УДК 518 + 517.392

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В.И.П о л о в и н к и н (Красноярск)

Во многих работах С.Л.Соболева исследовались последовательности кубатурных формул с регулярным пограничным слоем. Функционалы ошибок формул из этих последовательностей образуют последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем. Изложение результатов Соболева и библиография по данной тематике даны в монографии [1].

Если содержание упомянутых выше результатов относится, главным образом, к пространствам $L_2^m(E_n), L_2^m(\Omega)$, то в работах автора этой статьи (в частности, в [2-4]) центральное место занимают исследования кубатурных формул в пространствах $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$, $n/m<p\in(1,\infty)$, Ω - область в n-мерном пространстве E_n. Там рассматривались последовательности функционалов с пограничным слоем, частными случаями которых являются последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем. Было показано, что последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальны в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$ при m нечетном, а если m четно, то при любом p найдется последовательность функционалов с пограничным слоем, асимптотически оптимальная в этих пространствах.

Как будет видно из результатов настоящей работы, даже в одномерном случае при $\Omega=(a,b)$ существуют такие p, m, что последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем не являются асимптотически оптимальными в $L_p^m(\Omega)$.

Эта статья аналогична исследованиям [1-4] для кубатурных формул. В ней, как правило, доказательства утверждений либо вообще не описываются, либо приводятся не полностью. Однако здесь дается отдельное изложение результатов для одномерного случая, так как для части их многомерные аналоги еще не получены. К таким результатам относятся, например, теоремы из этой статьи, связанные со случаями $p=1, \infty$, с сопутствующими числами и с асимптотически наилучшими квадратурными формулами.

Через m будем обозначать натуральные числа; через L^m – совокупность функционалов таких, что в множества, на которых они определены, входят все многочлены степени ниже m, и функционалы на этих многочленах равны нулю.

Пусть a, b – действительные числа, $a<b$, q – натуральное число.

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность функционалов $\{l^h\}$,

$$(l^h, f) = \int_a^b f\,dx - \sum_{k=0}^{N} c_k^N f(a+kh), \quad \int_a^b f\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

где $h=(b-a)/N$, $N=q, q+1, \dots$,

называется последовательностью функционалов с пограничным слоем (сокр. ПФСПС), если найдутся натуральные числа d, t, K, $d \le t$, функционалы l_0^h, l_N^h, $l \in L^m$ такие, что

$$l^h(x) = l_0^h(x) + \sum_{i=d}^{N-d-1} l\left(\frac{x-a}{h} - i\right) + l_N^h(x),$$

l, l_0^h, l_N^h имеют вид

$$(l, f) = \int_0^1 f\,dx - \sum_{j=-t}^{t+1} c_j f(j)$$

$$(\ell_0^h, f) = \int_a^{a+dh} f dx - \sum_{j=0}^{t+d} c_{j,0}^h f(a+jh),$$

$$(\ell_N^h, f) = \int_{b-dh}^{b} f dx - \sum_{j=0}^{t+d} c_{j,N}^h f(b-jh),$$

где $c_{-t}, \ldots, c_{t+1}, c_{j,0}, c_{j,N}, j=0, \ldots, t+d$ – постоянные, удовлетворяющие неравенствам

$$|c_{j,0}^h|, |c_{j,N}^h| < Kh.$$

Определение 2. Последовательность квадратурных формул

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{k=0}^{N} c_k^N f(a+kh)$$

называется последовательностью квадратурных формул с пограничным слоем, если функционалы ошибок формул этой последовательности образуют ПФСПС.

Определение 3. Пусть последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ удовлетворяет определению 1, а функционал ℓ вместе с некоторыми числами d, t, K, функционалами ℓ_0^h, ℓ_N^h соответствует ей в этом определении. Тогда ℓ называется сопутствующим функционалом $\{\ell^h\}$.

Определение 4. Пусть $\{\ell^h\}$ – ПФСПС,

$$\varkappa = \frac{1}{b-a} \lim_{h \to 0} \{h^{-m} (\ell^h(x), x^m)\},$$

тогда $\varkappa$ называется сопутствующим числом $\{\ell^h\}$.

