УДК 517.392

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-РЕШЁТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Н.И.Б л и н о в (Новосибирск)

1. Постановка задачи

Пусть в евклидовом пространстве R^n задана ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и задано множество точек $P \subset \partial\Omega$. Положим

$$\omega_R(P) = \{x : \rho(x, P) < R \wedge x \in \bar{\Omega},\ R > 0\},$$

$$\Omega_R = \Omega \setminus \omega_R(P).$$

Обозначим через $L^m_{p,\lambda}(\Omega, P, A)$ класс функций ($0 < A < \infty$, m - целое и положительное, $p \in (1, \infty]$, $\lambda \in R^1$), непрерывных в $\bar{\Omega} \setminus P$, интегрируемых в Ω и таких, что для любых $R > 0$, $\omega \subset \Omega_R$ и $f(x) \in L^m_{p,\lambda} \equiv L^m_{p,\lambda}(\Omega, P, A)$ выполнены соотношения (1) и (2):

$$\int\limits_{\omega_R(P)} |f(x)|dx \leqslant A R^{\tau_0 + n - s}, \quad \tau_0 = \min(\lambda, 0),\ 0 \leqslant s \leqslant n-1; \tag{1}$$

$$\left\{\int\limits_{\omega}\left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}(\mathcal{D}^\alpha f)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p} \leqslant A\,[\varphi(\omega)]^{1/p}\left(1 + R^{\lambda - m + \frac{n-s}{p}}\right), \tag{2}$$

где $\mathcal{D}^\alpha f(x)$ - обобщенные производные $f(x)$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$,

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α_i - целые, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет условиям:

а) $A_0 \geq \varphi(\omega) \geq 0$ при $\omega \subset \bar{\Omega}$;

б) $\varphi(\omega) \to 0$, как только $mes\, \omega \to 0$;

в) для любой конечной суммы попарно-непересекающихся множеств $\omega_0 = \bigcup_{k=1}^{T} \omega_k$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{T} \varphi(\omega_k) \leq A_1 \varphi(\omega_0),$$

константа A_1 не зависит от T и способа разбиения ω_0 .

Для функций $f(x) \in L_{p,\lambda}^{m}(\Omega, P, A)$ и произвольной $g(x) \in L_{\infty}(\Omega)$ в работе рассматриваются кубатурные формулы вида

$$\int_{\Omega} f(x) g(x) dx \simeq \sum_{k=1}^{N} C_k^{(N)} f(x^{(k,N)}), \tag{3}$$

где $C_k^{(N)}$ - коэффициенты; $x^{(k,N)}$ - узлы, принадлежащие $\bar{\Omega} \setminus P$.

Обозначим через $\Phi^N(f)$ правую часть формулы (3), а через ℓ^N - функционал, определяемый равенством

$$(\ell^N, f) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx - \Phi^N(f). \tag{4}$$

Пусть Φ^N - некоторая формула вида (3). Будем считать, что формула Φ^N задана, если при каждом N указан алгоритм для нахождения $C_k^{(N)}$ и $x^{(k,N)}$. Введем величину:

$$\mathcal{D}_N(\Phi^N, L_{p,\lambda}^{m}, g) = \sup_{f \in L_{p,\lambda}^{m}} |(\ell^N, f)|.$$

О п р е д е л е н и е 1. Вещественное $\sigma \geq 0$ назовем порядком сходимости формулы Φ^N на классе $L_{p,\lambda}^{m}$ при $N \to \infty$, если указаны константы $\mathcal{K}_1 > 0$ и $\mathcal{K}_2 > 0$, которые не зависят от N и для которых выполнено соотношение

$$\mathcal{K}_1 N^{-\sigma} \le \mathcal{D}_N (\Phi^N, L^m_{p,\lambda}, g) \le \mathcal{K}_2 N^{-\sigma}.$$

Определение 2. Пусть формула Φ^N_0 имеет порядок сходимости σ_0. Если для любой Φ^N с порядком сходимости σ выполняется неравенство $\sigma_0 \ge \sigma$, то формулу Φ^N_0 назовем оптимальной по порядку сходимости на классе $L^m_{p,\lambda}$.

