коэффициенты $a_\beta(x)$ оператора L удовлетворяют следующим условиям:

1) для любого β, $\beta\alpha=1$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$,

$$a_\beta(x)\in C^{\ell}(E_n), \tag{3}$$

где ℓ – порядок оператора L;

2) для любого $N>0$ и β, удовлетворяющего условию $\beta\alpha=1$, где

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ \alpha_j=\frac{1}{\ell_j},$$

$$\lim_{|x|\to\infty} (1+|x|)^N |D^\rho D_{x_j} a_\beta(x)| = 0, \qquad (4)$$

$$0 \le \rho\alpha \le 1, \qquad 1 \le j \le n.$$

В предположениях (2)-(4) устанавливаются условия, при которых решение (1) стремится к полиному почти по всем направлениям, параллельным координатным осям. Получены также условия, когда решение выходит на полином по любым кривым, уходящим в бесконечность.

Полученные результаты обобщают соответствующие условия для уравнений с постоянными коэффициентами (см. [13]).

Введем определения:

$$M_\sigma[f] = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j} \int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_n} f(t+u)\,du,$$

$$M'_\sigma[f] = \prod_{\substack{j=1\\(j\ne m)}}^{n} \frac{1}{\sigma_j} \underbrace{\int_0^{\sigma_1} \cdots \int_0^{\sigma_n}}_{n-1} f(t+u')\,du',$$

$$u' = (u_1, \dots, u_{m-1}, u_{m+1}, \dots, u_n),$$

$$|f, C_\varepsilon| = \sup_{|\sigma|>0,\, x\in E_n} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|^{\varepsilon_i} |M_\sigma[f]|, \quad 0 \le \varepsilon_i \le 1,$$

$$|x_m^{\mu_m} f, C_\varepsilon| = \sup_{|\sigma|>0,\, x\in E_n} (1+|x_m|)^{\mu_m} \prod_{\substack{j=1\\(j\ne m)}}^{n} |\sigma_j|^{\varepsilon_j} |M'_\sigma[f]|, \quad 0 \le \varepsilon_j \le 1,$$

$$\| f, L_{p,\beta}(E_n) \| = \| (1+|x|)^{\beta/p} f, L_p \|, \quad 1<p<\infty, \quad \beta \geq 0,$$

$$(f,\varphi) = \int_{E_n} f(x)\overline{\varphi(x)}dx ,$$

$$S_N = \left\{ \varphi : \ \varphi \in C^{\ell}(E_n), \ \sup_{x \in E_n} |D^{\rho}\varphi| (1+|x|)^{N+n} < \infty, 0 \leq |\rho| \leq \ell \right\}.$$

Определение 1. Будем говорить, что $\varphi \in S'_{N,s}$, если для почти всех $x \in E_n$

$$|\varphi(x)|(1+|x|)^{-N} \leq K_0(x), \ K_0(x) \in L_s(E_n), \ 1 < s < \infty .$$

Определение 2. Функция $U(x) \in S'_{N,s}$ называется обобщенным решением уравнения (1), если для любой функции $\varphi \in S_N$ имеет место $(U, L^*\varphi) = (f, \varphi)$, где L^* – формально сопряженный к L оператор.

Введем следующие обозначения:

$$G_0(x) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{4m}}{4m\,\alpha_j}\right),$$

m – достаточно большое положительное число;

$$G_1(x) = G_0(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^{4m} ,$$

$$G(t,x) = (2\pi)^{-n} \int G_1(\xi) L^{-1}(t, i\xi) e^{-ix\xi} d\xi,$$

$$G_{\beta\tau\gamma}(t,x) = (-1)^{|\beta|+|\gamma|+1} \cdot (2\pi)^{-n} \int G_1(\xi)(i\xi) D_t^{\gamma} {}^{\tau}\left(\frac{a_\beta(t)}{L(t,i\xi)}\right) e^{-ix\xi} d\xi,$$

$$f_h(x) = \frac{h^{-|\alpha|}}{(2\pi)^n} \int \hat{G}_0\left(\frac{t-x}{h^\alpha}\right) f(t) dt.$$

Здесь и всюду далее интегралы по E_n мы записываем без указания области интегрирования.

