УДК 517.518.22

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ВЕСОВЫМ КЛАССАМ $W^{l_1,\ldots,l_n}_{p;\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ С.Л.СОБОЛЕВА В ОБЛАСТЯХ

В.Г.Перепелкин (Новосибирск)

В работе исследуются граничные свойства функций, принадлежащих весовым классам $W^{l}_{p;\sigma}(G)$, $1<p<\infty$, $l=(l_1,\ldots,l_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, на гладких $(n-1)$-мерных поверхностях. Рассматриваются анизотропные (как по показателям дифференцирования, так и по весовым показателям) весовые пространства дифференцируемых функций, определенных в области, суммируемых с весом степенного характера, имеюшим особенность на границе области.

Для общих классов функций указанного вида граничные свойства изучены в следующих случаях:

1) когда граничной поверхностью является плоскость, параллельная одной из координатных плоскостей [1, 2];

2) когда граница является гладким многообразием, регулярным в следующем смысле: многообразие допускает локальное гладкое представление вида $x_i=\varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ по той координате x_i, вдоль направления которой функции рассматриваемого класса имеют наилучшие "дифференциально-весовые" свойства, т.е. $l_i-\sigma_i=\max\limits_{1\le j\le n}(l_j-\sigma_j)$ [3].

В указанных случаях граничные значения выражаются в терминах классов B^{r}_{p}, что позволяет сформулировать необходимые и достаточные условия на след (см. также [4-6]).

Для невесовых классов W^{l}_{p} известны результаты, дающие точные характеристики следов и при более общих предположениях относительно геометрии границы области (см. [7, 8], а также [9] и имеющуюся там библиографию).

В данной работе для каждого класса функций $W^{l}_{p;\sigma}$ определяется класс областей (в этот класс могут входить и ограниченные области с замкнутой граничной поверхностью), на границе которых удается получить точную, обратимую характеристику следа произвольной функции из $W^{l}_{p;\sigma}$. В нашем случае граничное значение выражается в терминах классов B^{r}_{p} и ограниченности некоторых весовых норм. Результаты настоящей статьи являются обобщением соответствующих результатов из [7] на случай весовых классов функций.

Из других работ, посвященных изучению граничных свойств классов функций, отметим [10–15].

§ 1. Определения. Основные результаты

Пусть R^{n} – евклидово пространство точек

$$x=(x_1,\dots,x_n)=(x',x_n)=(x_1,x')=(x_1,x'',x_n);$$

R^{n}_{+} – полупространство $\{x\in R^{n}:\ x=(x',x_n),\ x'\in R^{n-1},\ x_n\geq 0\}$; G – область в R^{n}; $\Gamma=\partial G$ – граница области G; $\rho(x)=\rho(x,\partial G)$ – расстояние от точки x до границы области G.

Определим пространство $W^{l}_{p;\sigma}(G)$, $1<p<\infty$, функций, суммируемых со степенью p и имеющих обобщенные по С.Л.Соболеву [16] производные по x_i порядка l_i в области G, суммируемые в $L_p(G)$ с весом $[\rho(x)]^{\sigma_i}$; где $l=(l_1,\dots,l_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, l_i – натуральные числа, $\sigma_i p+1>0$, $i=1,\dots,n$. Положим

$$\|\mathcal{F},W^{l}_{p;\sigma}(G)\|=\|\mathcal{F},L_p(G)\|+\sum_{i=1}^{n}\left\|[\rho(x)]^{\sigma_i}\frac{\partial^{l_i}\mathcal{F}}{\partial x_i^{l_i}},L_p(G)\right\|. \qquad (1)$$

Из результатов работы [17] следует, что множество гладких функций плотно в $W^{l}_{p;\sigma}(G)$. Таким образом, $\mathcal{F}\in W^{l}_{p;\sigma}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ принадлежит замыканию множества всех гладких функций по норме (1).

Будем предполагать, что

$$\ell_i - \sigma_i - 1/p > 0 \qquad (i=1,\dots,n). \tag{2}$$

Далее всюду будем считать, что G – односвязная область, $\partial G \in C^m$, $m > \max\limits_{1\le i\le n} \ell_i^2$. Тогда границу ∂G можно разбить на конечное число кусков $\Gamma_1,\dots,\Gamma_N$, каждый из которых допускает представление

$$\Gamma_s : x_{k_s} = \varphi_s\left(x_1,\dots,x_{k_s-1}, x_{k_s+1},\dots,x_n\right) \quad (s=1,\dots,N), \tag{3}$$

где функции φ_s определены в некоторой плоской области Ω_s и принадлежат там классу C^m по тем переменным, от которых они зависят. Таким образом, вопрос о граничных свойствах функций из $W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ на границе ∂G сводится к описанию граничных свойств на каждом куске Γ_s $(s=1,\dots,N)$. Если индекс k_s в представлении (3) таков, что $\ell_{k_s} - \sigma_{k_s} = \max\limits_{1\le j\le n}(\ell_j - \sigma_j)$ (такие координаты будем называть регулярными), то в этом случае граничные свойства на куске границы Γ_s изучены [3].

Рассмотрим нерегулярный случай, т.е. когда кусок поверхности Γ_s имеет гладкое представление вида (3) по той координате x_{k_s}, для которой $\ell_{k_s} - \sigma_{k_s} < \max\limits_{1\le j\le n}(\ell_j - \sigma_j)$. Тогда на соответствующей области Ω_s для каждой регулярной координаты найдется замкнутая подобласть, в точках которой производная φ_s по этой регулярной координате обращается в нуль.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением модельной ситуации, а именно будем считать, что нерегулярный кусок границы имеет гладкое представление

$$\Gamma : x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1,\dots,x_{n-1}), \quad \varphi \in C^m, \tag{4}$$

где x_1 – регулярная координата, при этом множество $\left\{x' : \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x') = 0\right\}$

лежит в плоскости $\{x_1 = 0\}$. Для простоты изложения будем считать, что функция φ гладко распространена на все R^{n-1} с сохранением свойства $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \neq 0$ при $x_1 \neq 0$ и $\varphi(0) = 0$.

Область $G = \{x : x_n > \varphi(x')\}$ будем считать целиком лежащей в пересечении полупространства R^n_+ и цилиндра $R \times D$, где

$$D = G \cap \{x_1 = 0\}. \tag{5}$$

В силу (4) $\rho(x, \partial G) \sim \rho(x) = x_n - \varphi(x')$, т.е. существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1 \rho(x) \leq \rho(x, \partial G) \leq c_2 \rho(x).$$

Определим область (рог) $\mathcal{R}(x; \alpha, \beta, \gamma; a, b; \varepsilon) \equiv \mathcal{R}(x; \alpha, \beta, \gamma)$:

$$\mathcal{R}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \left\{ y \in R^n : 0 < a_i \leq \frac{y_i - x_i}{h^{\alpha_i} [h^\beta + \rho(x)]^{\gamma_i}} \leq b_i, \right.$$

$$\left. i = 1, \ldots, n;\ 0 < h < \varepsilon \right\}, \tag{6}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$; $\alpha_i > 0, \beta > 0$, $\alpha_i + \beta\gamma_i > 0$, $0 < a_i < b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Через $\mathcal{R}(x; \alpha, \beta, \gamma)$ будем обозначать также рог, полученный из рассматриваемого отражением относительно одной или нескольких координатных плоскостей.

Будем говорить, что область G удовлетворяет условию рога (6) с параметрами α, β, γ, если G можно покрыть конечным числом областей $G_1, \ldots, G_L$ таких, что для каждой точки x, принадлежащей подобласти G_j, рог $\mathcal{R}(x)$ с фиксированными для этой подобласти параметрами a и b целиком лежит в области G.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что область G удовлетворяет условию рога $\mathcal{R}(x; \alpha, \beta, \gamma)$ с параметрами

$$\alpha_i = \ell_i^{-1},\ \gamma_i = \ell_i^{-1}(\sigma_i - \sigma_1),\ \beta = (\ell_n - \sigma_n + \sigma_1)^{-1}\ (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Таким образом, в силу (2),

$$\beta > 0\,,\ \omega_i = \alpha_i + \beta\gamma_i > 0 \quad (i=1,\dots,n);\ \omega_1 = \alpha_1\,,\ \omega_n = \beta\,. \tag{8}$$

Наложим некоторые ограничения на свойства границы Γ в окрестности плоскости $\{x_1 = 0\}$.

1. Предположим, что функция φ удовлетворяет условиям:

$$\left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_i^k}\right| \le M \begin{cases} |x_1|^{\frac{\omega_n - k\omega_i}{\omega_1}}, & \text{если } k < \omega_n \omega_i^{-1}\,, \\ 1 & \text{если } k \ge \omega_n \omega_i^{-1}\,, \end{cases} \tag{9}$$

где $k = 1,\dots,m$, $i = 1,\dots,n-1$, постоянная M не зависит от x' .

П. В силу указанных предположений, кусок границы Γ для точек x , $x_1 \ne 0$, может быть выражен в виде

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1 : x_1 = \psi_1(x'), \text{ если } x_1 > 0 \\ &\Gamma_2 : x_1 = \psi_2(x'), \text{ если } x_1 < 0 \end{aligned}\right\},\ x' = (x_2,\dots,x_n) \in D \tag{10}$$

где D определяется в (5), $\Gamma_1 = \partial G_1 \cap \{x_1 > 0\}$, $G_1 = G \cap \{x_1 > 0\}$, $\Gamma_2 = \partial G_2 \cap \{x_1 < 0\}$, $G_2 = G \cap \{x : x_1 < 0\}$; функции ψ_1, ψ_2 не являются гладкими на замыкании $\bar{D}$, но обладают всеми производными до порядка m в каждой внутренней точке.

Считая, что область D удовлетворяет условию рога типа (6) с параметрами $\alpha' = (\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, β , $\gamma' = (\gamma_2,\dots,\gamma_n)$ при $x_1 = 0$, где α_i , β , γ_i $(i=2,\dots,n)$ определяются в (7), наложим дополнительные ограничения на функции ψ_1 , ψ_2 .

Обозначим через ∂D границу, а через $D(h)$ - подобласть области D , каждая точка y' которой допускает представление вида $y' = x' + t'$, где $x' \in \partial D$, $t' = (t_2,\dots,t_n)$ удовлетворяет условиям $a_i v^{\omega_i} \le t_i \le b_i v^{\omega_i}$, $0 < v < h$, константы a_i , b_i

определены в (6), $i=2,\dots,n$.

Можно показать, используя выполнение условия рога на области D , что существует такая ε-окрестность ($0<\varepsilon<1$) границы ∂D (обозначим ее D_ε), что

а) для любой точки $y'\in D_\varepsilon$ существует $h_1=h_1(y')$ такое, что

$$y'\in D(h_1)\setminus D(h_1/2),\ 0<h_1<c\varepsilon \quad ; \tag{11}$$

в) если $x'\in D_\varepsilon$, а $t'=(t_2,\dots,t_n)$ удовлетворяет условиям $a_i h^{\omega_i}\le t_i\le b_i h^{\omega_i}$ $(i=2,\dots,n)$, $0<h<\varepsilon$, то

$$x'+t'\notin D(h/2) \quad ; \tag{12}$$

с) существует такое $\delta>0$, не зависящее от h и x' , что если $x'\in D_\varepsilon\setminus D(h)$, то

$$y'=x'+t'\in D_{2\varepsilon}\setminus D(h/2), \tag{13}$$

если $t'=(t_2,\dots,t_n)$, $0\le t_i\le\delta h^{\omega_i}\ (i=2,\dots,n)$, $0<h<c\varepsilon$.