Теорема 1. а) <u>Всякая ПФСПС обладает сопутствующим числом. б) Если</u> $\ell, \varkappa$ – <u>сопутствующие функционал и число некоторой</u>

ПФСПС, то

$$\mathfrak{x} = (\ell(x),\, x^m).$$

Определение 5. ПФСПС называется последовательностью функционалов с регулярным пограничным слоем, если ее сопутствующее число равно нулю.

Определение 6. Последовательность функционалов $\{\ell^h\}$

$$(\ell^h, f) = \int_a^b f\,dx - h\left\{\sum_{i=0}^{t}\left[\alpha_i f(a+hi)+\beta_i f(b-hi)\right]+\sum_{i=t+1}^{N-t-1} f(hi)\right\}, \tag{2}$$

где $\alpha_0,\ldots,\alpha_t,\ \beta_0,\ldots,\beta_t$ - числа, $t<N/2$, называется последовательностью типа Грегори, если она принадлежит L^{m*}.

Примерами последовательностей типа Грегори могут служить последовательности функционалов ошибок известных квадратурных формул Грегори.

Теорема 2. а) Всякая последовательность типа Грегори является ПФСПС. б) Если она имеет вид (2), то ее сопутствующий функционал ℓ может быть выбран в виде

$$(\ell, f) = \int_0^1 f\,dx - \beta_0 f(1) - \sum_{i=1}^{t} f(1-i)(\beta_i - \beta_{i-1}) - f(-t)(1-\beta_t).$$

Через $L_p^m[a,b]$, $p\in[1,\infty]$, обозначим нормированные пространства, индуцированные полунормами

$$\|f\|_{L_p^m[a,b]} = \|f^{(m)}\|_{L_p[a,b]},\ p\neq\infty;\ \|f\|_{L_\infty^m[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]}\mathrm{vrai}\left\{|f^{(m)}(x)|\right\},$$

на множествах функций, имеющих на (a,b) абсолютно непрерывные производные до порядков $m-1$. Эти пространства являются одномерными аналогами $L_p^m(\Omega)$.

Положим $q=q(p)=p(p-1)^{-1}$, $q(1)=\infty$, $q(\infty)=1$.

Т е о р е м а 3. Пусть $\{\ell^h\}$ - ПФСПС, $æ$ - ее сопутствующее число. Тогда при $p \in (1, \infty]$.

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}[a,b]} = \frac{(b-a)^{1/q}}{m!} \|(-1)^m B_m(x) + æ\|_{L_q[0,1]} (1+O(h))h^m, \qquad (3)$$

где $B_m(x)$ - полиномы Бернулли степени m.

Доказательство теоремы 3 по своей идее аналогично доказательству теоремы 2 из [2]. Однако рассуждения и выкладки сильно упрощаются с помощью метода, примененного в [5] для вычисления норм функционалов ошибок квадратурных формул. Этот метод заключается в нахождении функций F^h, таких, что

$$(\ell^h, f) - \int_a^b F^h f^{(m)} dx \qquad (4)$$

для всех $f \in L_p^m[a,b]$, и в использовании равенства

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}[a,b]} = \|F^h\|_{L_q[a,b]}. \qquad (5)$$

З а м е ч а н и е. Теорема 1 из [2] обобщается на пространства $L_1^m[a,b]$, $L_\infty^m[a,b]$. Это обстоятельство, по существу, использовалось в [5]. Оно помогает установить теорему 3 при $p=\infty$. Если $p=1$, то оценки, которые дает одномерный аналог леммы 5 из [2], в отличие от случая $p \in (1,\infty]$, не позволяют распространить теорему 3 на пространства $L_1^m[a,b]$.

Как пример применения теоремы 3 можно показать, что главный член норм функционалов погрешности усложненных формул Симпсона в $L_2^{2*}[0,1]$ при $h \to 0$ приблизительно на 65% больше, чем у формул Грегори, при построении которых используются вторые разности, с такими же количествами узлов.

Т е о р е м а 4. Пусть $\{\ell^h\}$ - последовательность типа Грегори. Тогда

$$\|\ell^h\|_{L_1^{m*}[a,b]} = Kh^m,$$

где K - постоянная.