Ниже мы докажем несколько вспомогательных результатов.

Л е м м а 1. Пусть $U \in S'_{N,s}$ – обобщенное решение уравнения (1). Тогда для почти всех $x \in E_n$

$$U_{h_1}(x) = U_{h_2}(x) + \int_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\alpha|} \int f(t) G\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) dt d\sigma +$$

$$+ \sum_{\beta\alpha=1} \sum_{\substack{\tau+\gamma=\beta \\ \gamma\alpha<1}} C_{\beta\tau} \int_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) U(t) dt d\sigma. \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем, следуя схеме доказательства леммы 1 работы [16]. По лемме 7 работы [17], для почти всех

$x \in E_n$

$$U_{h_1}(x) = U_{h_2}(x) + \int_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\alpha|-1} \int U(t)\hat{G}_1\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) dt\, d\sigma. \qquad (6)$$

Положим

$$\varphi(t) = \int G_1(\xi)\overline{L^{-1}(t, i\xi)} e^{i\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} d\xi.$$

В силу условий (2)-(4), при достаточно большом m функция $\varphi \in S_N$, и тогда утверждение леммы вытекает из (6) и из равенства

$$\overline{L^*(t,D)\varphi(t)} = \overline{\sum_{\beta\alpha=1} (-1)^{|\beta|} D^{\beta}(\bar{a}_{\beta}(t)\varphi(t))} = \sigma^{-1}\hat{G}_1\left(\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) -$$

$$- \sum_{\beta\alpha=1} \sum_{\substack{\tau+\gamma=\beta \\ \gamma\alpha<1}}{}' C_{\beta\tau}\, \sigma^{-\gamma\alpha} G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть $U \in S'_{N,s}$ - обобщенное решение уравнения (1), $\| f, C_{\varepsilon}(E_n)\| < \infty$, $\varepsilon\alpha > 1$, $|\alpha| > 1$. Тогда существует полином $P_m(x) = \sum_{|\kappa| \le m} c_{\kappa} x^{\kappa}$, линейно зависящий от U и такой, что для почти всех $x \in E_n$

$$U(x) = P_m(x) + \lim_{h\to 0}\left(J_h^{(1)}(x) + J_h^{(2)}(x)\right), \qquad (7)$$

где

$$J_h^{(1)}(x) = \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|} \int f(t) G\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) dt\, d\sigma,$$

$$J_h^{(2)}(x) = \sum_{\beta\alpha=1} \sum_{\substack{\tau+\gamma=\beta \\ \gamma\alpha<1}} c_{\beta\tau} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int U(t) G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) dt\, d\sigma.$$

Доказательство. В силу условий (2)-(4), нетрудно показать, что для любых заданных κ и ω имеют место оценки

$$\left|D_x^\rho D_t^\ell G\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)\right| \leqslant C\sigma^{-\rho\alpha} \sum_{\tau\leqslant\ell} \sigma^{-\tau\alpha}(1+|t|)^{-\omega|\ell-\tau|} \cdot \left(1+\left|\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right|\right)^{-\kappa}, \quad (8)$$

$$\left|D_x^\rho D_t^\ell G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)\right| \leqslant C\sigma^{-\rho\alpha} \sum_{\tau\leqslant\ell} \sigma^{-\tau\alpha}(1+|t|)^{-\omega} \left(1+\left|\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right|\right)^{-\kappa}. \quad (9)$$

В силу леммы 1, полагая $1<h_1<h_2$, для любого ρ имеем

$$|D^\rho U_{h_1}(x) - D^\rho U_{h_2}(x)| \leqslant \left| \int_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\alpha|} \int f(t) D_x^\rho G\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) dt\, d\sigma \right| +$$

$$+ \sum_{\beta\alpha=1} \sum_{\substack{\tau+\gamma=\beta \\ \gamma\alpha<1}} \left| \int_{h_1}^{h_2} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int U(t) D_x^\rho G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right) dt\, d\sigma \right| \leqslant$$