Будем предполагать, что функции ψ_k , $k=1,2$, определенные в (10), удовлетворяют ограничениям:

1) если x' , $x'+y'\in D$, то

$$\left|\psi_k(x'+y')-\psi_k(x')\right|\le M_1\left[\sum_{i=2}^{n}|y_i|^{1/\omega_i}\right]^{\omega_1}, \tag{14}$$

где $M_1<\dfrac{a_1}{2}\left[\sum_{i=2}^{n}|b_i|^{1/\omega_i}\right]^{-\omega_1}$, $a_1,b_2,\dots,b_n$ определены в (6);

2) если $x'\in D(h_1)$, $h_1=h_1(x')$, то

$$\left|\frac{\partial^\nu\psi_k}{\partial x_i^\nu}\right|\le M_1 h_1^{\omega_1-\nu\omega_i},\quad i=2,\dots,n,\ \nu=1,\dots,m,\ k=1,2. \tag{15}$$

З а м е ч а н и е 1. В силу ограничений (9)-(15), если $\omega_i<\omega_n$, то область D является цилиндрической по направлению координаты x_i , а если $\omega_i < \omega_1$, то область G является цилиндром вдоль направления координаты x_i ($i = 2,\ldots,n-1$).

Положим

$$\rho_0(x') = \rho(x)\Big|_{x_1=0} = |x_n - \varphi(0,x'')|,\ \bar\rho_k(x) = |\psi_k(x') - x_1|. \qquad (16)$$

При выполнении условий (9)-(15) справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\rho(x) \sim |\psi_k(x')|^{\frac{\omega_n}{\omega_1}-1}\bar\rho_k(x),\\ &\rho_0(x') \sim |\psi_k(x')|^{\frac{\omega_n}{\omega_1}},\\ &h_1(x') \sim |\psi_k(x')|^{1/\omega_1}, \end{aligned}\right\}, x \in G_k;\ k = 1,2. \qquad (17)$$

В силу указанных условий, область G в окрестности плоскости $\{x : x_1 = 0\}$ удовлетворяет также условию рога следующего вида:

$$\tilde{\mathcal{R}}(x;\alpha,\beta,\gamma) = \Big\{y \in R^n :$$

$$0 < a_i \leqslant \frac{y_i - x_i}{v^{\alpha_i}\left[v^{\beta} + \rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_i}\left[v^{\alpha_1} + \bar\rho(x)\right]^{\gamma_i}} \leqslant b_i;$$

$$i = 1,\ldots,n,\ 0 < v < \varepsilon\Big\}, \qquad (18)$$

где параметры α , β , γ ; a , b определяются в (6), (7), $\lambda = \alpha_1\beta^{-1}$.

В силу (2),

$$\tilde\omega_i = \alpha_i + \alpha_1\gamma_i = \ell_1^{-1}\ell_i^{-1}(\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_i) > 0,\ \tilde\omega_i \geqslant \tilde\omega_1\ \ (i=1,\ldots,n). \qquad (19)$$

Из условий (15), (17)-(19) и замечания 1 следует, что

$$\left.\begin{aligned}&|\psi(x'+y')-\psi(x')|\leqslant \frac{a_1}{2}\sigma^{\alpha_1},\\ &h_1(x'+y')\sim h_1(x')\sim[\sigma^{\beta}+\rho_0(x')]^{1/\beta},\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

если $y'=(y_2,\dots,y_n)$, $a_i\sigma^{\widetilde{\omega}_i}[\sigma^{\beta}+\rho_0(x')]^{(1-\lambda)\gamma_i}\leqslant y_i\leqslant$

$\leqslant b_i\sigma^{\widetilde{\omega}_i}[\sigma^{\beta}+\rho_0(x')]^{(1-\lambda)\gamma_i}$, $i=2,\dots,n$; $0<\sigma<h_1(x')$.

Для формулировки основных результатов введём некоторые определения.

Для любого мультииндекса $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ положим $|\xi|=\xi_1+\dots+\xi_n$.

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad D_i^k=\frac{\partial^k}{\partial x_i^k};$$

$$\Delta_h[f(x),e_i]=f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n),$$

$$\Delta_h^m[f(x),e_i]=\Delta_h[\Delta_h^{m-1}[f(x),e_i],e_i];$$

$$\prod_{j=1}^{n\,(\nu)}t_j=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{n}t_j;$$

$$Q(h)=\{x'\in R^{n-1}:|x_1|<2h,-\infty<x_j<+\infty,\ j=2,\dots,n-1\},$$

$$R_k^{n-1}=\{x'\in R^{n-1}:(-1)^{k-1}x_1>0,-\infty<x_j<+\infty,j=2,\dots,n-1\}.$$

Будем говорить, что $f\in B^{\tau}_{p;\varkappa}(D)$, где область D удовлетворяет условиям "а", "в", "с", если конечна норма

$$|f,B^{\tau}_{p;\varkappa}(D)|^{p}=\sum_{i=2}^{n}\int_0^{\varepsilon}dh\int_{D\setminus D(h^{1/\omega_i})}dx'\frac{[\rho_0(x')]^{\varkappa_i p}\left|\Delta^m_{\delta h}[f(x'),e_i]\right|^{p}}{h^{1+p\tau_i}}+$$

$$+|f,L_p(D)|^{p},\qquad(21)$$

где $\tau = (\tau_2, \dots, \tau_n)$, $\varkappa = (\varkappa_2, \dots, \varkappa_n)$, $\tau_i > 0$, $\varkappa_i p + 1 > 0$ $(i=2,\dots,n)$, $1 < p < \infty$, $m > 2 \max\limits_{2 \le i \le n} \tau_i$, ω_i определяются в (8), δ удовлетворяет условию "c".

Положим

$$\|f, \mathring{B}_p^{\rho}(R^{n-1})\|^p = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\varepsilon} dh \int_{Q(h^{\omega_1/\omega_i})} dx' \frac{|\Delta_{\delta h}^m [f(x'), e_i]|^p}{h^{1+p\rho_i}} + \|f, L_p(R^{n-1})\|^p, \tag{22}$$

$$\|f, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_\kappa^{n-1})\|^p = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^{\varepsilon} dh \int_{R_\kappa^{n-1}} dx' \frac{|x_1|^{\varkappa_0 p} |\Delta_{\delta_\kappa h}^m [f(x'), e_i]|^p}{h^{1+p\rho_i+\varkappa_0\omega_1\omega_i^{-1}p}} + \|f, L_p(R^{n-1})\|^p, \tag{23}$$

где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$, $\varkappa_0 \ge 0$, $1 < p < \infty$; $\tau_i > 0$, ω_i определяются в (8)

$$(i=1,\dots,n-1),\ m > 2 \max_{1 \le i \le n-1} [\tau_i + \varkappa_0 \omega_1 \omega_i^{-1}],\ \delta_\kappa = (-1)^{\kappa-1}\delta,\ m\delta < 1.$$

Пусть область G имеет вид

$$G = \{x \in R^n:\ x_n > \varphi(x'),\ \ x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}\}, \tag{24}$$

где G и $\Gamma = \partial G$ удовлетворяют условиям (4), (5), (9)-(15).

Определим

$$\mathcal{F}\Big|_{\Gamma_\kappa} = \lim_{\sigma \to 0} \mathcal{F}(\psi_\kappa(x') + \sigma, x'), \quad k=1,2.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathcal{F} \in W_{p;\sigma}^{\ell}(G)$, $1 < p < \infty$, $\ell_1 - \sigma_1 = \max\limits_{1 \le i \le n}(\ell_i - \sigma_i)$, $\ell_i - \sigma_i - 1/p > 0$ $(i=1,\dots,n)$, G - область вида (24). Тогда $f = \mathcal{F}|_\Gamma$ существует и допускает на каждом куске Γ_κ представление вида $f_\kappa = \mathcal{F}\Big|_{\Gamma_\kappa} = f_\kappa^1 + f_\kappa^2$. Функции f_κ^1 , рассматриваемые на каждом куске Γ_κ как функции точки $x' = (x_2, \dots, x_n)$, принадлежат классу $B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)$, $k=1,2$, где

$$\tau = (\tau_2, \dots, \tau_n),\ \ \varkappa = (\varkappa_2, \dots, \varkappa_n),\ \tau_i = \ell_i(\ell_1 - \sigma_1 - 1/p)(\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_i)^{-1},$$

$$\varkappa_i=(1-\lambda)[\sigma_1+\gamma_i\tau_i],\ \gamma_i=\ell_i^{-1}(\sigma_i-\sigma_1),\ i=2,\dots,n;\ \lambda=\omega,\omega_n^{-1},$$

и удовлетворяют оценке

$$\| f_k^1, B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)\| \leq c\,\|\mathcal{F}, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\|,\quad k=1,2. \tag{25}$$

Функции f_k^1, f_k^2, рассматриваемые на Γ_k как функции точки $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$

$$f^1(x')=\begin{cases} f_1^1(x'), & x_1>0,\\ f_2^1(x'), & x_1<0,\end{cases}\qquad f^2(x')=\begin{cases} f_1^2(x'), & x_1>0,\\ f_2^2(x'), & x_1<0,\end{cases}$$

удовлетворяют оценкам

$$\| f^k, \mathring{B}_p^{\rho}(R^{n-1})\| \leq c\,\|\mathcal{F}, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\|, \tag{26}$$

$$\| f_k^2, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_k^{n-1})\| \leq c\,\|\mathcal{F}, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\|, \tag{27}$$

где $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_{n-1})$, $\rho_i=\ell_i(\ell_n-\sigma_n-1/p)(\ell_n-\sigma_n+\sigma_i)^{-1}$ $(i=1,\dots,n-1)$,

$\varkappa_0$ – произвольное число из отрезка $[0,A]$,

$$A=\frac{(\ell_1-\sigma_1)-(\ell_n-\sigma_n)}{\ell_n-\sigma_n+\sigma_1}\max_{1\leq i\leq n}\ell_i,\quad k=1,2.$$

Т е о р е м а 2. Пусть область G имеет вид (24). Зададим на $\Gamma=\partial G$ функцию f, которая на каждом куске Γ_k, $k=1,2$, может быть представлена в виде $f_k=f_k^1+f_k^2$, где

1) каждая функция f_k^1, как функция точки $x'=(x_2,\dots,x_n)$, принадлежит классу $B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)$, $\tau=(\tau_2,\dots,\tau_n)$; $\varkappa=(\varkappa_2,\dots,\varkappa_n)$,

$$\tau_i=\ell_i\,\frac{\ell_1-\sigma_1-1/p}{\ell_1-\sigma_1+\sigma_i},\quad \varkappa_i=\frac{(\ell_1-\sigma_1)-(\ell_n-\sigma_n)}{\ell_1}\left[\sigma_1+\frac{\sigma_i-\sigma_1}{\ell_i}\tau_i\right],\ i=2,\dots,n,\ 1<p<\infty;$$

2) функции

$$f^1=\begin{cases} f_1^1, & x_1>0,\\ f_2^1, & x_1<0,\end{cases}\qquad f^2=\begin{cases} f_1^2, & x_1>0,\\ f_2^2, & x_1<0,\end{cases}$$

рассматриваемые как функции точки $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, удовлетворяют оценкам

$$\|f^k, \overset{\circ}{B}{}^{\rho}_{p}(R^{n-1})\| < \infty, \quad \sup_{\varkappa_0\in[0,A]} \|f^2_k, B^{\rho,\varkappa_0}_{p}(R^{n-1}_k)\| < \infty,$$

где $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_{n-1})$, $\rho_i=\ell_i(\ell_n-\sigma_n-1/p)(\ell_n-\sigma_n+\sigma_i)^{-1}$, $i=1,\dots,n-1$; $k=1,2$,

$$1<p<\infty, \quad A=\frac{(\ell_1-\sigma_1)-(\ell_n-\sigma_n)}{\ell_n-\sigma_n+\sigma_1}\max_{1\le i\le n}\ell_i, \quad k=1,2.$$

Тогда в области G существует функция $\mathcal{F}\in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ такая, что $\mathcal{F}|_{\Gamma_k}=f_k$, $k=1,2$;

$$|\mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)| \le c\sum_{k=1}^{2}\Big[\|f^1_k, B^{r}_{p;\varkappa}(D)\| + \|f^k, \overset{\circ}{B}{}^{\rho}_{p}(R^{n-1})\| +$$

$$+ \sup_{\varkappa_0\in[0,A]}\|f^2_k, B^{\rho,\varkappa_0}_{p}(R^{n-1}_k)\|\Big], \qquad (28)$$

где C не зависит от f и $\mathcal{F}$.

