УДК 517.9

# КУСОЧНО-АФФИННАЯ СИСТЕМА С СЕПАРАТРИСОЙ, ИДУЩЕЙ ИЗ СЕДЛА В СЕДЛО

Ю.И.Г и л ь д е р м а н (Новосибирск)

Рассматриваются непрерывные кусочно-аффинные динамические системы, определенные в [1]. В [2] было показано, что какой бы ни была локальная топологическая структура сложной точки покоя с конечным числом особых траекторий, существует непрерывная кусочно-аффинная система, обладающая этой структурой. Таким образом, существуют непрерывные кусочно-аффинные системы с любой негрубой точкой покоя.

В настоящей заметке строится пример кусочно-аффинной системы, все точки покоя которой просты, а структурная неустойчивость проявляется в наличии сепаратрисы, идущей из седла в седло.

Итак, рассмотрим область $U=\{X\in R^2 \mid \beta_1 X \geq h_1, \beta_2 X \leq h_2\}$, $h_1>0$, $h_2<0$, и смежные с ней области $U_1$ и $U_2$ с границами $\Gamma_1 = U\cap U_1 = \{X\in R^2 \mid \beta_1 X = h_1, \beta_2 X \leq h_2\}$ и $\Gamma_2 = U\cap U_2 = \{X\in R^2 \mid \beta_1 X \geq h_1, \beta_2 X = h_2\}$. Границы областей $U_i$ с другими областями мы определим позже. В объединении $U_1\cup U\cup U_2$ построим кусочно-аффинную непрерывную систему

$$\dot{X} = F(X), \tag{1}$$

так, чтобы в областях $U_i$ содержалось по одному седлу и чтобы эти седла соединялись сепаратрисой, проходящей через $U$.

Положим $F(X)=AX$, $A=diag(\lambda_1,\lambda_2)$ при $X\in U$. Выбор знаков $h_i$ гарантирует отсутствие точки покоя в $U$, так как $0\bar{\in} U$. В областях $U_i$ система (1) имеет своими компонентами системы (см. [1])

$$\dot{X} = (A + \alpha_i \beta_i)X - \alpha_i h_i . \qquad (2)$$

Обозначим через $\mu_{ik}$ , $i,k = 1,2$ , собственные числа матриц $A + \alpha_i \beta_i$ . Потребуем, чтобы точки покоя $X_i^0$ систем (2) были седлами. Это означает, что

$$|A + \alpha_i \beta_i| = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_{i2} \beta_{i2} + \lambda_2 \alpha_{i1} \beta_{i1} = \mu_{i1} \mu_{i2} < 0. \qquad (3)$$

Кроме того, потребуем, чтобы эти точки принадлежали соответствующим областям $U_i$ . Для этого необходимо, чтобы

$$\beta_1 X_1^0 < h_1 , \quad \beta_2 X_2^0 > h_2 . \qquad (4)$$

Для точек $X_i^0$ имеем

$$X_i^0 = h_i \, (A + \alpha_i \beta_i)^{-1} \alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \lambda_2 \\ \alpha_{i2} \lambda_1 \end{pmatrix} \frac{h_i}{\mu_{i1} \mu_{i2}} .$$

Отсюда и из (3) следует, что неравенства (4) эквивалентны неравенствам

$$\lambda_1 \lambda_2 \mu_{i1} \mu_{i2} > 0 , \quad i = 1,2 , \qquad (5)$$

т.е. в силу (3) неравенству $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ . Предполагая это неравенство выполненным, можем положить, не нарушая фазовой картины, что

$$\mu_{i1} \mu_{i2} = \lambda_1 \lambda_2 = -1 , \quad i = 1,2 . \qquad (6)$$

Теперь построим границы областей $U_i$ , отличные от $\Gamma_i$ . Чтобы упростить дело, будем считать, что эти границы так же, как и $\Gamma_i$ , являются лучами, выходящими из $\tilde{X}$ – точки пересечения $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ . Положение этих лучей достаточно произвольно, но чтобы точки $X_i^0$ принадлежали соответствующим областям $U_i$ , необходимо (и достаточно), чтобы существовал некоторый луч $\Gamma$ , лежащий между $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ и разделяющий точки $X_i^0$ , т.е. чтобы существовали $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ такие, что