В настоящей работе исследуется вопрос о построении кусочно-решетчатых формул вида (3), оптимальных по порядку сходимости на классах $L^m_{p,\lambda}(\Omega, P, A)$. При некоторых ограничениях на параметры, входящие в определение $L^m_{p,\lambda}$, такие формулы удается построить. Конструирование искомых формул проводится на основе формул с регулярным пограничным слоем С.Л.Соболева [1] и их обобщений на весовые кубатурные формулы, сделанных В.И.Половинкиным в [2, 3].

Для функций одной переменной близкие к данной постановке задачи рассмотрены на частных примерах Н.С.Бахваловым [4]. При интегрировании по n-мерному кубу функций с особенностями И.М.Соболь [5], используя равномерно распределенные последовательности в качестве узлов, показал, что сходимость таких формул улучшается при наличии гладкости подынтегральной функции вне точек особенностей.

Ограничения на классы $L^m_{p,\lambda}$

а$_1$) Область Ω, а также любое множество Ω_R представимы в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств, каждое из которых звездно относительно принадлежащего ему шара.

б$_1$) Для любого $R > 0$

$$\operatorname{mes} \omega_R(P) \le A_2 R^{n-s}, \quad 0 \le s \le n-1.$$

в$_1$) Параметры λ, p, m удовлетворяют соотношениям:

$$1 < p \le \infty, \quad mp > n,$$

$$-n+s<\lambda<m-(n-s)/p.$$

2. Оценка сверху нормы функционала погрешности кубатурных формул типа формул с пограничным слоем Соболева в пространстве $L_p^m(\Omega)$

Пусть B^n - множество точек R^n с целочисленными координатами;

$$H=\begin{pmatrix} h_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \dots & h_n \end{pmatrix},\ h=(h_1,\dots,h_n),\ h_i>0,\ i=1,\dots,n;$$

$$|x|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2};\quad |\Omega|=mes\,\Omega;$$

$$\Omega_{H\gamma}=\{x: h_j\gamma_j\le x_j<h_j(\gamma_j+1),\ j=1,\dots,n\},$$

$$\Omega_{LH\gamma}=\{x: |x_j-h_j\gamma_j|<L,\ j=1,\dots,n\},\ L>0,\ \gamma\in B^n;$$

$$\Omega^*_{H\gamma}=\Omega_{H\gamma}\cap\Omega,\quad \Omega^*_{LH\gamma}=\Omega_{LH\gamma}\cap\Omega;$$

$$B_0=\{\gamma: mes\,\Omega^*_{H\gamma}\ne 0\}.$$

Для достаточно малых $|h|$ построим интерполяционные операторы $I_{H\gamma}(x)$ порядка m, удовлетворяющие условиям (см. [2])

$$a_2)\ I_{H\gamma}(x)f(x)=\sum_{H(\gamma+\gamma')\in\Omega^*_{LH\gamma}} q_{H(\gamma+\gamma')}(x)f(H(\gamma+\gamma')),$$

$f(x)$ непрерывна на $\bar\Omega$, а функции $q_{H(\gamma+\gamma')}(x)$ равны нулю вне $\Omega^*_{H\gamma}$;

б$_2$) $|q_{H(\gamma+\gamma')}(x)| \le A_3$, константа A_3 не зависит от H, γ и γ';

в$_2$) $I_{H\gamma}(x)x^{\alpha} = \mathcal{E}_{\Omega^*_{H\gamma}}(x)x^{\alpha}$ для всех $|\alpha| < m$,

где $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{E}_{\Omega^*_{H\gamma}}(x)$ – характеристическая функция множества $\Omega^*_{H\gamma}$;

г$_2$) в точках $H\gamma$, удаленных от границ Ω более чем на $(2L+1)|h|$, функции $q_{H(\gamma+\gamma')}(x)$ удовлетворяют внутри Ω тождеству

$$q_{H(\gamma^{(1)}+\gamma')}(x) \equiv q_{H(\gamma^{(2)}+\gamma')}(x - H(\gamma^{(1)}-\gamma^{(2)})).$$

Рассмотрим кубатурные формулы вида

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \cong \sum_{\gamma\in B_0} \int_{\Omega^*_{H\gamma}} g(x)\left[I_{H\gamma}(x)f(x)\right]dx. \qquad (5)$$

Число m называется порядком формулы (5). Введем функционал погрешности

$$\ell^{H} = \sum_{\gamma\in B_0}' \ell_{H\gamma}, \quad (\ell_{H\gamma}, f) = \int_{\Omega^*_{H\gamma}} g\left[f - I_{H\gamma}f\right]dx.$$

Функционал ℓ^H является линейным ограниченным функционалом из $L_p^{m*}(\Omega)$ при $pm > n$. Пространство $L_p^m(\Omega)$ состоит из классов функций F, с нормой

$$\|F|L_p^m(\Omega)\| = \left\{\int_{\Omega}\left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}(\mathcal{D}^{\alpha}f)^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p}, \quad f(x)\in F.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $pm > n$ и вместо $\|F|L_p^m\|$ и $F \in L_p^m$ писать $\|f|L_p^m\|$ и $f\in L_p^m$, где $f(x)$ – непрерывный представитель из F.