В следующих параграфах будут доказаны некоторые леммы, необходимые для доказательства теорем 1, 2. Рассмотрения, проводимые ниже, следуют схеме, предложенной в работе [7], и используют интегральное представление функций, аналогичное полученному автором в [18, 19].

§ 2. Граничные свойства функций на поверхнсстях, принадлежаших классу Гёльдера

Рассмотрим область

$$G_1=\{x\in R^n:\ 0<x_1<\psi(x'),\ x'=(x_2,\dots,x_n)\in D\}=G\cap\{x_1>0\}. \qquad (29)$$

Будем считать, что область G удовлетворяет перечисленным выше условиям. Рассмотрим в области G_1 класс функций $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p;\sigma}(G_1)$, определяя его как замыкание по норме (1) множества всех гладких функций, обращающихся в нуль при $x_1 \leq 0$, т.е. $\mathcal{F} \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p;\sigma}(G_1)$, если $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ и $D_1^{k}\mathcal{F}(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \ell_1 - 1$.

В дальнейшем будем также считать, что $supp\,\mathcal{F}$ ограничен и что функция $\psi(x')$ доопределена на все R^{n-1} с условием $|\psi(x')| \leq C$.

При наших предположениях на область G для любого ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, справедливо представление

$$\mathcal{F}(x) = \widetilde{A}_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}](x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_1} d\sigma \int_{R^n} dt\, \widetilde{\pi}_i(\sigma, x)\sigma^{-|\alpha|}\left[\sigma^{\beta} + \rho_0(x')\right]^{-(1-\lambda)|\gamma| + (1-\lambda)\gamma_i \ell_i} \times$$

$$\times \left[\sigma^{\alpha_1} + \bar{\rho}(x)\right]^{-|\gamma| + \gamma_i \ell_i} \prod_{j=1}^{n} K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}\left[\sigma^{\beta} + \rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_j}\left[\sigma^{\alpha_1} + \bar{\rho}(x)\right]^{\gamma_j}}\right) \times D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t), \quad (30)$$

где $K_{ij} \in C^{\infty}(R)$, $supp\, K_{ij} = [a_j, b_j]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$;

$$\widetilde{\pi}_i(\sigma, x) = \alpha_i + \beta(1-\lambda)\gamma_i \frac{\sigma^{\beta}}{\sigma^{\beta} + \rho_0(x')} + \alpha_1 \gamma_i \frac{\sigma^{\alpha_1}}{\sigma^{\alpha_1} + \bar{\rho}(x)},$$

$$\widetilde{A}_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}](x) = \int_{R^n} dt\, \mathcal{F}(t) \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_1^{-\alpha_i}\left[\varepsilon_1^{\beta} + \rho_0(x')\right]^{-(1-\lambda)\gamma_i}\left[\varepsilon_1^{\alpha_1} + \bar{\rho}(x)\right]^{-\gamma_i} \times$$

$$\times K_i\left(\frac{t_i - x_i}{\varepsilon_1^{\alpha_i}\left[\varepsilon_1^{\beta} + \rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_i}\left[\varepsilon_1^{\alpha_1} + \bar{\rho}(x)\right]^{\gamma_i}}\right),$$

$K_i \in C^{\infty}(R)$, $supp K_i = [a_i, b_i]$, $\int K_i(\tau)d\tau = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, параметры α, β, γ ; a, b ; ε, λ определяются в (6), (7), (18). Вывод представления (30) аналогичен выводу интегрального тождества в [18, 19] .

Положим

$$\mathcal{F}\big|_{\Gamma_1} = \lim_{\upsilon\to 0} \mathcal{F}(\psi(x')+\upsilon, x') = f(x').$$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F} \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p;\sigma}(G_1)$, где G_1 имеет вид (29), $\ell_1-\sigma_1 = \max\limits_{1\le i\le n}(\ell_i-\sigma_i) > \frac{1}{p}$. Тогда $\mathcal{F}\big|_{\Gamma_1} = f$ существует и имеет место оценка

$$\| f, B^{\tau}_{p;\varkappa}(D)\| \le c\,\|\mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|, \tag{31}$$

где $\tau = (\tau_2, \ldots, \tau_n)$, $\varkappa = (\varkappa_2, \ldots, \varkappa_n)$, $1 < p < \infty$,

$$\tau_i = \ell_i(\ell_1-\sigma_1-1/p)(\ell_1-\sigma_1+\sigma_i)^{-1},\ \varkappa_i = (1-\lambda)\left[\sigma_1+\frac{\sigma_i-\sigma_1}{\ell_i}\tau_i\right]\ (i=2,\ldots,n),$$

константа c не зависит от $\mathcal{F}$.

Доказательство. Оценку (31) достаточно доказать для гладких функций. Далее имеем

$$f(x') = \frac{1}{(\ell_1-1)!}\int_0^{\psi(x')} [\psi(x')-u]^{\ell_1-1} D_1^{\ell_1}\mathcal{F}(u,x')\,du.$$

Отсюда, учитывая ограниченность $\operatorname{supp}\mathcal{F}$, (2), (17), получаем

$$\| f, L_p(D)\| \le c\,\|\mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|.$$

В дальнейшем будет также использоваться очевидное неравенство

$$|\Delta_h^m [f(x), e_\nu]| \le c h^{\ell-1}\int_0^{mh} |D_\nu^{\ell} f(x+te_\nu)|\,dt, \tag{32}$$

если $\ell \le m$.

Из результатов работы [3] следует, что оценка (31) выполняется в области $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_\varepsilon$. Следовательно, достаточно доказать оценку для области $\mathcal{D}_\varepsilon$.

Для каждого $x'\in\mathcal{D}_\varepsilon$, в силу условия "а", существует такое число $h_1=h_1(x')$, что $x'\in\mathcal{D}(h_1)\setminus\mathcal{D}(h_1/2)$.

Используя представление (30), полагая $\varepsilon_1=h_1$, $x_1=\psi(x')$, $h<[2^{-1}h_1]^{\omega_\nu}$ и учитывая (17), (18), получаем

$$\Delta^m_{\delta h}\left[f(x'),e_\nu\right]=\int\limits_{R^n}dt\,\mathcal{F}(t)\Delta^m_{\delta h}\left\{h_1^{-|\tilde\omega|}\left[h_1^\beta+\rho_0(x')\right]^{-(1-\lambda)|\gamma|}\times\right.$$

$$\left.\times K_1\left(\frac{\psi(x')-t_1}{h_1^{\alpha_1}}\right)\prod_{i=2}^n K_i\left(\frac{t_i-x_i}{h_1^{\tilde\omega_i}\left[h_1^\beta+\rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_i}}\right)\right\}+$$

$$+\Delta^m_{\delta h}\left\{\sum_{i=1}^n\int\limits_0^{a_\nu}d\sigma\int\limits_{R^n}dt\,\tilde\pi_i(\sigma,x')\sigma^{-|\tilde\omega|+\alpha_1\gamma_i\ell_i}\left[\sigma^\beta+\rho_0(x')\right]^{-(1-\lambda)|\gamma|+(1-\lambda)\gamma_i\ell_i}\times\right.$$

$$\left.\times K_{i1}\left(\frac{\psi(x')-t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^n K_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\tilde\omega_j}\left[\sigma^\beta+\rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_j}}\right)D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_{a_\nu}^{h_1}d\sigma\int\limits_{R^n}dt\,\sigma^{-|\tilde\omega|+\alpha_1\gamma_i\ell_i}\Delta^m_{\delta h}\left\{\tilde\pi_i(\sigma,x')\left[\sigma^\beta+\rho_0(x')\right]^{-(1-\lambda)|\gamma|+(1-\lambda)\gamma_i\ell_i}\times\right.$$

$$\left.\times K_{i1}\left(\frac{\psi(x')-t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^n K_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\tilde\omega_j}\left[\sigma^\beta+\rho_0(x')\right]^{(1-\lambda)\gamma_j}}\right)\right\}D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)=$$

$$=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3\,,\tag{33}$$

где $a_\nu = a_\nu(h, h_1) = h^{1/\tilde{\omega}_\nu} h_1^{-\frac{\beta(1-\lambda)\gamma_\nu}{\tilde{\omega}_\nu}}$, $\tilde{\pi}_i(v, x') = \tilde{\omega}_i + \beta(1-\lambda)\gamma_i v^\beta [v^\beta + \rho_0(x')]^{-1}$.

Оценим отдельно каждое слагаемое $\mathcal{J}_s$, $s = 1, 2, 3$.

$$\int_0^\varepsilon dh \int_{D_\varepsilon \setminus D(h^{1/\omega_\nu})} dx' \, h^{-1-p\tau_\nu} [\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p} |\mathcal{J}_2|^p \leq$$

(неравенства Гёльдера и Харди)

$$\leq c \sum_{i=1}^n \int_0^\varepsilon dh \int dx' \int dt \, h^{-1-p\tau_\nu \tilde{\omega}_\nu + p - |\tilde{\omega}| + \alpha_1 \gamma_i l_i p} [\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p - (1-\lambda)\tau_\nu \gamma_\nu p} \times$$

$$\times [h^\beta + \rho_0(x')]^{-(1-\lambda)|\gamma| + (1-\lambda)\gamma_i l_i p} \left| K_{i1}\left(\frac{\psi(x') - t_1}{h^{\alpha_1}}\right)\right| \times$$

$$\times \prod_{j=2}^n \left| K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{h^{\tilde{\omega}_j}[h^\beta + \rho_0(x')]^{(1-\lambda)\gamma_j}}\right)\right| |D_i^{l_i} \mathcal{F}(t)|^p. \tag{34}$$

Поскольку $supp\, K_{i1} = [a_1, b_1]$, то $0 < a_1 h^{\alpha_1} \leq \psi(x') - t_1 \leq b_1 h^{\alpha_1}$ и, учитывая (20), получим $0 < c_1 h^{\alpha_1} \leq \psi(t') - t_1 \leq d_1 h^{\alpha_1}$, $\psi(t') \sim \psi(x')$ при
$$a_i h^{\tilde{\omega}_i} [h^\beta + \rho_0(x')]^{(1-\lambda)\gamma_i} \leq t_i - x_i \leq b_i h^{\tilde{\omega}_i} [h^\beta + \rho_0(x')]^{(1-\lambda)\gamma_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда, учитывая (17), (20), обозначая через $\tilde{K}_{i1}$ характеристическую функцию отрезка $[c_1, d_1]$ и интегрируя по x', продолжим оценку (34)

$$\int_0^\varepsilon dh \int_{D_\varepsilon \setminus D(h^{1/\omega_\nu})} dx' \, h^{-1-p\tau_\nu} |\rho_0(x')|^{\varkappa_\nu p} |\mathcal{J}_2|^p \leq$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty}dh\int_{G}dt\,h^{-1}\left|\tilde{K}_{i1}\left(\frac{\psi(t')-t_1}{h^{\alpha_1}}\right)\right||\rho(t)|^{\sigma_i p}\,|D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)|^{p}\leqslant$$

(подстановка по h : $h^{-\alpha_1}[\psi(t')-t_1] = z$)

$$\leqslant c\ln\left|\frac{d_1}{c_1}\right|\sum_{i=1}^{n}\int_{G}dt\,[\rho(t)]^{\sigma_i p}|D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)|^{p}\leqslant c\,\|\mathcal{F},W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|. \qquad (35)$$

Используя (32), условие "a", оценки (15), (17), замечание 1, рассмотрим интеграл J_3 :

$$\int_{0}^{\varepsilon}dh\int_{D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\omega_\nu})}dx'\,h^{-1-p\tau_\nu}[\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p}\,|J_3|^{p}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{n}\sum{}'\int_{0}^{\varepsilon}dh\int_{D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\omega_\nu})}dx'\,h^{-1-p\tau_\nu+(\ell_\nu-1)p}[\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p}\times$$

$$\times\left[\int_{0}^{m\delta h}du\int_{a_\nu}^{h_1}dv\int_{R^n}dt\,v^{-|\tilde{\omega}|+\alpha_1\gamma_i\ell_i-\tilde{\omega}_\nu\ell_\nu}[v^{\beta}+\rho_0(x'+ue_\nu)]^{-(1-\lambda)|\gamma|+(1-\lambda)\gamma_i\ell_i}\right.\times$$

$$\times h_1^{(\tilde{\omega}_\nu-\omega_\nu)\ell_\nu}\left|K'_{i1}\left(\frac{\psi(x'+ue_\nu)-t_1}{v^{\alpha_1}}\right)\right|\left|K'_{iv}\left(\frac{t_\nu-x_\nu-u}{v^{\tilde{\omega}_\nu}[v^{\beta}+\rho_0(x'+ue_\nu)]^{(1-\lambda)\gamma_\nu}}\right)\right|\times$$

$$\times\left.\prod_{j=2}^{n\,(\nu)}\left|K'_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{v^{\tilde{\omega}_j}[v^{\beta}+\rho_0(x'+ue_\nu)]^{(1-\lambda)\gamma_j}}\right)\right||D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)|\right]^{p}, \qquad (36)$$

где K'_{ij} означает, что функции K_{ij} , быть может, дифференцировались, а $\sum{}'$ – сумма по индексам дифференцирования.