$$\gamma = \gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 \quad \text{и} \quad \gamma(X_1^0 - \tilde{X}) < 0, \quad \gamma(X_2^0 - \tilde{X}) > 0. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь траекторию, соединяющую точки $X_i^0$. Эта траектория должна включать в себя отрезки сепаратрис точек $X_i^0$. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы собственные числа, соответствующие этим сепаратрисам, например $\mu_{11}$ и $\mu_{21}$, были бы разных знаков. Пусть, для определенности, $\mu_{11} > 0$ и $\mu_{21} < 0$. Собственные векторы этих чисел имеют вид

$$Q_i = \left( \frac{\alpha_{i1}}{\lambda_1 - \mu_{i1}}, \frac{\alpha_{i2}}{\lambda_2 - \mu_{i1}} \right)^* .$$

(Мы полагаем $\lambda_j \neq \mu_{ik}$ при всех $i, j, k = 1, 2$.) Обозначим $X_i^1$ точки пересечения прямых, проходящих через $X_i^0$ параллельно векторам $Q_i$, с прямыми $\beta_i X = h_i$. Чтобы эти точки лежали на границах $\Gamma_i$, потребуем выполнения неравенств

$$\beta_2 X_1^1 < h_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 X_2^1 > h_1 . \tag{8}$$

Требуемая траектория системы (1), идущая из седла в седло, будет построена, если ее крайние участки $X_1^0 X_1^1$ и $X_2^0 X_2^1$ удастся соединить траекторией системы $\dot{X} = AX$, лежащей в области $U$, т.е. если найдется такое $t > 0$, что

$$X_2^1 = \mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) X_1^1. \tag{9}$$

Итак, мы получим требуемую фазовую картину, если при условии (6) ($\mu_{11} > 0$, $\mu_{21} < 0$) найдутся такие $t > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, что выполняются условия (7)-(9).

Пользуясь равенством [3],

$$\beta_{ik}\alpha_{ik} = (-1)^{k-1} \frac{(\lambda_k - \mu_{i1})(\lambda_k - \mu_{i2})}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad i, k = 1, 2, \tag{10}$$

и полагая для простоты $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1, \quad \beta_1 = (1, b_1),$

$$\beta_2 = (1, -b_2), \; b_i > 0, \; \mu_1 = \mu_{11} = -\frac{1}{\mu_{12}}, \; \mu_2 = \mu_{21} = -\frac{1}{\mu_{22}},$$

будем иметь

$$\alpha_{11} = \frac{\mu_1^2 - 1}{2\mu_1}, \; \alpha_{12} = \frac{\mu_1^2 - 1}{2 b_1 \mu_1}, \; \alpha_{21} = \frac{\mu_2^2 - 1}{2\mu_2}, \; \alpha_{22} = -\frac{\mu_2^2 - 1}{2 b_2 \mu_2}, \tag{11}$$

$$X_1^0 = \frac{(\mu_1^2 - 1) h_1}{2\mu_1} (1, -b_1^{-1})^*, \quad X_2^0 = \frac{(\mu_2^2 - 1) h_2}{2\mu_2} (1, b_2^{-1})^*,$$

$$\tilde{X} = \left( \frac{b_2 h_1 + b_1 h_2}{b_1 + b_2}, \; \frac{h_1 - h_2}{b_1 + b_2} \right)^*,$$

наконец,

$$X_1^1 = \frac{h_1}{2} \left( 1 + \mu_1, \; \frac{1 - \mu_1}{b_1} \right)^* \quad \text{и} \quad X_2^1 = \frac{h_2}{2} \left( 1 + \mu_2, -\frac{1 - \mu_2}{b_2} \right)^*.$$

С этими значениями неравенства (7) и (8) примут вид:

$$\frac{h_1 \gamma_2}{2 b_1 \mu_1} (1 - \mu_1^2) > -\frac{\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2}{b_2 + b_1} > \frac{h_2 \gamma_1}{2 b_2 \mu_2} (1 - \mu_2^2), \tag{12}$$

$$\mu_1 \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} \right) + \left( 1 - \frac{b_2}{b_1} \right) < \frac{2 h_2}{h_1}, \tag{13}$$

$$\mu_2 \left( 1 + \frac{b_1}{b_2} \right) + \left( 1 - \frac{b_1}{b_2} \right) < \frac{2 h_1}{h_2}, \tag{14}$$