(учитывая оценки (8) и (9), получаем)

$$\leq c\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-|\alpha|}d\sigma\left(\|f,C_\varepsilon\|+\|u(1+|t|)^{-N},L_s(E_n)\|\right)+$$

$$+c\int_{h_1}^{h_2}\sigma^{-\varepsilon\alpha}d\sigma\cdot\|f,C_\varepsilon\|\leq c\left(h_1^{-\tau}+h_2^{-\tau}\right)\left(\|f,C_\varepsilon\|+\|u(1+|t|)^{-N},L_s(E_n)\|\right),$$

где $\tau=\min\{\varepsilon\alpha-1,\ |\alpha|-1\}$.

Тем самым для всех $x\in E_n$ установлена оценка

$$|D^\rho U_{h_1}(x)-D^\rho U_{h_2}(x)|\leq c\left(h_1^{-\tau}+h_2^{-\tau}\right)\left(\|f,C_\varepsilon\|+\|U(1+|t|)^{-N},L_s(E_n)\|\right),\tag{10}$$

где $\tau>0$.

Положим

$$c_\kappa=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{\kappa!}D^\kappa U_h(0).\tag{11}$$

В силу оценки (10), эти пределы существуют, а из леммы 3 работы [13] следует, что при достаточно большом $|\kappa|$ имеет место $C_\kappa=0$.

Применяя формулу Тейлора к функции $U_h(x)$ и переходя к пределу при $h\to\infty$, получаем $\lim_{h\to\infty}U_h(x)=P_m(x)$ равномерно на любом компакте из E_n, где $P_m(x)$ - полином.

Для завершения доказательства достаточно положить в (5) $h_1=h$, $h_2=h^{-1}$, воспользоваться леммой 5 работы [17] и перейти к пределу при $h\to 0$.

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть $\|f,L_p(E_n)\|<\infty$, $1<p<\infty$, $p<q<\infty$ и $p\alpha+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\alpha|=1$. Тогда имеет место оценка

$$\| D^{\rho} \mathcal{J}_h^{(1)}, L_q(E_n) \| \leq c \| f, L_p(E_n) \| . \tag{12}$$

Доказательство.

$$|D^{\rho} \mathcal{J}_h^{(1)}(x)| \leq c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{h}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-\rho\alpha} dv \times \int \left| D_z^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)| dE_{n-1} dt_k \leq$$

(здесь обозначено $z = \dfrac{t-x}{v^{\alpha}}$)

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty} v^{-|\alpha|-\rho\alpha} dv \times \int \left| D_z^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)| dE_{n-1} dt_k +$$

$$+ c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{|x_k-t_k|^{\ell_k}} v^{-|\alpha|-\rho\alpha} dv \times \int \left| D_z^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)| dE_{n-1} dt_k \leq$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty} v^{-|\alpha|-\rho\alpha} dv \times \int \left| D_z^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)| dE_{n-1} dt_k +$$

$$+ c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x_k-t_k|^2} \int_{0}^{|x_k-t_k|^{\ell_k}} v^{-|\alpha|-\rho\alpha+2\alpha_k} dv \int \left| D_z^{\rho} G_1\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)| dE_{n-1} dt_k \leq$$

(полагая $\dfrac{1}{p'} = 1 - \dfrac{1}{p}$, применяя неравенство Гёльдера и учитывая оценку (8), получаем)

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-\rho\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}} dv \cdot \left(\int \left| D_z^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right| |f(t)|^p dE_{n-1} \right)^{1/p} dt_k +$$

$$+c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_k-t_k|^2}\int_0^{|x_k-t_k|}v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}+2\alpha_k}dv\left(\int|D_z^p G_1(t,\frac{t-x}{v^\alpha})||f(t)|^p dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k.$$

Используя неравенство Минковского, имеем

$$\left(\int|D^p\mathcal{J}_h^{(1)}|^q dE_{n-1}\right)^{1/q}\leq c\left(\int\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty}v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}}dv\left(\int|D_z^p G(t,\frac{t-x}{v^\alpha})|\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times|f(t)|^p dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k\right|^q dE_{n-1}\right)^{1/q}+c\left(\int\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_k-t_k|^2}\int_0^{|x_k-t_k|^{\ell_k}}v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}+2\alpha_k}dv\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int|D_z^p G_1(t,\frac{t-x}{v^\alpha})||f(t)|^p dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k\right|^q dE_{n-1}\right)^{1/q}\leq$$

(применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем)

$$\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty}v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}}dv\left(\int_{E_{n-1}}\left(\int_{E_{n-1}}|D_z^p G(t,\frac{t-x}{v^\alpha})||f(t)|^p dE_{n-1}\right)^{q/p}dE_{n-1}\right)^{1/q}dt_k+$$

$$+c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_k-t_k|^2}\int_0^{|x_k-t_k|^{\ell_k}}v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}+2\alpha_k}dv\left(\int\left(\int|D_z^p G_1\left(t,\frac{t-x}{v^\alpha}\right)||f(t)|^p dE_{n-1}\right)^{q/p}dE_{n-1}\right)^{1/q}dt_k\leq\right.$$

$$\leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}}dv\left(\int\left(\int\limits_{E_{n-1}}\left|D_z^{\rho}G\left(t,\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right|^{q/p}|f(t)|^{q}dE_{n-1}\right)^{p/q}dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k+$$

$$+c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_k-t_k|^2}\int\limits_0^{|x_k-t_k|^{\ell_k}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}+2\alpha_k}dv\left(\int\left(\int\left|D_z^{\rho}G_1\left(t,\frac{t-x}{v^{\alpha}}\right)\right|^{q/p}|f(t)|^{q}dE_{n-1}\right)^{p/q}dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k\leq$$

(применяя оценку (8), имеем)

$$\leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x_k-t_k|^{\ell_k}}^{\infty} v^{-\frac{|\alpha|}{p}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}+\frac{|\alpha|}{q}-\frac{\alpha_k}{q}}dv\left(\int|f(t)|^{p}dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k+$$

$$+c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x_k-t_k|^2}\int\limits_0^{|x_k-t_k|^{\ell_k}} v^{-\frac{|\alpha|}{p}+\frac{|\alpha|}{q}-p\alpha-\frac{\alpha_k}{p'}-\frac{\alpha_k}{q}+2\alpha_k}dv\left(\int|f(t)|^{p}dE_{n-1}\right)^{1/p}dt_k\leq$$

(полагая $F(t_k)=\left(\int|f(t)|^{p}dE_{n-1}\right)^{1/p}$, получаем)

$$\leq c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t_k)}{|x_k-t_k|^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}}\,dt_k. \tag{13}$$

В силу неравенства Гильберта и теоремы о представлении функционалов в L_p, имеем

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t_k)}{|x_k-t_k|^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}}\,dt_k, L_q\right\|\leq c\|F,L_p\|.$$

Учитывая (13), получим

$$\| D^{\rho} \mathcal{J}_{h}^{(1)}, L_{q} \| \leq c \| f, L_{p} \| .$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\| D^{\rho} \mathcal{J}_{h}^{(1)} - D^{\rho} \mathcal{J}_{\tilde{h}}^{(1)}, L_{q} \| \leq c_{0} \varepsilon + c \| f, L_{p} \| \, (h + \tilde{h})^{\beta}, \tag{14}$$

где c_0 не зависит от ε, h, $\tilde{h}$, константа c не зависит от $h, \tilde{h}$ и $\beta = \min\left(\rho\alpha + \left(1 - \frac{1}{q}\right)|\alpha| - 1,\ 1 - \rho\alpha\right), h \leq \tilde{h} \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно заданное число, $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$, и $\bar{f} \in C_0^{\infty}(E_n)$ такая, что

$$\| f - \bar{f}, L_p \| < \varepsilon, \ \| \bar{f}, L_q \| < c(\varepsilon) \| f, L_p \| .$$