Далее, используя неравенства Гёльдера, Минковского, Харди и оценки, аналогичные использованным при получении (35), продолжим оценку (36).

$$\| J_3, B^{\tau}_{p;\varkappa}(D_\varepsilon)\|^p \leqslant c\sum_{i=1}^{n}\sum{}' \int\limits_G dt \int\limits_0^\infty dh\, h^{-1+\alpha_1\sigma_i p}[\rho_0(t)]^{(1-\lambda)\sigma_i p} \times$$

$$\times \left|\tilde{K}'_{i1}\left(\frac{\psi(t')-t_1}{h^{\alpha_1}}\right)\right|\left|D_i^{l_i}\mathcal{F}(t)\right|^p \leqslant \text{(соотношения (17))} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\mathcal{F}, W^{l}_{p;\sigma}(G)\|^p. \qquad (37)$$

Используя (32), (15), (17), (20) и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при получении оценок (34)-(37), оценим интеграл J_1 :

$$\int\limits_0^\varepsilon dh \int\limits_{D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\omega_\nu})} dx'\, h^{-1-p\tau_\nu}[\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p}|J_1|^p \leqslant$$

$$\leqslant c\sum{}' \int\limits_0^\varepsilon dh \int\limits_{D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\omega_\nu})} dx'\, h^{-1-p\tau_\nu+(l_\nu-1)p}\left[\rho_0(x')\right]^{\varkappa_\nu p} \times$$

$$\times\left[\int\limits_0^{m\delta h} du \int\limits_{R^n} dt\, h_1^{-|\omega|-\omega_\nu l_\nu}\left|\tilde{K}'_1\left(\frac{\psi(t')-t_1}{h_1^{\alpha_1}}\right)\right|\left|\tilde{K}'_\nu\left(\frac{t_\nu-x_\nu-u}{h_1^{\omega_\nu}}\right)\right| \times\right.$$

$$\left.\times\prod_{j=2}^{n}{}^{(\nu)}\left|\tilde{K}'_j\left(\frac{t_j-x_j}{h_1^{\omega_j}}\right)\right||\mathcal{F}(t)|\right]^p, \qquad (38)$$

где $\tilde{K}'_j$ - "сглаженная" характеристическая функция отрезков, определяемых по $\operatorname{supp} K_j$ аналогично тому, как это было проделано при получении оценки (35).

Так как $\mathcal{F}\in \overset{\circ}{W}{}^{l}_{p;\sigma}(G_1)$, то

$$\mathcal{F}(t_1,t') = \frac{1}{(\ell_1-1)!}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\ell_1-1}D_1^{\ell_1}\mathcal{F}(\tau,t')d\tau,$$

и, учитывая выбор $h_1(x')$, условия (14), (17), (20), получаем

$$|\mathcal{F}(t_1,t')| \leq c h_1^{1-\beta\sigma_1} t_1^{-1}\int_0^{t_1}d\tau\,[\rho(\tau,t')]^{\sigma_1}\,|D_1^{\ell_1}\mathcal{F}(\tau,t')|. \qquad (39)$$

Далее, обозначая

$$\tilde{\Phi}'(t,x',u,z,h_1) = z^{-|\tilde{\omega}|-\alpha_1\sigma_\nu} h_1^{-\beta(1-\lambda)|\gamma|-\beta(1-\lambda)\sigma_\nu} \times$$

$$\times \tilde{K}_1'\left(\frac{\varphi(t')-t_1}{z^{\alpha_1}}\right)\tilde{K}_\nu'\left(\frac{t_\nu-x_\nu-u}{z^{\tilde{\omega}_\nu}h_1^{\beta(1-\lambda)\gamma_\nu}}\right)\prod_{j=2}^{n(\nu)}\tilde{K}_j'\left(\frac{t_j-x_j}{z^{\tilde{\omega}_j}h_1^{\beta(1-\lambda)\gamma_j}}\right),$$

получаем

$$\tilde{\Phi}'(t,x',u,h_1,h_1) = \tilde{\Phi}'(t,x',u,a_\nu,h_1) + \int_{a_\nu}^{h_1}dz\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\tilde{\Phi}'(t,x',u,z,h_1)\right], \qquad (40)$$

где $a_\nu = a_\nu(h,h_1) = h^{\frac{1}{\tilde{\omega}_\nu}} h_1^{-\frac{\beta(1-\lambda)\gamma_\nu}{\tilde{\omega}_\nu}}$.

Подставляя (40) в (38), используя оценки (39), (14), (17), (20), получаем

$$|J_1 B_{p;\varkappa}^{r}(D_\varepsilon)| \leq c\sum_{\nu=2}^{n}{\sum}'\int_0^{\varepsilon}dh\int_{D_\varepsilon\setminus D(h^{1/\omega_\nu})}dx'\,h^{-1-pr_\nu+(\ell_\nu-1)p}[\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p}\times$$

$$\times\left[\int_0^{m\delta h}du\int_{R^n}dt\,|\tilde{\Phi}'(t,x',u,a_\nu,h_1)|\,|t_1|^{-1}\int_0^{t_1}d\tau\,[\rho(\tau,t')]^{\sigma_1}|D_1^{\ell_1}\mathcal{F}(\tau,t')|\right]^p +$$

$$+ c\sum_{\nu=2}^{n}\sum{}' \int_0^{\varepsilon} dh \int_{D_\varepsilon \setminus D(h^{1/\omega_\nu})} dx' h^{-1-p\tau_\nu+(\ell_\nu-1)p} [\rho_0(x')]^{\varkappa_\nu p} \Big[\int_0^{m\delta h} du \int_{a_\nu}^{h_1} dz \int_{R^n} dt \times$$

$$\times \Big| \frac{\partial}{\partial z} \hat{\Phi}'(t,x',u,z,h_1) \Big| |t_1|^{-1} \int_0^{t_1} d\tau [\rho(\tau,t')]^{\sigma_1} |D_1^{\ell_1} \mathcal{F}(\tau,t')| \Big]^p \leq$$

(неравенства Гёльдера, Минковского, условия (17), (20), подстановка по $h : h^{1/\bar{\omega}_\nu} \; h_1^{-\frac{\beta(1-\lambda)\gamma_\nu}{\bar{\omega}_\nu}} = \bar{h}$, оценки, аналогичные установленным выше, неравенство Харди)

$$\leq c \,\| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G) \|^p .$$

Лемма 1 доказана.

Следующая лемма показывает, что граничные условия, полученные в лемме 1, являются достаточными для продолжения граничной функции в класс $W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$.

Л е м м а 2. Пусть поверхность Γ допускает представление $\Gamma : x_1 = \psi(x')$, $x' \in D$, где область D и функция ψ удовлетворяют условиям (10)-(15) при α, β, γ, определяемых в (7). Тогда если $f \in B^{\tau}_{p;\varkappa}(D)$ на поверхности Γ, где

$$\tau = (\tau_2, \ldots, \tau_n), \quad \varkappa = (\varkappa_2, \ldots, \varkappa_n),$$

$$\tau_j = \ell_j (\ell_1 - \sigma_1 - 1/p)(\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_j)^{-1}, \quad \varkappa_j = \frac{(\ell_1-\sigma_1)-(\ell_n-\sigma_n)}{\ell_1}[\sigma_1 + \gamma_j \tau_j], \; j=2,\ldots,n,$$

$$\ell_1 - \sigma_1 = \max_{1\leq i\leq n} (\ell_i - \sigma_i) > \ell_n - \sigma_n, \quad 1 < p < \infty,$$

то существует функция $\mathcal{F}$, определенная на области G вида (29), такая, что

1) $\mathcal{F}\big|_{\Gamma} = f$,

$$2)\ \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G) \| \leq C \, \| f, B^{r}_{p;\varkappa}(D) \|, \tag{41}$$

где $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, константа C не зависит от f и $\mathcal{F}$.

Доказательство. Будем считать, что f – гладкая функция с ограниченным носителем. В силу сделанных предположений на область D, функцию f можно представить в виде (см. [18, 20])

$$f(x') = B_\varepsilon[f](x') + \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\varepsilon} dh \int dz_i \int dt \; \bar{\pi}_i(h, x') h^{-1-\bar{\alpha}_i - |\bar{\alpha}|} \times$$

$$\times \left[h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{-\bar{\gamma}_i - |\bar{\gamma}|} \eta_i \left(\frac{z_i}{h^{\bar{\alpha}_i}\left[h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{\bar{\gamma}_i}} \right) \prod_{j=2}^{n} \chi_{ij} \left(\frac{t_j - x_j}{h^{\bar{\alpha}_j}\left[h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{\bar{\gamma}_j}} \right) \times$$

$$\times \Delta^{m}_{\delta z_i} \left[f(t'), e_i \right],$$

где $\chi_{ij}, \eta_i \in C^{\infty}(R)$, $\operatorname{supp} \chi_{ij} = [a_j, b_j]$, $\operatorname{supp} \eta_i = [a_i, b_i]$, $i, j = 2, \ldots, n$;

$$B_\varepsilon[f](x') = \int_{R^{n-1}} dy \int_{R^{n-1}} dz \, f(x' + t + z) \prod_{i=2}^{n} \varepsilon^{-2\bar{\alpha}_i} \left[\varepsilon^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{-2\bar{\gamma}_i} \times$$

$$\times \Omega_i \left(\frac{y_i}{\varepsilon^{\bar{\alpha}_i}\left[\varepsilon^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{\bar{\gamma}_i}} \right) \Omega_i \left(\frac{z_i}{\varepsilon^{\bar{\alpha}_i}\left[\varepsilon^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')\right]^{\bar{\gamma}_i}} \right),$$

$$\Omega_i \in C^{\infty}(R), \quad \operatorname{supp} \Omega_i = [a_i, b_i], \quad i = 2, \ldots, n;$$

$$\int \Omega_i(\tau) d\tau = 1, \quad i = 2, \ldots, n;$$

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n), \ \bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n), \ \bar{\beta} = \bar{\alpha}_n ,$$

$$\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_1 \ell_i^{-1} (\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_i), \bar{\alpha}_1 > 0, \bar{\gamma}_i = (1-\lambda)(\sigma_i - \sigma_n)\ell_i^{-1} \ell_1 (\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_n)^{-1}, \ i = 2, \dots, n;$$

параметры $a = (a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_2, \dots, b_n)$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$,

$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, λ, ε определяются в (1), (2), (6)-(8), (18), (19); функция $\rho_0(x')$ определена в (16).