Л е м м а 1. Пусть функционал ℓ^H является функционалом погрешности формулы (5), в которой $I_{H\gamma}(x)$ удовлетворяют условиям a_2)–r_2), а область Ω представима в виде объединения конечного числа непересекающихся множеств, каждое из которых звездно относительно принадлежащего ему шара. Тогда при $|h| \longrightarrow 0$ и любых $g(x) \in L_q(\Omega)$ и $f(x) \in L_p^m(\Omega)$ выполнено неравенство

$$|(\ell^H, f)| \leq K_0 \| g | L_q(\Omega) \| \sum_{|\alpha|=m} h^\alpha \left\{ \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha f|^p dx \right\}^{1/p}, \tag{6}$$

K_0 не зависит от $g(x), f(x), h, |\Omega|$; $1/p + 1/q = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что оценки сверху функционалов типа ℓ^H для матриц H вида $H = H_1 h_0$ ($h_0^n = |\det H|$, а элементы H_1 не зависят от h_0) получены при $h_0 \longrightarrow 0$ С.Л.Соболевым для $L_2^m(\Omega)$ и В.И.Половинкиным для $L_p^m(\Omega)$. Зафиксируем некоторое $\gamma \in B_0$ и соответственно множество $\Omega^*_{LH\gamma}$. По условию, $\Omega^*_{LH\gamma}$ получается в виде объединения конечного числа непересекающихся звездных множеств. Предположим для простоты, что $\Omega^*_{LH\gamma}$ само звездно относительно шара $Ш_{H\gamma} \subset \Omega^*_{LH\gamma}$ с центром в точке $\xi_{H\gamma} \in \Omega^*_{LH\gamma}$ и радиусом $\theta |h|$, $0 < \theta < 1$. Тогда любая $f(x) \in L_p^m(\Omega)$ представима на $\Omega^*_{LH\gamma}$ в виде (см. [1, 6]):

$$f(x) = |Ш_{H\gamma}|^{-1} \sum_{|\alpha|<m} \frac{1}{\alpha!} \int_{Ш_{H\gamma}} \mathcal{D}^\alpha f(y)(x-y)^\alpha dy +$$

$$+ |Ш_{H\gamma}|^{-1} m \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \int_{V_{H\gamma}} \mathcal{D}^\alpha f(y)(x-y)^\alpha \frac{z(x,y)}{|x-y|^n} dy =$$

$$\equiv P_{m-1,\gamma}(x) + \sum_{|\alpha|=m} f_{\alpha,\gamma}(x),$$

здесь в правой части тождества введены обозначения для соответствующих членов слева; множество $V_{H\gamma}$ состоит из точек шара $Ш_{H\gamma}$, а также точек, которые лежат на отрезках, соединяющих точку x с точками шара; $z(x,y) = (\rho_2^n - \rho_1^n)/n$, где ρ_2 – отрезок, который является общей частью множества $V_{H\gamma}$ и прямой, проходящей через точки x и

$y \in V_{H\gamma}$, $\rho_1 = max\{|x-y|, \rho_3\}$; ρ_3 – общая часть множества $V_{H\gamma} \setminus Ш_{H\gamma}$ и упомянутой выше прямой.