Полагая $0 < h < \tilde{h} < 1$, будем иметь

$$\| D^{\rho} \mathcal{J}_{h}^{(1)} - D^{\rho} \mathcal{J}_{\tilde{h}}^{(1)}, L_{q} \| \leq \left\| \int_{h}^{h^{-1}} v^{-|\alpha|} \int D_{x}^{\rho} G\left(t, \frac{t-x}{v^{\alpha}}\right) [f - \bar{f}] \, dt \, dv, L_{q} \right\| +$$

$$+ \int_{\tilde{h}^{-1}}^{h^{-1}} v^{-\rho\alpha - \frac{|\alpha|}{q'}} dv \times \int \| D_{z}^{\rho} G, L_{q} \| |\bar{f}| \, dt + \int_{h}^{\tilde{h}} v^{-\rho\alpha - |\alpha|} dv \int_{E_n} \left(1 + \left|\frac{t}{v^{\alpha}}\right|\right)^{-K} dt \times \| \bar{f}, L_{q} \| \leq$$

(применяя лемму 3, получаем)

$$\leq c_0 \varepsilon + c \| \bar{f}, L_1(E_n) \| (h + \tilde{h})^{\rho\alpha + \frac{|\alpha|}{q'} - 1} + c \| \bar{f}, L_q \| (h + \tilde{h})^{1 - \rho\alpha} \leq$$

$$\leq c_0 \varepsilon + c \| f, L_p(E_n) \| (h+\tilde{h})^{p}.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 5. Пусть $\| U(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| < \infty$,

$$S > \frac{|\alpha|}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j, \quad |\alpha| > 1.$$

Тогда

$$|\mathcal{J}_h^{(2)}(x)| \leq c \prod_{j=1}^{n} \left(1+|x_j|\right)^{-\chi} \| U(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \|,$$

где $\chi = \delta + \frac{1}{s} - \frac{1}{|\alpha|}$; $\frac{1}{|\alpha|} - \frac{1}{s} < \delta < 1 - \frac{1}{s}$,

константа c не зависит от x, h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства оценим один из интегралов суммы в представлении $\mathcal{J}_h^{(2)}(x)$:

$$\left| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int U(t) \hat{G}_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) dt d\sigma \right| \leq$$

(применяя оценку (9), имеем)

$$\leq c \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int |U(t)| (1+|t|)^{-\omega} \left(1+\left|\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right|\right)^{-\kappa} dt d\sigma \leq$$

$$\leq c \int_1^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int |U(t)| (1+|t|)^{-\omega} \left(1+\left|\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right|\right)^{-\kappa} dt d\sigma +$$

$$+c\int_0^1 \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha}\int |u(t)|(1+|t|)^{-\omega}\left(1+\left|\frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right|\right)^{-\kappa} dt\, d\sigma\Big| \leqslant$$

(считая ω достаточно большим и применяя неравенство Гёльдера, получаем)

$$\leqslant c\int_1^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} d\sigma \times \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n)\| +$$

$$+ c\left|\int_0^1 \sigma^{-\frac{|\alpha|}{s}-\gamma\alpha} d\sigma\right| \times \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n)\| \leqslant$$

(так как $|\alpha| > 1$, $\frac{|\alpha|}{s}+\gamma\alpha < 1$)

$$\leqslant c\, \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n)\| . \qquad (15)$$

Предполагая $|x_j| \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеем

$$\left|\int_0^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha}\int u(t)\, G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) dt\, d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\prod_{j=1}^{n}|x_j|^{1/|\alpha|}}^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha}\left|\int u(t)\, G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) dt\right| d\sigma +$$

$$+ \int_0^{\prod_{j=1}^{n}|x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha}\left|\int u(t)\, G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) dt\right| d\sigma = J_1(x) + J_2(x).$$

$$J_1(x) \leq \int\limits_{\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{1/|\alpha|}}^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \left| \int u(t)\cdot (1+|t|)^{-\omega} dt \right| d\sigma \leq$$