Введем функцию $\chi_1 \in C^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \chi_1 = [-2, 2]$, $\chi_1(t) \equiv 1$ при $t \in [-1, 1]$. Тогда при условии $t = (t_2, \dots, t_n)$, $|t_j| \le |b_j| h^{\bar{\alpha}_j} |h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')|^{\bar{\gamma}_j}$, $j = 2, \dots, n$, в силу (20), получим

$$\chi_1 \left(\frac{\varphi(x'+t) - \varphi(x')}{a_1 h^{\bar{\alpha}_1} [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_1}} \right) \equiv 1, \tag{42}$$

где $\bar{\gamma}_1 = (1-\lambda)(\sigma_1 - \sigma_n)(\ell_1 - \sigma_1 + \sigma_n)^{-1}$.

Положим

$$\mathcal{F}(x_1, x') = B_\varepsilon[f](x') + \sum_{i=2}^{n} \int_0^\varepsilon dh \int dz_i \int dt \, \bar{\pi}_i(h, x') h^{-1+\bar{\alpha}_i - |\bar{\alpha}|} \times$$

$$\times [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{-\bar{\gamma}_i - |\bar{\gamma}|} \chi_1 \left(\frac{\varphi(x'+t') - x_1}{a_1 h^{\bar{\alpha}_1} [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_1}} \right) \times$$

$$\times \eta_i \left(\frac{z_i}{h^{\bar{\alpha}_i} [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_i}} \right) \prod_{j=2}^{n} \chi_{ij} \left(\frac{t_j}{h^{\bar{\alpha}_j} [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_j}} \right) \Delta_{\delta z_i}^m [f(x'+t), e_i] =$$

$$= F_0(x') + \sum_{i=2}^{n} F_i(x). \tag{43}$$

Покажем, что функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Из (42) следует, что $\mathcal{F}(\psi(x'), x') = f(x')$. Докажем оценку (41).

Так как $B_\varepsilon [f] \in C_0^\infty$, то оценку достаточно доказать для

слагаемых F_i в (43), $i=2,\ldots,n$.

$$\mathcal{J}_i^\nu = \int_G dx\, [\rho(x)]^{\sigma_\nu p} |D_\nu^{\ell_\nu} F_i(x)|^p \leqslant \text{(оценки (17), (42))} \leqslant$$

$$\leqslant \int_G dx\, [\rho_0(x')]^{(1-\lambda)\sigma_\nu p} [\bar\rho(x)]^{\sigma_\nu p} \Bigg\{ \int_0^\varepsilon dh \int dz_i \int dt\, h^{-1-|\bar\alpha|\bar\alpha_i-\bar\alpha_\nu \ell_\nu} \times$$

$$\times \left[h^{\bar\beta} + \rho_0(x')\right]^{-|\bar\gamma|-\bar\gamma_i-\bar\gamma_\nu \ell_\nu} \Bigg[\left| \chi_1' \left(\frac{\bar\rho(x)}{a_1 h^{\bar\alpha_1} |h^{\bar\beta}+\rho_0(x')|^{\bar\gamma_1}} \right) \right| +$$

$$+ \int_{-A}^{A} du \left| D\chi_1' \left(\frac{\bar\rho(x)}{a_1 h_1^{\bar\alpha_1} [h^{\bar\beta}+\rho_0(x')]^{\bar\gamma_1}} + u \right) \right| \Bigg] \left| \eta_i' \left(\frac{z_i}{h^{\bar\alpha_i} [h^{\bar\beta}+\rho_0(x')]^{\bar\gamma_i}} \right) \right| \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{n} \left| \chi_{ij}' \left(\frac{t_j}{h^{\bar\alpha_j} | h^{\bar\beta} + \rho_0(x')|^{\bar\gamma_j}} \right) \right| \left| \Delta_{\delta z_i}^m \left[f(x'+t), e_i \right] \right| \Bigg\}^p \quad (44)$$

Применяя неравенство Гёльдера, подобно тому, как это было проделано в лемме 2 из [7], осуществляя подстановку по x_1 : $x_1 = \psi(x') - a_1 h^{\bar{\alpha}_1}[h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_1} y$ и интегрируя по y, продолжим оценку (44)

$$J_i^{\nu} \leq c\sum_{i=2}^{n} \int_D dx' \int dz_i \int dt \int_0^{\varepsilon} dh\, [\rho_0(x')]^{(1-\lambda)\sigma_\nu p}\, h^{-1-\bar{\alpha}_i-|\bar{\alpha}|-\bar{\alpha}_\nu l_\nu p+\bar{\alpha}_1(\sigma_1 p+1)} \times$$

$$\times [h^{\bar{\beta}} + \rho_0(x')]^{-|\bar{\gamma}|-\bar{\gamma}_i-\bar{\gamma}_\nu l_\nu p+\bar{\gamma}_1(\sigma_\nu p+1)} \left| \eta_i'\left(\frac{z_i}{h^{\bar{\alpha}_i}[h^{\bar{\beta}}+\rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_i}}\right)\right| \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{n-1} \left| \chi_{ij}'\left(\frac{t_j - x_j}{h^{\bar{\alpha}_j}[h^{\bar{\beta}}+\rho_0(x')]^{\bar{\gamma}_j}}\right)\right| \left| \chi_{in}'\left(\frac{t_n - x_n}{h^{\bar{\alpha}_n}}\right)\right| \left| \Delta^m_{\delta z_i}[f(t), e_i]\right|^p. \quad (45)$$

В силу (16), (17), (20), условия "в" на область D и условий на носители функций χ_{ij}, η_i, $i, j = 2, \ldots, n$, $t = (t_2, \ldots, t_n)$, в интегралах из (45) удовлетворяет условию $t \in D \setminus D(z_i^{1/\omega_i})$, $i = 2, \ldots, n$. Характеристическую функцию множества $D \setminus D(z_i^{1/\omega_i})$ обозначим через $\theta_i(t; z_i)$.

Далее, осуществляя замены переменных по x' : $x_n - \varphi(0, x'') = \bar{x}_n$, $x_j = \bar{x}_j$, $j = 2, \ldots, n-1$; по t : $t_n = \varphi(0, \bar{t}'') + \bar{t}_n$, $\bar{t}_j = t_j$, $j = 2, \ldots, n-1$; используя оценку (9), замечание 1, обозначая

$$f_{[i]}(t'', \bar{t}_n ; z_i) = \left\{ \Delta^m_{\delta z_i}[f(t'', t_n), e_i] \right\} \Big|_{t_n = \bar{t}_n + \varphi(0, t'')}$$

и интегрируя по x'', получаем

$$
J_i^{\nu} \leq c \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\infty} d\bar{x}_n \int_0^{\infty} dz_i \int_{R^{n-1}} dt'' \int_0^{\infty} d\bar{t}_n \int_0^{\varepsilon} dh\, \bar{\theta}_i(\bar{t}; z_i)\, \bar{x}_n^{(1-\lambda)\sigma_\nu \rho} h^{-1-\bar{\alpha}_i-\bar{\alpha}_n-\bar{\alpha}_1 \ell_\nu \rho} \times
$$

$$
\times h^{\bar{\alpha}_1(\sigma_\nu \rho+1)} \left[h^{\bar{\beta}} + \bar{x}_n\right]^{-\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_\nu \ell_\nu \rho + \bar{\gamma}_1(\sigma_\nu \rho+1)} \left| \eta_i' \left(\frac{z_i}{h^{\bar{\alpha}_i} \left[h^{\bar{\beta}} + \bar{x}_n\right]^{\bar{\gamma}_i}} \right) \right| \times
$$

$$
\times \chi_{in}' \left| \left(\frac{\bar{t}_n - \bar{x}_n}{h^{\bar{\alpha}_n}} \right) \right| \left| f_{[i]}(t'', \bar{t}_n ; z_i) \right|^{p} \leq
$$

(подстановки $h = \bar{x}_n^{1/\bar{\beta}} h_1$, $\bar{t}_n = \bar{x}_n (1 + h_1^{\bar{\beta}} \bar{z}_n)$, условие

$\operatorname{supp} \eta_i = [a_i, b_i]$, $0 < a_i < b_i$, $i = 2, \ldots, n$)

$$
\leq c \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\infty} d\bar{x}_n \int_0^{\infty} dz_i \int_{R^{n-1}} dt'' \int_0^{\infty} d\bar{z}_n \int_0^{\infty} dh_1 \bar{\theta}_i(t'', \bar{x}_n(1+h^{\bar{\beta}} \bar{z}_n); z_i)\, \bar{x}_n^{\varkappa_i \rho} \times
$$

$$
\times h_1^{-1} \left[1 + h_1^{\bar{\beta}}\right]^{-(1-\lambda)\sigma_\nu \rho + \varkappa_i \rho} \left| \chi_{in}'(\bar{z}_n) \right| \left| \eta_i' \left(\frac{z_i \bar{x}_n^{-\frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\beta}} - \bar{\gamma}_i}}{h_1^{\bar{\alpha}_i} \left[1 + h_1^{\bar{\beta}}\right]^{\bar{\gamma}_i}} \right) \right| \times
$$

$$
\times z_i^{-1-p\varkappa_i} \left| f_{[i]}\left(t'', \bar{x}_n (1 + h_1^{\bar{\beta}} \bar{z}_n)\right); z_i \right|^{p} \leq
$$

(подстановка по $\bar{x}_n$: $\bar{x}_n(1+h_1^{\beta}\bar{z}_n) = t_n - \varphi(0,t'')$, условия $\operatorname{supp}\chi_{in} = [a_n, b_n]$, $\operatorname{supp}\eta_i = [a_i, b_i]$, $0 < a_n < b_n$, $0 < a_i < b_i$, $i = 2, \ldots, n$)

$$\leqslant c \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\varepsilon} dz_i \int_{D \setminus D(z_i^{-1/\omega_i})} dt\, z_i^{-1-p\tau_i} [\rho_0(t)]^{\varkappa_i p} |\Delta^m_{\delta z_i}[f(t), e_i]|^p \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 dh_1 h_1^{-1} \left| \tilde{\eta}_i' \left(\frac{z_i h_1^{-\alpha_i}}{[\rho(t)]^{\bar{\alpha}_i/\bar{\beta} + \bar{\gamma}_i}} \right) \right| + \int_1^{\infty} dh_1 h_1^{-1} [1 + h_1^{\bar{\beta}}]^{-1-(1-\lambda)\sigma_\nu p} \right\} \leqslant$$

(оценки, аналогичные оценкам, проведенным в лемме 1, условия $\sigma_\nu p + 1 > 0$, $0 < \lambda < 1$)

$$\leqslant c \| f, B^{\tau}_{p;\varkappa}(D) \|^p .$$

Лемма доказана.

§ 3. Граничные свойства функций на гладких поверхностях

Будем рассматривать область G вида

$$G = \{ x :\ x_n > \varphi(x'),\quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in R^{n-1} \}. \tag{46}$$

Пусть область G удовлетворяет условию рога (6) с параметрами (7), а функция φ - оценкам (9). Пусть функция $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$,

$1 < p < \infty$. Будем также предполагать, что выполнены условия (2) и носитель функции $\mathcal{F}$ ограничен.

В силу условий на область G , справедливо представление [18]

$$\mathcal{F}(x) = A_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}](x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_1} d\sigma \int_{R^n} dt\, \pi_i(\sigma, x)\sigma^{-|\alpha|}[\sigma^\beta + \rho(x)]^{-|\gamma|+\gamma_i \ell_i} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}[\sigma^\beta + \rho(x)]^{\gamma_j}}\right) D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t), \qquad (47)$$

где

$$A_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}](x) = \int_{R^n} dt \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_1^{-\alpha_i}[\varepsilon_1^\beta + \rho(x)]^{-\gamma_i} K_i\left(\frac{t_i - x_i}{\varepsilon_1^{\alpha_i}[\varepsilon_1^\beta + \rho(x)]^{\gamma_i}}\right)\mathcal{F}(t), \qquad (48)$$

$$K_i, K_{ij} \in C^\infty(R),\ \operatorname{supp} K_i = [a_i, b_i],\ \operatorname{supp} K_{ij} = [a_j, b_j],$$

$$\pi_i(\sigma, x) = \alpha_i + \beta\gamma_i \frac{\sigma^\beta}{\sigma^\beta + \rho(x)}, \quad \int K_i(\tau)d\tau = 1 \quad (i, j = 1, \ldots, n);$$

$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, параметры $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta, \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, ε определяются в (6), (7).