Функция $z(x,y)$ для всех $x \in \Omega^*_{LH\gamma}$ и $y \in V_{H\gamma}$ удовлетворяет неравенству

$$|z(x,y)| < 2(L+1)^{n-1}|h|^n.$$

Функции $f_{\alpha,\gamma}(x)$, в силу теорем вложения Соболева, непрерывны на $\bar{\Omega}^*_{LH\gamma}$. Теперь, учитывая, что ℓ^H равно нулю на полиномах $P_{m-1,\gamma}(x)$, имеем

$$|(\ell^H, f)| = |\sum_{\gamma\in B_0}\sum_{|\alpha|=m}(\ell_{H\gamma}, f_{\alpha,\gamma})| \le$$

$$\le \sum_{\gamma\in B_0}\sum_{|\alpha|=m}\left\{\int_{\Omega^*_{H\gamma}}|g|^q dx\right\}^{1/q}\left\{\int_{\Omega^*_{H\gamma}}|f_{\alpha,\gamma} - I_{H\gamma} f_{\alpha,\gamma}|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \mathcal{K}\sum_{\gamma\in B_0}\sum_{|\alpha|=m}\|g|L_q(\Omega^*_{H\gamma})\| \max_{x\in\bar{\Omega}^*_{LH\gamma}}|f_{\alpha,\gamma}(x)||\Omega_{H\gamma}|^{1/p}.$$

Далее,

$$\max_{x\in\bar{\Omega}^*_{LH\gamma}}|f_{\alpha,\gamma}(x)| \le |Ш_{H\gamma}|^{-1} h^\alpha \max_{x\in\bar{\Omega}^*_{LH\gamma}}\int_{V_{H\gamma}}\left|\mathcal{D}^\alpha f(y)\left(\frac{x}{h}-\frac{y}{h}\right)^\alpha\right|\left|\frac{x}{|h|}-\frac{y}{|h|}\right|^{-n} dy \le$$

$$\leq \mathcal{K}_1 |Ш_{H\gamma}|^{-1} h^{\alpha} |\Omega_{H\gamma}|^{1/q} \left\{ \int\limits_{V_{H\gamma}} |\mathcal{D}^{\alpha} f|^p dy \right\}^{1/p} \cdot \mathcal{J}_{\alpha,\gamma},$$

где, в силу $pm > n$,

$$\mathcal{J}_{\alpha,\gamma} = \max_{t \in \bar{\omega}^*_{L\gamma}} \left\{ \int\limits_{U_\gamma} |(t-\sigma)^{\alpha}|^q \left| \frac{h}{|h|} t - \frac{h}{|h|} \sigma \right|^{-nq} d\sigma \right\}^{1/q} \leq \mathcal{K}_2,$$

в выражении $\mathcal{J}_{\alpha,\gamma}$ произведена замена $t = x/h$, $\sigma = y/h$, причем множество $\Omega^*_{LH\gamma}$ перешло в $\omega^*_{L\gamma}$, а $V_{H\gamma}$ в U_γ; константа $\mathcal{K}_2$ не зависит от h и γ. Таким образом, окончательно имеем оценку

$$|(\ell^H, f)| \leq \mathcal{K}_3 \sum_{|\alpha|=m} \left(h^{\alpha} \sum_{\gamma \in B_0} \left\{ \int\limits_{\Omega^*_{H\gamma}} |g|^q dx \right\}^{1/q} \left\{ \int\limits_{V_{H\gamma}} |\mathcal{D}^{\alpha} f|^p dy \right\}^{1/p} \right),$$

из которой следует (6), если воспользоваться дискретным неравенством Гёльдера, а также оценкой

$$\sum_{\gamma \in B_0} \int\limits_{V_{H\gamma}} |\mathcal{D}^{\alpha} f|^p dy \leq (2L+1)^n \int\limits_{\Omega} |\mathcal{D}^{\alpha} f|^p dy.$$

Лемма доказана.

3. Построение кусочно-решетчатых кубатурных формул вида (3) и оценка сверху их погрешности на классах $L^m_{p,\lambda}$

Пусть N пробегает значения любой возрастающей последовательности чисел натурального ряда. Рассмотрим в R^n кубическую решетку B^n_h с шагом $h = [|\Omega| / N]^{1/n}$ по каждой переменной. Выберем целое $N_0 > 0$ и число $R_0 > 0$ не зависящими от N и такими, чтобы каждое из множеств $\omega_{R_0}(P)$ и Ω_{R_0} при $N > N_0$ содержало достаточно много точек решетки $B^n_{h'}$. Для некоторого целого $M_0 > 0$, не зависящего от N, рассмотрим относительно ξ уравнение

$$(\xi M_0+1)^{-1} = \begin{cases} h & \text{при } n > rs, \\ h^{1+\varepsilon} & \text{при } n = rs,\ \varepsilon > 0, \\ h^{\nu} & \text{при } n < rs, \end{cases} \qquad (7)$$

где $\nu = n/(sr)$, $r = (m+1/q)/(r_0+n-s)$.