Т е о р е м а 5. Для любых чисел $\varkappa$, A найдется последовательность типа Грегори $\{\ell^h\}$ с сопутствующим числом $\varkappa$, такая, что

$$\|\ell^h\|_{L_1^{m*}[a,b]} > Ah^m.$$

Доказательства теорем 4, 5, так же как и доказательство теоремы 3, используют формулы типов (4), (5).

О п р е д е л е н и е 7. Последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ вида (1) называется асимптотически оптимальной в $L_p^m[a,b]$, если она принадлежит L_p^{m*} и для любой последовательности функционалов $\{\rho^h\} \subset L_p^{m*}$

$$(\rho^h, f) = \int_a^b f dx - \sum_{i=0}^{N} c_{h,i} f(a+hi) \tag{6}$$

($c_{h,0}, \ldots, c_{h,N}$ - постоянные) выполняется

$$\lim_{h\to 0} \{\|\rho^h\|_{L_p^{m*}[a,b]} \quad \|\ell^h\|_{L_p^{m*}[a,b]}\} \geq 1.$$

Т е о р е м а 6. Последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем не являются асимптотически оптимальными в $L^2_{3/2}[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m=2$, $p=3/2$ будем искать $\varkappa$ такое, чтобы минимизировать коэффициент при h^m в правой части (3), что равносильно минимизации

$$J(\varkappa)=\int_0^1 |B_2(x)+\varkappa|^q dx=\int_0^1 |x^2-x+\frac{1}{6}+\varkappa|^q dx=$$

$$=2^{-2q-1}\int_{-1}^{1} |y^2-\frac{1}{3}+4\varkappa|^q dy.$$

Задача о минимизации $\int_0^1 |y^2-\ell^2|^q dy$ была рассмотрена в [6]. Там было показано, что минимум достигается, когда ℓ - решение трансцендентного уравнения

$$\int_1^{\ell^{-2}} t^{-1/2}(t-1)^{q-1}dt=\sqrt{\pi}\,\Gamma(q)/\Gamma(q+\frac{1}{2}),$$

где Γ - гамма-функция.

Следовательно, $J(\varkappa)$ минимальна, когда $\varkappa$ удовлетворяет уравнению

$$\int_1^{(\frac{1}{3}-4\varkappa)^{-1}} t^{-1/2}(t-1)^{q-1}dt=\sqrt{\pi}\,\Gamma(q)/\Gamma(q+\frac{1}{2}). \qquad (7)$$

Пусть $p=3/2$, $q=3$. С помощью вычислений убеждаемся, что $\varkappa=0$ не является корнем (7) и не может минимизировать $J(\varkappa)$. Кроме того, каково бы ни было $\varkappa$, найдется ПФСПС такая, что $\varkappa$ - ее сопутствующее число. Отсюда и из (3) следует теорема 6.

Т е о р е м а 7. Пусть $\{e^h\}$ - ПФСПС с сопутствующим числом $\varkappa$. Она асимптотически оптимальна в $L_p^m[a,b]$, $p\in(1,\infty]$, тогда и только тогла, когда

$$\int_0^1 |(-1)^m B_m(x)+\varkappa|^q dx=\min_{\lambda\in(-\infty,\infty)}\int_0^1 |(-1)^m B_m(x)+\lambda|^q dx. \qquad (8)$$

При m нечетном или $p=2$ уравнению (8) удовлетворяет $\varkappa=0$; при m четном, $p=\infty$ число $\varkappa=-2^{-m}(2^{-m+1}-B_m)$, где B_m -

число Бернулли номера m . В последнем случае из (3) вытекает, что

$$\| \ell^h \|_{L_\infty^m [a,b]} = \frac{b-a}{m!} 4^{-m} |E_m| h^m (1+o(h)), \quad h \to 0$$

(E_m - число Эйлера номера m).

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 1 из [3].

Существование последовательностей типа Грегори, асимптотически оптимальных в $L_p^{m*}[a,b]$, $p \in (1,\infty)$, с помощью методов, отличных от применяемых в данной работе, было доказано в [7].