Положим $f(x') = \mathcal{F}\Big|_{\partial G} = \lim\limits_{u \to 0} \mathcal{F}(x', \varphi(x') + u)$.

Как было показано выше, $f \in L_p(R^{n-1})$ и справедлива оценка $\| f, L_p(R^{n-1})\| \leqslant C \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|$.

Предполагая, что $\ell_n - \sigma_n < \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\ell_i - \sigma_i)$, установим некоторые свойства функции f .

Лемма 3. Пусть $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$, область G имеет вид (46). Тогда имеет место оценка

$$\| f, \mathring{B}^{\rho}_{p}(R^{n-1}) \| \leq c \, \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G) \|, \tag{49}$$

где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$, $\rho_i = \ell_i (\ell_n - \sigma_n - 1/p)(\ell_n - \sigma_n + \sigma_i)^{-1}$,

$i = 1, \ldots, n-1$, постоянная C не зависит от $\mathcal{F}$.

Доказательство. Для доказательства оценки (49) воспользуемся представлением (47). Имеем

$$f(x') = A_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}](x', \varphi(x')) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\varepsilon_1} d\sigma \int dt \, \sigma^{-|\omega| + \beta \gamma_i \ell_i} \prod_{j=1}^{n-1} K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\omega_j}}\right) K_{in}\left(\frac{t_n - \varphi(x')}{\sigma^{\omega_n}}\right) \times$$

$$\times D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t) = J_0(x') + \sum_{i=1}^{n} J_i(x'),$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, ω_i определяются в (8), $i = 1, \ldots, n$.

Так как $J_0 = A_{\varepsilon_1}[\mathcal{F}]$ – усреднение с гладким ядром, то оценку (49) достаточно доказать для интегралов J_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\int_0^{\varepsilon} dh \int_{Q(h^{\omega_1/\omega_\nu})} dx' \, h^{-1-p\rho_\nu} \left| \Delta^{m}_{\delta h} [J_i, e_\nu] \right|^{p} \leq$$

$$\leq c \int_0^{\varepsilon} dh \int_{Q(h^{\omega_1/\omega_\nu})} dx' \, h^{-1-p\rho_\nu} \Bigg[\int_0^{h^{1/\omega_\nu}} d\sigma \int_{R^n} dt \, \sigma^{-|\omega| + \beta \gamma_i \ell_i} \prod_{j=1}^{n-1} K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\omega_j}}\right) \times$$

$$\times\left|K_{in}\left(\frac{t_n-\varphi(x')}{\sigma^{\omega_n}}\right)\right|\left|D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)\right|\Bigg]^p +$$

$$+c\int_0^{\varepsilon}dh\int\limits_{Q(h^{\omega_1/\omega_\nu})}dx'\,h^{-1-p\rho_\nu}\left|\Delta_{\delta h}^m\int\limits_{h^{1/\omega_\nu}}^{\varepsilon_1}d\sigma\int\limits_{R^n}dt\,\sigma^{-|\omega|+\beta\gamma_i\ell_i}\prod_{j=1}^{n-1}K_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\omega_j}}\right)\times\right.$$

$$\times K_{in}\left(\frac{t_n-\varphi(x')}{\sigma^{\omega_n}}\right)D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)\Bigg|^p\leqslant c\left(\bar{J}_i'+\bar{J}_i''\right).$$

Оценим каждый интеграл $\bar{J}_i'$ и $\bar{J}_i''$ отдельно. Используя в $\bar{J}_i'$ подстановку $h=\bar{h}^{-\omega_\nu}$ ($\bar{h}\equiv h$), неравенства Гёльдера, Харди и обозначая через χ характеристическую функцию отрезка $[-1,1]$, получим

$$\bar{J}_i'\leqslant C\int_0^{\varepsilon}dh\int dx'\int dt\,h^{-1-p\rho_\nu\omega_\nu+p-|\omega|+\beta\gamma_i\ell_i p}\chi_1\left(\frac{x_1}{h^{\omega_1}}\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}\left|K_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{h^{\omega_j}}\right)\right|\left|K_{in}\left(\frac{t_n-\varphi(x')}{h^{\omega_n}}\right)\right|\left|D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)\right|^p.$$

Так как $\operatorname{supp}K_{i1}=[a_1,b_1]$, $|x_1|\leqslant h^{\omega_1}$, то $|t_1|\leqslant ch^{\omega_1}$, и, используя условие (9) на функцию φ, получим $|\varphi(t')-\varphi(x')|<$ $<\frac{a_n}{2}h^{\omega_n}$, и, следовательно, $c_1h^{\omega_n}\leqslant t_n-\varphi(t')\leqslant c_2h^{\omega_n}$. Обозначив через $\bar{K}_{in}$ характеристическую функцию отрезка $[c_1,c_2]$ ($0<c_1<c_2$) и интегрируя по x', продолжим оценку $\bar{J}_2'$:

$$\bar{J}_i'\leqslant c\int\limits_G dt\int_0^{\infty}dh\,h^{-1}\left|\bar{K}_{in}\left(\frac{\rho(t)}{h^{\omega_n}}\right)\right|[\rho(t)]^{\sigma_i p}\left|D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t)\right|^p\leqslant$$

(подстановка по h : $h = [\rho(t)]^{1/\omega_n} \bar{h}^{-1/\omega_n}$, условие $supp \bar{K}_{in} = [c_1, c_2]$)

$$\leq c \int_G dt \, [\rho(t)]^{6_i p} \left| D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t) \right|^p \leq c \, \| \mathcal{F}, W_p^{\ell}(G) \|^p . \qquad (50)$$

Применяя неравенство (32), используя условия (9) на функцию φ и обозначая $\beta_\nu(\tau, s) = max\{0, \omega_n \tau - \omega_\nu s\}$, оценим интеграл $\bar{J}_i''$:

$$\bar{J}_i'' \leq c \sum_{\substack{\tau, s=1 \\ \tau \leq s}}^{\ell_\nu} \int_0^{\varepsilon} dh \int_{Q(h^{\omega_1/\omega_\nu})} dx' h^{-1-p\beta_\nu + p(\ell_\nu - 1)} \left[\int_0^{m\delta h} du \int_{h^{1/\omega_\nu}}^{\varepsilon_1} dv \int dt \, v^{-|\omega|-p|\ell_i - \omega_\nu(\ell_\nu - s)} \times \right.$$

$$\times \left| D_\nu^{\ell_\nu - s} K_{i\nu} \left(\frac{t_\nu - x_\nu - u}{v^{\omega_\nu}} \right) \right| \prod_{j=1}^{n-1\,(\nu)} \left| K_{ij} \left(\frac{t_j - x_j}{v^{\omega_j}} \right) \right| v^{-\omega_n \tau} \cdot h^{\frac{\beta_\nu(\tau, s)}{\omega_\nu}} \times$$

$$\left. \times \left| D^{\tau} K_{in} \left(\frac{t_n - \varphi(x' + u e_\nu)}{v^{\omega_n}} \right) \right| \left| D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t) \right| \right] \leq$$

(неравенства Гёльдера, Минковского, Харди и оценки, аналогичные оценкам при получении (50))

$$\leq C \, \| \mathcal{F}, W_{p;6}^{\ell}(G) \|^p .$$

Лемма доказана.

Определим функцию $\chi_1 \in C^\infty(R)$, $supp \, \chi_1 = [-2\delta', 2\delta']$,

$$\chi_1(t) \equiv 1 \text{ при } t \in [-\delta', \delta'] ,$$

где δ' – достаточно малая положительная постоянная.

Положим, используя представление (47),

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\frac{x_1^k}{k!}\mathcal{F}^k(x), \tag{51}$$

где

$$\mathcal{F}^k(x)=A_\varepsilon[D_1^k\mathcal{F}](0,x')+\sum_{i=1}^{n}\int_0^\varepsilon d\sigma\int dt\,\pi_i(\sigma,\rho_0(x'))\sigma^{-|\alpha|-\alpha_1 k}\times$$

$$\times[\sigma^\beta+\rho_0(x')]^{-|\gamma|+\gamma_i\ell_i}\chi_1\left(\frac{x_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)D^kK_{i1}\left(-\frac{t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\prod_{j=2}^{n}K_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}[\sigma^\beta+\rho_0(x')]^{\gamma_j}}\right)\times$$

$$\times D_i^{\ell_i}\mathcal{F}(t). \tag{52}$$

В силу определения функции χ_1 ,

$$D_1^k\Phi(x)\Big|_{x_1=0}=D_1^k\mathcal{F}(0,x')\qquad(k=0,1,\ldots,\ell_1-1).$$

Покажем, что $\Phi\in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ и выполнена оценка

$$\|\Phi,W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|\leqslant C\|\mathcal{F},W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|.$$

Имеем, учитывая ограниченность носителя функции χ_1 , определение усреднения $A_\varepsilon[\mathcal{F}]$ и замечание 1,

$$J_m=\int_G dx\,[\rho(x)]^{\sigma_m p}|D_m^{\ell_m}\Phi(x)|^p\leqslant C\|\mathcal{F},L_p(G)\|^p+$$

$$+C\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\sum_{i=1}^{n}\sum{}'\int_G dx\,[\rho(x)]^{\sigma_m p}\left[\int_0^\varepsilon d\sigma\int_{R^n}dt\,\sigma^{-1-|\alpha|}[\sigma^\beta+\rho_0(x')]^{-|\gamma|-\gamma_m\ell_m+\gamma_i\ell_i}\right.\times$$

$$\times \left| \chi_1' \left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}} \right) \right| \left| D^{\kappa} K_{i1} \left(- \frac{t_1}{v^{\alpha_1}} \right) \right| \prod_{j=2}^{n} \left| K_{ij}' \left(\frac{t_j - x_j}{v^{\alpha_j} [v^{\beta} + \rho_0 (x')]^{\gamma_j}} \right) \right| \times$$

$$\times \left. \left| D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t) \right| \right]^{p} , \tag{53}$$

где K_{ij}', χ_1' означает, что функции K_{ij}, χ_1, быть может, дифференцировались, а $\sum'$ – сумма по индексам дифференцирования.