Обозначим через M целую часть решения уравнения (7). Введем параметры:

$$h_0 = 1/(MM_0+1),\ t_k = h_0(M_0(k-1)+1),\ R_k = R_0 t_k^{r},$$

$$h_k = (R_{k+1}-R_k)/M_0 \quad (k=1,\dots,M),\ R_{M+1} = R_0,\ h_{M+1} = h$$

и множества:

$$Q_k = \omega_{R_{k+1}}(P) \setminus \omega_{R_k}(P), \quad k = 1,\dots,M,$$

$$Q_{M+1} = \bar{\Omega} \setminus \omega_{R_0}(P).$$

Таким образом, мы окружили множество особенностей P расширяющимися концентрическими областями Q_k. Обозначим через B_k совокупность целочисленных векторов $\gamma \in B^n$, для которых множества $\Omega^*_{h_k\gamma} = \Omega_{h_k\gamma} \cap Q_k$ имеют положительную меру в R^n. Используя узлы $h_k\gamma \in Q_k$, при достаточно больших N_0 и M_0 построим интерполяционные операторы $I_{h_k\gamma}(x)$ порядка m, удовлетворяющие свойствам a_2)–$г_2$), причем множества $\Omega^*_{Lh_k\gamma}$ выберем такими, чтоб

$$\Omega^*_{Lh_k\gamma} = \Omega_{Lh_k\gamma} \cap Q_k.$$

Рассмотрим формулу

$$\int\limits_{\Omega} f(x)q(x)dx \cong \int\limits_{\Omega} q(x)\left[\sum_{k=1}^{M+1}\sum_{\gamma\in B_k} I_{h_k\gamma}(x)f(x)\right]dx,$$

правую часть которой обозначим через $\Phi_p^N(f)$. Покажем, что число узлов N_1 формулы Φ_p^N при любом ограниченном M_0 (M_0 не зависит от N и $k=1,\dots,M+1$) удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{K}_1 N \leqslant N_1 \leqslant \mathcal{K}_2 N, \tag{8}$$

где константы $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ – одни и те же для всех N и N_1 .

Действительно, в силу ограничения б$_1$),

$$N_1 = \sum_{k=1}^{M+1}\left[1+O(h_k)\right](|Q_k|/h_k^n) \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{K}\sum_{k=1}^{M}(R_{k+1}^{n-s}-R_k^{n-s})/h_k^n+|Q_{M+1}|/h^n.$$

Так как функция $R=R_0 t^{\tau}$ непрерывно дифференцируема на $[h_0,1]$, то

$$R_{k+1}^{n-s} - R_k^{n-s} = R_0^{n-s}(t_k+\xi_k)^{\tau(n-s)-1}\tau(n-s)h_0 M_0,$$

$$h_k^n = (\tau R_0)^n (t_k+\xi_k')^{(\tau-1)n} h_0^n,$$

где $0\leqslant \xi_k, \xi_k' \leqslant M_0 h_0$, причем для любых $\xi\in[0,M_0h_0]$ и $t\in[h_0,1]$ имеем $\mathcal{K}_3\leqslant (t+\xi)/t \leqslant \mathcal{K}_4$ ($\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_4$ не зависят от h_0).

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{M}(R_{k+1}^{n-s}-R_k^{n-s})/h_k^n \leqslant \mathcal{K}h_0^{-n}\sum\limits_{k=1}^{M} t_k^{n-\tau s-1} h_0 M_0 \leqslant$

$$\leq \mathcal{K}_1 h_0^{-n} \int_{h_0}^{1} t^{n-rs-1} dt =$$

$$= \mathcal{K}_2 h_0^{-n} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n > rs, \\ |\ln h_0| & \text{при} \quad n = rs, \\ h_0^{n-sr} & \text{при} \quad n < rs. \end{cases}$$

Отсюда и из (7) следует, что $N_1 \leq \mathcal{K}_2 h^{-n}$. Аналогично доказывается оценка снизу. Соотношение (8) доказано.