а равенство (9) может быть записано в форме:

$$h_2 (1 + \mu_2) = e^t h_1 (1 + \mu_1),$$

$$-\frac{h_2}{b_2}\left(1-\mu_2\right)=e^{-t}\,\frac{h_1}{b_1}\left(1-\mu_1\right),\ t>0.$$

Исключая из последних равенств $t$ , получаем

$$\frac{h_2}{h_1}\left(1-\mu_2^2\right)=-\frac{b_2 h_1}{b_1 h_2}\left(1-\mu_1^2\right). \tag{15}$$

Учитывая, что $t>0$ , будем, кроме того, иметь

$$\frac{h_2\left(1+\mu_2\right)}{h_1\left(1+\mu_1\right)}>1. \tag{16}$$

Таким образом, мы должны найти такие значения $\mu_1>0$, $\mu_2<0$, $h_1>0$, $h_2<0$, $\gamma_i>0$, $b_i>0$ , при которых выполняются равенство (15) и неравенства (12)-(14) и (16).

Покажем, что при некотором выборе $\gamma_i$, $h_i$ и $b_i$ неравенства (12)-(14) следуют из (15), (16) и неравенств $\mu_1>0$ , $\mu_2<0$ . Для этого обозначим $-\frac{h_2}{h_1}=h$ и $\frac{b_1}{b_2}=b$ . При этом условия (15), (16) примут вид:

$$\frac{\mu_1^2}{bh^2}+\mu_2^2=1+\frac{1}{bh^2}, \tag{17}$$

$$h\mu_2<-\mu_1-1-h. \tag{18}$$

Множество точек эллипса (17), лежащих ниже прямой

$$h\mu_2=-\mu_1-1-h \tag{19}$$

в квадранте $\mu_1>0$ , $\mu_2<0$ , будет непустым, если точка пересечения этой прямой с осью $\mu_2$ будет выше нижней точки эллипса, т.е. если

$$\frac{1+h}{h}<\sqrt{1+\frac{1}{bh^2}}.$$

Последнее неравенство равносильно условию

$$b < \frac{1}{2h+1} . \qquad (20)$$

Таким образом, при выполнении условия (20) в квадранте $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$ имеется дуга $L$ эллипса (17), лежащая ниже прямой (19). Другими словами, при выполнении этого условия оказываются совместными неравенства $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$, (18) и равенство (17).

Найдем теперь точки пересечения эллипса (17) с прямой (19). Одна из них имеет координаты $(-1, -1)$, а другая —

$$\left(\frac{-2bh+1-b}{1+b}, \frac{-2h^{-1}-1+b}{1+b}\right)$$

при выполнении (20) лежит в ортанте $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$. Отсюда непосредственно следует, что, во-первых, точка $(\mu_1, \mu_2)$, лежащая на дуге $L$, удовлетворяет неравенствам (13) и (14), а, во-вторых, для координат этой точки выполняются неравенства $\mu_1 < 1$, $\mu_2 < -1$. Легко видеть, что при выполнении последних неравенств величина, стоящая слева в (12), положительная, а справа - отрицательная. Поэтому если при заданных $h_i$ мы укажем $\gamma_i > 0$ так, что

$$\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 = 0, \qquad (21)$$

то и неравенство (12) будет выполнено.

Итак, выбираем $h_1 > 0$, $h_2 < 0$, $b_i > 0$ так, чтобы выполнялось условие (20). Затем указываем $\gamma_i > 0$, для которых справедливо (21). При этом в квадранте $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$ существует множество - дуга $L$ эллипса (17), для всех точек которого выполняются равенство (15), неравенства (12)-(14) и (16). С этими значениями $\mu_1$ и $\mu_2$ непрерывная кусочно-аффинная система, параметры которой восстанавливаются по формулам (11), имеет конечное число простых точек покоя и сепаратрису, идущую из седла в седло.

В заключение заметим, что поставленную задачу нельзя было бы решить, ограничившись двухкомпонентной или трехкомпонентной системой с равными векторами $\beta_1, \beta_2$ .

## Литература


1. Гильдерман Ю.И. О предельных циклах кусочно-аффинных систем. - "Докл. АН СССР", 1976, т.230, № 3, с.512-515.
2. Гильдерман Ю.И. Динамические системы на плоскости с непрерывными правыми частями, линейными в углах. - "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 1, с.163-173.
3. Гильдерман Ю.И. О динамических системах, линейных в конусах. - "Сиб. мат. журн.", 1974, т.15, № 5, с.1021-1035.