(применяя неравенство Гёльдера, получаем)

$$\leq \int\limits_{\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{1/|\alpha|}}^{\infty} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} d\sigma \, \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| \leq$$

$$\leq c \prod_{j=1}^{n} (1+|x_j|)^{-\left(1+\frac{\gamma\alpha-1}{|\alpha|}\right)} \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| \leq$$

$$\leq c \prod_{j=1}^{n} (1+|x_j|)^{-\chi} \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| .$$

$$J_2(x) \leq \int\limits_{0}^{\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \int (1+|t|)^{N/s} \left| G_{\beta\tau\gamma}\left(t, \frac{t-x}{\sigma^{\alpha}}\right) \right| (1+|t|)^{-N/s} |u(t)| dt d\sigma \leq$$

(учитывая оценку (9) и применяя неравенство Гёльдера, имеем)

$$\leq \int\limits_{0}^{\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \left[\int \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} |t_j|^{\delta s'} \left(1+\left|\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right|\right)^{\kappa}} dt \right]^{1/s'} d\sigma \| u(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \int_0^{\prod_{j=1}^{n}|x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-|\alpha|-\gamma\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_j}{|t_j|^{\delta s'} \left(1 + \left|\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}}\right|\right)^2} \right]^{1/s'} d\sigma \| U(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \| \leq$$

$$\leq \frac{C}{\prod_{j=1}^{n} |x_j|^{\delta}} \int_0^{\prod_{j=1}^{n}|x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-\frac{|\alpha|}{s} - \gamma\alpha} d\sigma \| U(1+|t|)^{-N}, L_s(E_s) \| \leq$$

$$\leq C \prod_{j=1}^{n} \left(1 + |x_j|\right)^{-\chi} \| U(1+|t|)^{-N}, L_s(E_n) \|. \qquad (16)$$

Из (15) и (16) следует требуемое.

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. <u>Пусть</u> $U \in S'_{N,s}$ <u>- обобщенное решение уравнения (1),</u> $\delta > \frac{|\alpha|}{\alpha_0}$, $\alpha_0 = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$, $1 < p < |\alpha|$.
<u>Тогда если</u> $f \in L_p(E_n)$ <u>, то существует полином</u> $P_m(x) = \sum_{|K| \leq m} c_K x^K$, $|m| \leq N - 1$ <u>, линейно зависящий от</u> U <u>и такой, что при</u> $\alpha_j < 1$ <u>имеет место</u> $U(x) - P_m(x) \longrightarrow 0$ <u>при</u> $x_j \longrightarrow \infty$ <u>для почти всех</u> $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in E_{n-1}$, $1 \leq j \leq n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in L_p(E_n)$, то в силу леммы 9 работы [13] $f \in C_\varepsilon(E_n)$, $\varepsilon = \frac{1}{p}$, и так как $|\alpha| > p$, то $\varepsilon\alpha > 1$.

В силу представления (7) обобщенных решений уравнения (1) и лемм 2, 3, 4, решение $U(x)$ для почти всех $x \in E_n$ представимо в форме

$$U(x) = P_m(x) + \lim_{h \to 0} J_h^{(1)}(x) + \lim_{h \to 0} J_h^{(2)}(x)$$

Обозначим $\mathcal{J}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \mathcal{J}_h^{(1)}(x)$. Как показано в работе [13], из (12) и (14) следует, что при $\alpha_j < 1$ функция $\mathcal{J}(x) \to 0$ при $x_j \to \infty$ для почти всех $x' \in E_{n-1}$, а тогда утверждение теоремы следует из леммы 5 и равенства (17).

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть $U \in S'_{N,S}$ – обобщенное решение уравнения (1), $1 < |\alpha| < p$, $S > \frac{|\alpha|}{\alpha_0}$, $\alpha_0 = \min\limits_{1\le j\le n} \alpha_j$. Тогда если $\| f, L_{p,\beta} \| < \infty$, где $\beta > n\left(\frac{p}{|\alpha|} - 1\right)$, то существует полином $P_m(x)$, $|m| \le N-1$, линейно зависящий от U и такой, что при $|x_j| \ge 1$, $1 \le j \le n$

$$|U(x) - P_m(x)| \le c\prod_{j=1}^{n}\left(1+|x_j|\right)^{-\gamma_1} \| U(1+|t|)^{-N}, L_S(E_n)\| +$$