Т е о р е м а 1. Пусть $g(x)$ – произвольная функция из $L_\infty(\Omega)$. Тогда при $N \to \infty$ имеет место оценка

$$\mathcal{D}_N\left(\Phi_p^N, L_{p,\lambda}^m(\Omega, P, A), g\right) \leq \mathcal{K} \begin{cases} N^{-\frac{m}{n}}, & \text{когда} \quad n > rs, \\ N^{-\frac{m}{n}+\varepsilon}, & \text{когда} \quad n = rs,\ \varepsilon > 0, \\ N^{-\mu}, & \text{когда} \quad n < rs, \end{cases}$$

где $\mu = m/(rs)$, $\mathcal{K}$ не зависит от N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через ℓ_p^N функционал, соответствующий формуле Φ_p^N. Из (6), а затем из условий (1) и (2)

для любой $f(x) \in L_{p,\lambda}^m$ имеем

$$|(\ell_p^N, f)| \leq \int_{\omega_{R_1}(P)} |gf|\,dx + \sum_{k=1}^{M+1} \|g|L_q(Q_k)\|\, h_k^m \|f|L_p^m(Q_k)\| \leq$$

$$\leq \mathcal{K}_1 h_0^{m+1/q} + \mathcal{K}_2 \sum_{k=1}^{M} |Q_k|^{1/q} \left[\varphi(Q_k)\right]^{1/p} \left[1 + R_k^{\lambda-m+(n-s)/p}\right] h_k^m +$$

$$+ \mathcal{K}_3 \|g|L_q(\Omega_{R_0})\| h^m.$$

Введем параметры $\sigma_0 = q(r-1)m + r(n-s) - 1$, $\sigma_1 = \sigma_0 +$

$+ qr(\lambda - m + (n-s)/p)$, причем (как следует из ограничений $в_1$)

на параметры $L^m_{p,\lambda}$) $\sigma_0 > 0$, а $\sigma_1 \geq 0$. Воспользовавшись

дискретным неравенством Гёльдера, получим

$$|(\ell_p^N, f)| \leq \mathcal{K}_0 (h_0^{m+1/q} + h^m) +$$

$$+ \mathcal{K}_4 h_0^m [\varphi(\omega_{R_0}(P))]^{1/p} \left[\left\{ \sum_{K=1}^{M} t_K^{\sigma_0} h_0 M_0 \right\}^{1/q} + \left\{ \sum_{K=1}^{M} t_K^{\sigma_1} h_0 M_0 \right\}^{1/q} \right].$$

Так как при $\sigma \geq 0$

$$\sum_{K=1}^{M} t_K^{\sigma} h_0 M_0 \leq \mathcal{K} \int_{h_0}^{1} t^{\sigma} dt \leq \mathcal{K}_5 ,$$

то

$$\mathcal{D}_N (\Phi_p^N, L^m_{p,\lambda}, q) = \sup_{f \in L^m_{p,\lambda}} |(\ell_p^N, f)| \leq \mathcal{K}(h_0^{m+1/q} + h_0^m + h^m).$$

Осталось подставить сюда конкретное выражение для h_0 , которое находится из уравнения (7).

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. В работах [1, 2] для пространств $L_p^m(\Omega)$ и любого ℓ^N вида (4) и такого, что $(\ell^N, x^\alpha) = 0$ при всех $|\alpha| < m$, доказана оценка

$$|(\ell^N, f)| \geq \mathcal{K} N^{-\frac{m}{n}} \| f | L_p^m(\Omega) \| ,$$

из которой, очевидно, следует оценка

$$\mathcal{D}_N(\Phi_p^N, L_{p,\lambda}^m, g) \geqslant \mathcal{K} N^{-\frac{m}{n}}.$$

Таким образом, формула Φ_p^N является оптимальной по порядку сходимости на классах $L_{p,\lambda}^m(\Omega, P, A)$ при $n > rs$.

4. Оптимальные по порядку сходимости формулы для классов $L_{p,\lambda}^m$ частного вида

а) Пусть $Z = \{x: \; x_{s+1} = 0, \; \ldots, x_n = 0\}$, s - целое; $P_0 \subset Z$, $P_0 \subset \partial\Omega$. Предположим, что вместо условия (2), участвующего в определении класса $L_{p,\lambda}^m(\Omega, P_0, A)$, выполнено условие

$$\left\{\int_\omega |\mathcal{D}^\alpha f|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant A[\varphi(\omega)]^{1/p}\left(1+R^{\lambda-|\alpha^{(2)}|+(n-s)/p}\right) \tag{9}$$

для любого $R>0$ и всех $\omega \subset \Omega_R$ и $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$ таких, что $|\alpha| = m$, $\alpha^{(1)} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha^{(2)} = (\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$. В п.3 при конструировании формулы Φ_p^N порядка m в каждой полосе Q_K использовалась кубическая решетка с матрицей периодов

$$H_K = \begin{pmatrix} h_K & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & h_K \end{pmatrix} \; (K=1,\ldots,M),$$