Осуществляя в интегралах из (53) замены переменных $x_n \longrightarrow x_n + \varphi(x')$, $t_n \rightarrow t_n + \varphi(t')$, используя (9), продолжим оценку интеграла $\mathcal{J}_m$:

$$\mathcal{J}_m \leqslant C \, \| \mathcal{F}, L_p(G) \|^{p} + C \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=0}^{\ell_i - 1} \int\limits_{R_+^n} dx \, x_n^{\sigma_m p} \left[\int\limits_0^{\varepsilon} dv \int\limits_{R_+^n} dt \, v^{-1-|\alpha|} \times \right.$$

$$\times [v^{\beta} + x_n]^{-|\gamma| - \sigma_m} \left| \tilde{\chi}_1 \left(\frac{x_1}{v^{\alpha_1}} \right) \right| \left| D^{\kappa} K_{i1} \left(- \frac{t_1}{v^{\alpha_1}} \right) \right| \prod_{j=2}^{n} \left| \tilde{K}_{ij} \left(\frac{t_j - x_j}{v^{\alpha_j} [v^{\beta} + x_n]^{\gamma_j}} \right) \right| \times$$

$$\times \left. \left| \mathcal{F}_{[i]}(t) \right| \right]^{p} , \tag{54}$$

где $\mathcal{F}_{[i]}(t) = |t_n|^{\sigma_i} D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t', \varphi(t') + t_n)$, а через $\tilde{K}_{ij}$ обозначены характеристические функции некоторых отрезков, содержащих $supp\, K_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

В интегралах из правой части (54) применим неравенство Гёльдера, умножив и разделив на v^{μ}, где $\mu = 1 + \frac{\alpha_1}{p}$. Получим

$$\mathcal{J}_m \leqslant c\,\|\mathcal{F}, L_p(G)\|^p + c\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\int\limits_{R_+^n} dx\, x_n^{\sigma_m p}|x_1|^{\frac{1-\mu}{\alpha_1}(p-1)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\varepsilon} d\sigma \int dt\, \sigma^{-p-|\alpha|+\mu(p-1)}\left[\sigma^{\beta}+x_n\right]^{-|\gamma|-\sigma_m p}\left|\tilde{\chi}_1\left(\frac{x_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\right| \times$$

$$\times\left| D^{k}K_{i1}\left(-\frac{t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\right| \prod_{j=2}^{n}\left|\tilde{K}_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{\sigma^{\alpha_j}\left[\sigma^{\beta}+x_n\right]^{\gamma_j}}\right)\right|\left|\mathcal{F}_{[i]}(t)\right|^p \leqslant$$

(интегрирование по x' , $\mu = 1+\frac{\alpha_1}{p}$, подстановка $\sigma = x_n^{1/\beta}\cdot h$)

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\int\limits_0^{\infty} dx_n \int\limits_0^{\infty} dh \int\limits_{R_+^n} dt\, x_n^{-1} h^{-1-\alpha_n}\left[1+h^{\beta}\right]^{-\gamma_n-\sigma_m p} \times$$

$$\times\left|D^{k}K_{i1}\left(-\frac{t_1}{x_n^{\alpha_1/\beta}h^{\alpha_1}}\right)\right|\left|\tilde{K}_{in}\left(\frac{t_n-x_n}{x_n h^{\alpha_n}\left[1+h^{\beta}\right]^{\gamma_n}}\right)\right|\left|\mathcal{F}_{[i]}(t)\right|^p + c\,\|\mathcal{F}, L_p(G)\|^p \leqslant$$

(замены переменных по t_n : $t_n = x_n\left\{1+h^{\alpha_n}\left[1+h^{\beta}\right]^{\gamma_n} z_n\right\}$,

а затем по x_n : $x_n = \bar{x}_n\left\{1+h^{\alpha_n}\left[1+h^{\beta}\right]^{\gamma_n} z_n\right\}^{-1}$)

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\ell_1-1}\int\limits_{R^{n-1}} dt' \int\limits_0^{\infty} d\bar{x}_n \int\limits_0^{\infty} dh\, h^{-1}\left[1+h^{\beta}\right]^{-\sigma_m p-1}\left|\widetilde{D^{k}K_{i1}}\left(-\frac{t_1(1+h^{\beta})^{\alpha_1/\beta}}{h^{\alpha_1}\bar{x}_n^{\alpha_1/\beta}}\right)\right| \times$$

$$\times \left| \mathcal{F}_{|i|} (t', \bar{x}_n) \right|^p + c \| \mathcal{F}, L_p(G) \|^p \leqslant$$

(оценки, аналогичные оценкам при получении (35))

$$\leqslant c \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma} (G) \|^p .$$

Оценка $\| \Phi, L_p(G) \| \leqslant c \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma} (G) \|$ устанавливается аналогично.

Таким образом, любую функцию $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma} (G)$ можно представить в виде $\mathcal{F} = \Phi + \mathcal{F}_1$, где функция $\mathcal{F}_1 \in W^{\ell}_{p;\sigma} (G)$ и имеет следующие свойства:

1) $\| \mathcal{F}_1, W^{\ell}_{p;\sigma} (G) \| \leqslant \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma} (G) \|$;

2) $D_1^k \mathcal{F}(x) \Big|_{x_1 = 0} = 0$ при $k = 0, 1, \dots, \ell_1 - 1$.

Граничные свойства функций вида $\mathcal{F}_1$ были изучены в § 2. Рассмотрим граничные свойства функции Φ, полагая

$$\Phi \Big|_{\partial G} = \lim_{v \to 0} \cdot \Phi (x', \varphi(x') + v).$$

Тогда справедлива следующая

Л е м м а 4. Пусть область G имеет вид (46). Рассмотрим функцию Φ, построенную по функции $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma} (G)$, согласно (51). Тогда $\Phi \Big|_{\partial G} = f$ существует и имеет место оценка

$$\sup_{x \in [0, A]} \| f, B^{\rho, x}_{p} (R^{n-1}) \| \leqslant c \| \mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma} (G) \|, \tag{55}$$

где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$, $\rho_i = \ell_i (\ell_n - \sigma_n - 1/p)(\ell_n - \sigma_n + \sigma_i)^{-1}$, $i = 1, \dots, n-1$,

$A = \dfrac{(\ell_1 - \sigma_1) - (\ell_n - \sigma_n)}{\ell_n - \sigma_n + \sigma_1} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \ell_i$, константа C не зависит от $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\Phi \in W^{\ell}_{p;\sigma} (G)$

и выполнены условия (2), то доказательство леммы сводится к получению оценки (55). Считая $\delta > 0$, применяя оценку (32) и обозначая $\sigma(x') = [\varphi(x') - \varphi(0,x'')]$, получаем

$$\int_0^{\varepsilon} dh \int_{R^{n-1}} dx' \frac{|x_1|^{\varkappa p} \, |\Delta_{\delta h}^{m} [f(x'), e_\nu]|^p}{h^{1+p\rho_\nu+\varkappa\omega_1\omega_\nu^{-1}p}} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=0}^{\ell_1-1} \int_0^{\varepsilon} dh \int_{R^{n-1}} dx' h^{-1-p\rho_\nu-p\varkappa\omega_1\omega_\nu^{-1}} |x_1|^{\varkappa p} \left[\int_0^{h^{1/\omega_\nu}} d\sigma \int_{R^n} dt\, \sigma^{-|\alpha|} \times\right.$$

$$\times [\sigma^{\beta} + \sigma(x')]^{-|\gamma|+\gamma_i \ell_i} \left| \chi_1\left(\frac{x_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\right| \left| D^{\kappa} K_{i1}\left(-\frac{t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right)\right| \left| K_{in}\left(\frac{t_n - \varphi(x')}{\sigma^{\alpha_n}[\sigma^{\beta}+\sigma(x')]^{\gamma_n}}\right)\right| \times$$

$$\left. \times \prod_{j=2}^{n-1} \left| K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}[\sigma^{\beta} + \sigma(x')]^{\gamma_j}}\right)\right| \left| D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t)\right| \right]^p +$$

$$+ C \sum_{i=1}^{n} \sum_{\kappa=0}^{\ell_1-1} \int_0^{\varepsilon} dh \int_{R^{n-1}} dx' h^{-1-p\rho_\nu-p\varkappa\omega_1\omega_\nu^{-1}+p(m-1)} |x_1|^{\varkappa p} \left[\int_0^{m\delta h} du \left| D_\nu^{m} \left\{ \int_{h^{1/\omega_\nu}}^{\varepsilon} d\sigma \times\right.\right.\right.$$

$$\times \int_{R^n} dt\, \sigma^{-|\alpha|} [\sigma^{\beta} + \sigma(x'+ue_\nu)]^{-|\gamma|+\gamma_i\ell_i} \pi_i(\sigma, \sigma(x'+ue_\nu)) \chi_1\left(\frac{x_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right) \times$$

$$\times D^{\kappa} K_{i1}\left(-\frac{t_1}{\sigma^{\alpha_1}}\right) K_{i\nu}\left(\frac{t_\nu - x_\nu - u}{\sigma^{\alpha_\nu}[\sigma^{\beta}+\sigma(x'+ue_\nu)]^{\gamma_j}}\right) K_{in}\left(\frac{t_n - \varphi(x'+ue_\nu)}{\sigma^{\alpha_n}[\sigma^{\beta}+\sigma(x'+ue_\nu)]^{\gamma_n}}\right) \times$$

$$\left.\left.\left. \times \prod_{j=2}^{n\;(\nu)} K_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{\sigma^{\alpha_j}[\sigma^{\beta}+\sigma(x'+ue_\nu)]^{\gamma_j}}\right) D_i^{\ell_i} \mathcal{F}(t)\right\}\right|\right]^p + C\|\mathcal{F}, L_p(G)\|^p. \quad (56)$$

Используя в интегралах из (56) условие (9) на функцию φ, оценку $c_1 \sigma^{\beta} \leq \left[\sigma^{\beta} + \mathcal{O}(x')\right] \leq c_2 \sigma^{\beta}$ ($0 < c_1 < c_2$), определение функции χ_1 и осуществляя оценки, аналогичные проведенным в лемме 3, получаем

$$\int_0^{\varepsilon} dh \int_{R^{n-1}} dx' \, \frac{|x_1|^{\varkappa p} \left|\Delta_{\delta_h}^{m} [f(x'), e_\nu]\right|^p}{h^{1+p\rho_\nu + \varkappa\omega_1\omega_\nu^{-1} p}} \leq C \|\mathcal{F}, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\|.$$

Лемма доказана.

Пусть G –область вида (46). Пусть на R_K^{n-1} задана функция f_K , $K = 1, 2$. Положим

$$f(x') = \begin{cases} f_1(x'), & x' \in R_1^{n-1} \\ f_2(x'), & x' \in R_2^{n-1}. \end{cases}$$

Тогда имеет место следующая

Л е м м а 5. Пусть $1 < p < \infty$, $\|f, \mathring{B}_p^{\rho}(R^{n-1})\| < \infty$, $\sup\limits_{\varkappa \in [0,A]} \|f_K, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_K^{n-1})\| < \infty$, где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{n-1})$,

$$\rho_i = \ell_i \left(\ell_n - \sigma_n - 1/p\right)\left(\ell_n - \sigma_n + \sigma_i\right)^{-1}, \; i = 1, \ldots, n-1;$$

$$A = \frac{(\ell_1 - \sigma_1) - (\ell_n - \sigma_n)}{\ell_n - \sigma_n + \sigma_1} \max_{1 \leq i \leq n} \ell_i, \; K = 1, 2; \; \ell_n - \sigma_n < \max_{1 \leq i \leq n} (\ell_i - \sigma_i) = \ell_1 - \sigma_1.$$

Тогда существует функция $\mathcal{F} \in W_{p;\sigma}^{\ell}(G)$ такая, что

1) $\mathcal{F}\big|_{\partial G} = \lim\limits_{\sigma \to 0} \mathcal{F}(x', \varphi(x') + \sigma) = f(x')$

2) $\|\mathcal{F}, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\| \leq C \|f, \mathring{B}_p^{\rho}(R^{n-1})\| + C \sum\limits_{K=1}^{2} \sup\limits_{\varkappa_0 \in [0,A]} \|f_K, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_K^{n-1})\|$, (57)

где константа C не зависит от f и $\mathcal{F}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим, используя интегральное представление функций через разности (см., например, [20]):

$$\mathcal{F}(x', x_n) = f_\varepsilon(x') + \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\varepsilon dh \int_R dz_i \int_{R^{n-1}} dt\, h^{-1-\omega_i-|\omega'|} \chi_n\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{h^{\omega_n}}\right) \times$$

$$\times\, \eta_i\left(\frac{z_i}{h^{\omega_i}}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \chi_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{h^{\omega_j}}\right) \Delta^m_{\delta z_i}\left[f(t), e_i\right],$$

где f_ε - усреднение с гладким ядром; $\eta_i, x_{ij} \in C^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \eta_i = [a_i, b_i]$, $\operatorname{supp} \chi_{ij} = [a_j, b_j]$, $i, j = 1, \ldots, n-1$; $\chi_n \in C^\infty(R)$,

$\operatorname{supp} \chi_n = [-2, 2]$, $\chi_n(t) \equiv 1$ при $t \in [-1, 1]$;
параметры $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = (\omega', \omega_n)$
определяются в (6)-(8).