$$+ c\prod_{j=1}^{n}\left(1+|x_j|\right)^{-\gamma_2} \| f, L_{p,\beta}\|,$$

здесь $\gamma_1 = \delta_1 + \frac{1}{S} - \frac{1}{|\alpha|}$, $\frac{1}{|\alpha|} - \frac{1}{S} < \delta_1 < 1 - \frac{1}{S}$,

$$\gamma_2 = \frac{\delta_2}{np} - \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{p},\quad n\left(\frac{p}{|\alpha|} - 1\right) < \delta_2 < n(p-1),\quad \delta_2 \le \beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f \in L_{p,\beta}(E_n)$, то, в силу леммы 9 работы [13], при $\beta > n\left(\frac{p}{|\alpha|} - 1\right)$ функция $f \in C_\varepsilon(E_n)$, $\varepsilon\alpha > 1$.

Нетрудно доказать, что при выполнении условий теоремы функции $\mathcal{J}_h^{(1)}(x)$ и $\mathcal{J}_h^{(2)}(x)$ при $h \to 0$ равномерно сходятся на E_n. Тогда, учитывая леммы 2 и 5, для доказательства теоремы достаточно получить оценку $\mathcal{J}_h^{(1)}(x)$, не зависящую от h.

Имеем

$$\left|\int_0^\infty \sigma^{-|\alpha|}\int G\left(t,\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)f(t)\,dt\,d\sigma\right| \leq \int_{\prod_{j=1}^n |x_j|^{1/|\alpha|}}^\infty \sigma^{-|\alpha|}\left|\int_{E_n} G\left(t,\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)f(t)\,dt\right|d\sigma +$$

$$+\int_0^{\prod_{j=1}^n |x_j|^{1/|\alpha|}} \sigma^{-|\alpha|}\left|\int G\left(t,\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)f(t)\,dt\right|d\sigma = J_1(x)+J_2(x).$$

$$J_1(x) \leq \int_{\prod_{j=1}^n |x_j|^{\frac{1}{|\alpha|}}} \sigma^{-|\alpha|}\int \prod_{j=1}^n |t_j|^{1-\varepsilon_j}\prod_{j=1}^n |t_j|^{\varepsilon_j}|M_t[f]|\left|D_t^n G\left(t,\frac{t-x}{\sigma^\alpha}\right)\right|dt\,d\sigma \leq$$

(в силу оценки (8), получаем)

$$\leq \sum_{0\leq \tau<\underbrace{(1,\dots,1)}_{n}} \int_{\prod_{j=1}^n |x_j|^{\frac{1}{|\alpha|}}}^\infty \sigma^{-|\alpha|-\tau\alpha}d\sigma\int\frac{dt}{(1+|t|)^{2n}}\|f;C_\varepsilon\| +$$

$$+\int_{\prod_{j=1}^n |x_j|^{1/|\alpha|}}^\infty \sigma^{-2|\alpha|}\int\prod_{j=1}^n |t_j|^{1-\varepsilon_j}\left(1+\left|\frac{t}{\sigma^{\alpha_j}}\right|\right)^{-K}dt\,\|f,C_\varepsilon\| \leq$$

$$\leq C\left(\prod_{j=1}^n (1+|x_j|)^{-\left(1+\frac{\tau\alpha}{|\alpha|}-\frac{1}{|\alpha|}\right)}+\prod_{j=1}^n(1+|x_j|)^{-\left(\frac{\varepsilon\alpha}{|\alpha|}-\frac{1}{|\alpha|}\right)}\right)\|f,C_\varepsilon\| \leq$$

(учитывая, что $\varepsilon \geq \dfrac{\beta}{pn}+\dfrac{1}{p}$, имеем) $\leq C\prod_{j=1}^n(1+|x_j|)^{-\varkappa_2}\|f,C_\varepsilon\|.$

Оценка $J_2(x)$ проводится аналогично соответствующей оценке в лемме 5.