Т е о р е м а 8. Пусть m четно, $\varkappa$ - решение (8). Тогда

$$(-1)^{\frac{m}{2}} 2^{-m} B_m < (-1)^{\frac{m}{2}+1} \varkappa < (-1)^{\frac{m}{2}} 2^{-m} (2^{-m+1} - 1) B_m .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 8 основано на интегральном представлении полиномов Бернулли [8]:

$$B_m(x) = (-1)^{\frac{m}{2}+1} m \int_0^\infty J(x,t) t^{m-1} dt,$$

где

$$J(x,t) = \frac{\cos(2\pi x) - e^{-2\pi t}}{ch(2\pi t) - \cos(2\pi x)},$$

и оценках

$$2J\left(\frac{1}{4}, t\right) < J\left(\frac{1}{4}+\alpha, t\right) + J\left(\frac{1}{4}-\alpha, t\right) < J\left(\frac{1}{2}, t\right) + J(0,t),$$

справедливых при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $t \in (0,\infty)$.

Т е о р е м а 9. Пусть для $\{p^h\}$ вида (6) существуют числа $\alpha, \beta > 0$, множества $M_h \subset \{0,\dots,N\}$ такие, что а) $|c_{h,i} - h| \geq \beta h$ при $i \in M_h$; б) при достаточно больших N количества элементов M_h больше αh. Тогда $\{\rho^h\}$ не могут быть асимптотически оптимальны в $L_p^m[a,b]$ при $p \in (1,\infty)$.

Доказательство этого результата использует теорему Рисса об общем виде линейного функционала в $L_p[a,b]$, равномерную выпуклость пространства $L_q[a,b]$ при $q \in (1,\infty)$, существование ПФСПС, асимптотически оптимальных в $L_p^m[a,b]$, $p \in (1,\infty)$.

Из теоремы 9 следует, что последовательности функционалов ошибок усложненных квадратурных формул, в частности формул Ньютона-Котеса, не могут, как правило, быть асимптотически оптимальными в $L_p^m[a,b]$ при $p \in (1,\infty)$.

Определение 8. Последовательность функционалов $\{\ell^h\} \subset L_p^{m*}$, $h = h(N)$ вида (1) называется асимптотически наилучшей в $L_p^m[a,b]$, если, какова бы ни была $\{\rho^N\} \subset L_p^{m*}$,

$$(\rho^N, f) = \int_a^b f\,dx - \sum_{k=0}^{N} c_{k,N} f(x_k^N),$$

$x_0^N, \ldots, x_N^N \in [a,b]$, $c_{0,N}, \ldots, c_{N,N}$ – постоянные, выполняется

$$\varliminf_{N\to\infty} \left\{ \|\rho^N\|_{L_p^{m*}[a,b]} \Big/ \|\ell^{h(N)}\|_{L_p^{m*}[a,b]} \right\} \geq 1.$$

Теорема 10. Пусть $\{\ell^h\}$ – асимптотически оптимальная в $L_p^m[a,b]$ ПФСПС. Тогда $\{\ell^h\}$ – асимптотически наилучшая последовательность функционалов в $L_p^m[a,b]$ при $p \in (1,\infty)$.

Теорема 10 является следствием теорем 3, 6 и результатов [9].

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 803 с.

2. П о л о в и н к и н В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем. – "Сиб. мат. журн.", 1974, т.15, № 2, с.413–429.

3. П о л о в и н к и н В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m . – "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 2, с.328–335.

4. П о л о в и н к и н В.И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул. – "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 6, с.1255–1262.

5. Н и к о л ь с к и й С.М. Квадратурные формулы. – "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1952, т.16, с.181–196.

6. Ш а й д а е в а Г.А. Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов функций. – "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1959, т.53, с.313–341.

7. К а л м ы к о в В.Д. Асимптотически оптимальная квадратурная формула с пограничным слоем в пространстве $L_p^{(m)}(0,1)$. – В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. (Изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР), 1972, вып.14, с.24–29.

8. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., "Наука", 1965.

9. Ж е н с ы к б а е в А.А. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^{r}L_p$. – "Докл. АН СССР", 1976, т.227, № 2, с.277–279.