Из построения функции $\mathcal{F}$ следует, что $\mathcal{F}(x', \varphi(x')) = f(x')$.
Докажем оценку (57). Учитывая условие (9), получим

$$\mathcal{J}_{\nu'} = \int_G dx\, [\rho(x)]^{\sigma_\nu p} \left|D_\nu^{\ell_\nu} \mathcal{F}(x)\right|^p \leq c \,\| f, L_p(R^{n-1})\|^p +$$

$$+\, c \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{\ell_\nu} \sum_{\tau=1}^{s} \int_G dx\, [\rho(x)]^{\sigma_\nu p} \left[\int_0^\varepsilon dh \int dz_i \int dt\, h^{-1-\omega_i-|\omega'|-\ell_\nu \omega_\nu + s\omega_\nu - \tau\omega_n} \times\right.$$

$$\times \left|\eta_i\left(\frac{z_i}{h^{\omega_i}}\right)\right| \prod_{j=1}^{n-1}{}^{(\nu)} \left|\chi_{ij}\left(\frac{t_j - x_j}{h^{\omega_j}}\right)\right| \left|D_\nu^{\ell_\nu - s} \chi_{i\nu}\left(\frac{t_\nu - x_\nu}{h^{\omega_\nu}}\right)\right| \left|D^\tau \chi_n\left(\frac{x_n - \varphi(x')}{h^{\omega_n}}\right)\right| \times$$

$$\left.\times\, |x_1|^{\omega_1^{-1} \beta_\nu(\tau, s)} \left|\Delta^m_{\delta z_i}\left[f(t), e_i\right]\right|\right]^p,$$

где $\beta_\nu(\tau,s) = max\{0, \tau\omega_n - s\omega_\nu\}$.

Применяя в интегралах из (58) неравенство Гёльдера, умножив и разделив на h^μ, где $\mu = 1 + \omega_n(\sigma_n + 1/p)$, осуществляя подстановку по x_n : $x_n - \varphi(x') = h^{\omega_n} y$, и интегрируя по y, получим

$$J_\nu \leq c \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l_\nu} \sum_{\tau=1}^{s} \int_{R^{n-1}} dx' \int_0^\varepsilon dh \int_R dz_i \int_{R^{n-1}} dt h^{-1-|\omega'|-\omega_i-\omega_\nu l_\nu p+\omega_n(\sigma_n p+1)} \times$$

$$\times h^{p(\omega_\nu s-\omega_n\tau)} |x_1|^{\frac{\beta_\nu(\tau,s)}{\omega_1}p} \left| l_i\left(\frac{z_i}{h^{\omega_i}}\right)\right| \left| D_\nu^{l_\nu-s} \prod_{j=1}^{n} \chi_{ij}\left(\frac{t_j-x_j}{h^{\omega_j}}\right)\right| \left|\Delta_{\delta z_i}^m [f(t),e_i]\right|^p +$$

$$+ \|f, L_p(R^{n-1})\|^p \leq$$

(разбиение области интегрирования по x' : $Q(cz_i^{\omega_1/\omega_i}) \cup [R^{n-1} \setminus Q(cz_i^{\frac{\omega_1}{\omega_i}})]$ подстановка $h = z_i^{1/\omega_i}\sigma$, $\delta_\kappa = (-1)^{\kappa-1}\delta$)

$$\leq c \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\varepsilon dz \int_{Q(z^{\omega_1/\omega_i})} dt\, z^{-1-p\rho_i} \left|\Delta_{\delta' z}^m [f(t),e_i]\right|^p + c\|f, L_p(R^{n-1})\| +$$

$$+ c \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\kappa=1}^{2} \sum_{s=0}^{l_\nu} \sum_{\tau=1}^{s} \int_0^\varepsilon dz \int_{R_\kappa^{n-1}} dt \frac{|t_1|^{\frac{\beta_\nu(\tau,s)}{\omega_1}p} \left|\Delta_{\delta_\kappa z}^m [f_\kappa(t),e_i]\right|^p}{z^{1+p\rho_i+p\omega_i^{-1}\beta_\nu(\tau,s)}} \leq$$

$$(0 \leq \beta_\nu(\tau,s)\omega_1^{-1} \leq A)$$

$$\leq c\|f, \overset{\circ}{B}{}_p^\rho(R^{n-1})\|^p + c\sum_{\kappa=1} \sup_{\varkappa_0 \in [0,A]}{}^{*} \|f_\kappa, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_\kappa^{n-1})\|^p.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Так как каждую функцию $\mathcal{F} \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ можно представить в виде $\mathcal{F} = \mathring{\mathcal{F}} + \Phi$, где $\mathring{\mathcal{F}} \in \mathring{W}^{\ell}_{p;\sigma}(G)$, $\Phi \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$, $\|\mathring{\mathcal{F}}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\| \leq c\,\|\mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|$, $\|\Phi, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\| \leq c\,\|\mathcal{F}, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\|$, функция Φ имеет вид (51), то теорема 1 следует из лемм 1, 3, 4.

Доказательство теоремы 2. Пусть заданы функции f^1_k, f^2_k, $k=1,2$. Тогда из леммы 5 следует, что на G существует такая функция $\mathcal{F}^2 \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$, что

$$\mathcal{F}^2\Big|_{\partial G} = f^2 = \begin{cases} f^2_1, & x_1 > 0, \\ f^2_2, & x_1 < 0, \end{cases}$$

$$\|\mathcal{F}^2, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\| \leq C\|f^2, \mathring{B}^{p}_{p}(R^{n-1})\| + c\sum_{k=1}^{2} \sup_{x_0 \in [0,A]} \|f^2_k, B^{\rho, x_0}_{p}(R^{n-1}_k)\|.$$

Из леммы 2 следует, что на каждой области G_k можно построить функцию $\mathcal{F}^1_k \in W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ такую, что $\mathcal{F}^1_k\Big|_{\partial G_n} = f^1_k$ и

$$\|\mathcal{F}^1_k, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\| \leq c\|f^1_k, B^{\tau}_{p;x}(D)\|.$$

Используя представление (47), получим $\mathcal{F}^1_k = \mathring{\mathcal{F}}^1_k + \Phi_k$, $k=1,2$. Так как $\mathring{\mathcal{F}}^1_k \in \mathring{W}^{\ell}_{p;\sigma}(G_k)$, то функция

$$\mathring{\mathcal{F}}^1 = \begin{cases} \mathring{\mathcal{F}}^1_1, & x \in G_1, \\ \mathring{\mathcal{F}}^1_2, & x \in G_2, \end{cases}$$

принадлежит $W^{\ell}_{p;\sigma}(G)$ и

$$\|\mathring{\mathcal{F}}^1, W^{\ell}_{p;\sigma}(G)\| \leq c\sum_{k=1}^{2}\|f^1_k, B^{\tau}_{p;x}(D)\|.$$

Из леммы 3 следует, что $\overset{\circ}{f}{}^{1} = \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{1}\Big|_{\partial G}$ удовлетворяет оценке

$$\|\overset{\circ}{f}{}^{1}, \overset{\circ}{B}{}_{p}^{\rho}(R^{n-1})\| \leq c \sum_{k=1}^{2} \|f_k^1, B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)\|. \tag{59}$$

Далее, обозначая

$$\psi = \begin{cases} \psi_1 = \Phi_1\Big|_{\partial G_1} \\ \psi_2 = \Phi_2\Big|_{\partial G_2} \end{cases},$$

получим, в силу оценки (59),

$$\|\psi, \overset{\circ}{B}{}_{p}^{\rho}(R^{n-1})\| \leq c\|f^1, \overset{\circ}{B}{}_{p}^{\rho}(R^{n-1})\| + c\sum_{k=1}^{2}\|f_k^1, B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)\|,$$

Так как функции ψ_k, в силу леммы 4, удовлетворяют оценке

$$\|\psi_k, B_p^{\rho,\varkappa_0}(R_k^{n-1})\| \leq c\|\Phi_k, W_{p;\sigma}^{\ell}(G)\| \leq c\sum_{k=1}^{2}\|f_k^1, B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)\|,$$

то из леммы 5 следует существование функции $\mathcal{F}^{(1)} \in W_{p;\sigma}^{\ell}(G)$ такой, что $\mathcal{F}^{(1)}\Big|_{\partial G} = \psi$,

$$\|\mathcal{F}^{(1)}, \overset{\bullet}{W}{}_{p;\sigma}^{\ell}(G)\| \leq c\|f^1, \overset{\circ}{B}{}_{p}^{\rho}(R^{n-1})\| + c\sum_{k=1}^{2}\|f_k^1, B_{p;\varkappa}^{\tau}(D)\|.$$

Тогда функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(1)} + \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{1} + \mathcal{F}^{2}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

З а м е ч а н и е 2. Глобальная теорема о продолжении получается из теоремы 2 и результатов из [3], если предположить условия согласования на пересекающихся кусках поверхности и использовать разложение единицы.

Литература

1. Успенский С.В. Теоремы вложения и продолжения для одного класса функций. I. – "Сиб. мат. журн.", 1966, т.7, № 1, с.192–199.
2. Успенский С.В. Теоремы вложения и продолжения для одного класса функций. II. – "Сиб. мат. журн.", 1966, т.7, № 2, с.409–418.
3. Успенский С.В. О теоремах вложения функций в областях. – "Сиб. мат. журн.", 1966, т.7, № 3, с.650–663.
4. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений. – "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1959, т.55.
5. Никольский С.М., Лизоркин П.И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе. – "Докл. АН СССР", 1964, т.159, № 3, с.512–515.
6. Никольский Ю.С. Прямые и обратные теоремы вложения для весовых классов дифференцируемых функций. – "Докл. АН СССР", 1974, т.215, № 2, с.270–273.
7. Успенский С.В. О следах функций класса $W_p^{\ell_1,\dots,\ell_n}$ Соболева на гладких поверхностях. – "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 2, с.429–451.
8. Бесов О.В. Поведение дифференцируемых функций на негладкой поверхности. – "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1972, т.117, с.3–10.
9. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975.
10. Лизоркин П.И. Граничные свойства функций из весовых классов. – "Докл. АН СССР", 1960, т.132, № 3, с.514–517.

11. Н и к о л ь с к и й Ю.С. Теоремы вложения и продолжения для весовых пространств. – В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1975, с.110–127.

12. Б у г р о в Я.С. Граничные свойства функций класса H_p^n на области, имеющей угловые точки. – "Сиб. мат. журн.", 1964, т.5, № 5, с.1007–1026.

13. Р а м а з а н о в М.Д. Теоремы о следах и продолжениях функций с поверхностей. – "Докл. АН СССР", 1970, т.190, № 4, с.784–787.

14. Р а м а з а н о в М.Д. Restrictions des fonctions des W_2^k espaces aux surface lisses.,C.R.Acad.sci.Paris, 269, N 25 (1969), 1202–1204.

15. В о р о н и н В.В., Ф р е н к е л ь М.Л. О следах функций из $W_2^{k_1,k_2}(R^2)$ на кривых. – "Изв. АН Узб ССР. Серия физико-матем. наук", 1973, № 3, с.13–19.

16. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СО АН СССР, 1962.

17. Б у р е н к о в В.И. О плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах функций, заданных на произвольном открытом множестве. – В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, 1975, с.9–22.

18. П е р е п е л к и н В.Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С.Л.Соболева в областях. I. – "Сиб. мат. журн.", 1976, т.17, № 1, с.119–140.

19. П е р е п е л к и н В.Г. Интегральные представления функций, принадлежащих весовым классам С.Л.Соболева в областях и некоторые приложения. II. – "Сиб. мат. журн.", 1976, т.17, № 2, с.318–330.

20. Б е с о в О.В. О продолжении функций из L_p^l и W_p^l. – "Труды Матем. ин-та АН СССР", 1967, т.89, с.5–17.