Теорема 3. Пусть $u \in S'_{N,S}$ — обобщенное решение уравнения (1), $\| x_m^{\mu_m} f, C_\varepsilon \| < \infty$, $\| x_m^{\mu_m - 1} f, C \| < \infty$,

$S > \frac{|\alpha|}{\alpha_0}$, $\varepsilon\alpha + \alpha_m > 1$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_n)$, $0 < \varepsilon_i \leq 1$. Определим число β_m из равенства

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} \varepsilon_i \alpha_i + \alpha_m - \beta_m \alpha_m = 1.$$

Тогда если $\mu_m > 1 + \beta_m - \sigma_m$, $\beta_m > \sigma_m \geq 0$, то существует полином $P_m(x)$ $(|m| \leq N-1)$ такой, что

$$|u(x) - P_m(x)| \leq C(1 + |x_m|)^{-\beta_m + \sigma_m} \left(\| x_m^{\mu_m} f, C_\varepsilon \| + \| x_m^{\mu_m - 1} f, C \| \right) +$$

$$+ C \prod_{j=1}^{n} (1 + |x_j|)^{-\chi} \| u (1 + |t|)^{-N}, L_S(E_n) \|,$$

$$\chi = \delta + \frac{1}{S} - \frac{1}{|\alpha|}, \quad \frac{1}{|\alpha|} - \frac{1}{S} < \delta < 1 - \frac{1}{S}.$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что $\| f, C_{\hat{\varepsilon}} \| < \infty$, где $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $i \neq m$, $\hat{\varepsilon}_m = 1$, $\hat{\varepsilon}\alpha > 1$. Тогда утверждение теоремы следует из лемм 2, 5 и равномерных оценок интеграла $J_h^{(1)}(x)$, полученных в работе [16].

Теорема доказана.

Замечание. Результаты данной работы сохраняют силу, если условие (4) имеет место для достаточно большого фиксированного N.

Литература

1. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов. – "Тр. Мат. ин-та АН СССР", 1961, т.60, с.282–303.

2. Соболев С.Л. Плотность финитных функций в пространстве $L_p^\ell(E_n)$. – "Сиб. мат. журн.", 1963, т.4, № 3, с.673–682.

3. Портнов В.Р. Две теоремы вложения для пространств $L_{p,b}^{(1)}(\Omega \times R_+)$ и их применения. – "Докл. АН СССР", 1965, т.155, № 4, с.761–764.

4. Седов В.Н. О функциях, обращающихся на ∞ в полином. – В кн.: Труды Всесоюзн. симпозиума по теоремам вложения". Баку, 1966. М., "Наука", 1970, с.204.

5. Никольский Ю.С. Граничные свойства функций из весовых классов. – "Докл. АН СССР", 1965, т.164, № 3, с.503–506.

6. Бесов О.В. Продолжение функций из L_p^ℓ и W_p^ℓ. – "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1967, т.89, с.5–17.

7. Бесов О.В. Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плотность финитных функций. – "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1969, т.105, с.3–14.

8. Кудрявцев Л.Д. Свойства граничных значений функций из весовых пространств и их приложения к краевым задачам. – В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., "Наука", 1972, с.259–265.

9. Кудрявцев Л.Д. О следах функций многих переменных и полях направлений, регулярных в бесконечности для оператора Лапласа. – "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1972, т.112, с.256–270.

10. Портнов В.Р. К вопросу о выходе на константу функций из пространства $W_{p,\nu}^{1}$. – "Докл. АН СССР", 1974, т.215, № 3, с.550–553.

11. F e f e r m a n Ch. Convergence on almost every line for functions with gradient in $L^p(R^n)$.-"Ann.Inst.Fourier, Grenoble.",1974, v.24, N3, p.153-164.

12. К а л я б и н Г.А. Оценки для функций с конечной полунормой О.В.Бесова. - "Дифференц. уравнения", 1975, т.11, № 4, с.713-717.

13. У с п е н с к и й С.В., Ч и с т я к о в Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.

14. Л и з о р к и н П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1969, т.105, с.89-167.

15. S c h w a r t z L. Theories des distributions I,II.-Paris, Herman, 1950/51.

16. Ф и л а т о в П.С. О дифференциальных свойствах решений уравнений квазиэллиптического типа на бесконечности. - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 2, с.368-383.

17. У с п е н с к и й С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности. - "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 3, с.665-678.