причем параметр M определялся уравнением (7). Построим аналогичную кубатурную формулу, только M определим как целую часть решения уравнения $(\xi M_0 + 1)^{-1} = h$, а в полосе Q_K будем использовать прямоугольную решетку с матрицей периодов

$$H_K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} h & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & h & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & h_K & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & h_K \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} (n-s) \end{array} .$$

Полученную формулу обозначим через $\Phi^N_{P_0}$. Так же, как и в п.3, можно проверить, что число узлов формулы $\Phi^N_{P_0}$ удовлетворяет соотношению (8).

Т е о р е м а 2. Пусть $g(x)$ - произвольная функция из $L_\infty(\Omega)$. Тогда при $N \to \infty$ справедлива оценка

$$\mathcal{D}_N(\Phi^N_{P_0}, L^m_{p,\lambda}(\Omega, P_0, A), g) \leq \mathcal{K} N^{-\frac{m}{n}},$$

где $\mathcal{K}$ не зависит от N .

Теорема 2 доказывается при помощи таких же выкладок, как и теорема 1.

б) Рассмотрим в R^n куб

$$K^n = \{x:\ 0 \leq x_j \leq 1,\ j=1,\dots,n\}$$

и множества:

$$\omega_R = \{x:\ (x_j > R_j \mid j=1,\dots,n) \wedge (x \in K^n)\},$$

$$K^n_R = K^n \setminus \omega_R, \quad R = (R_1,\dots,R_n);$$

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{n} \Pi_j,$$

$$\Pi_j = \{x:\ (0 \leq x_i \leq 1 \mid i \neq j,\ i=1,\dots,n) \wedge (x_j = 0)\}.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, причем $\lambda_1 > -1, \ldots, \lambda_n > -1$. Потребуем, чтобы функции класса $L^m_{p,\lambda}(K^n, \Pi, A)$ удовлетворяли условиям (10), (11):

$$\int_{\omega_R} |f(x)|\,dx \leq A\left(|\omega_R| + R_1^{\lambda_1+1} + \ldots + R_n^{\lambda_n+1}\right), \tag{10}$$

$$\left\{\int_{\omega} |\mathcal{D}^{\alpha} f|^p dx\right\}^{1/p} \leq A[\varphi(\omega)]^{1/p}\left(1 + R_1^{\lambda_1-\alpha_1+\frac{1}{p}} \times \ldots \times R_n^{\lambda_n-\alpha_n+\frac{1}{p}}\right) \tag{11}$$

при всех α таких, что $|\alpha| = m$, и всех $\omega \subset K^n_R$.

Перейдем к построению кубатурных формул для вычисления интегралов вида

$$\int_{K^n} f(x) g(x)\, dx,$$

где $f(x) \in L^m_{p,\lambda}(K^n, \Pi, A)$, $g(x) \in L_{\infty}(K^n)$. Пусть задано количество узлов $N > N_0$, N_0 фиксированно. Полагаем

$$h^n = |K^n| / N; \quad M = [(1+h)/(hM_0)]$$

($[\xi]$ - целая часть ξ, M_0 фиксированно);

$$h_0 = 1/(MM_0 + 1); \quad t_{k_j} = h_0(M_0(k_j - 1) + 1);$$

$$\tau_j = (m + 1/q)/(\min(\lambda_j, 0) + 1);$$

$$R_{j,k_j} = t_{k_j}^{\tau_j}; \quad h_{j,k_j} = (R_{j,k_j+1} - R_{j,k_j})/M_0;$$

$$h_k = (h_{1,k_1}, \ldots, h_{n,k_n}); \quad R_{j,M+1} \equiv 1; \quad k = (k_1, \ldots, k_n);$$

$$Q_k = \{x : R_{j,k_j} \le x_j < R_{j,k_j+1} \mid j=1,\ldots,n,\ 1 \le k_j \le M\}.$$

Для достаточно больших N_0, M_0 и каждого $N > N_0$, используя узлы $H_k \gamma$, где

$$H_k = \begin{pmatrix} h_{1,k_1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & h_{n,k_n} \end{pmatrix},$$

построим интерполяционные операторы $I_{H_k\gamma}(x)$ порядка m, носители которых расположены в Q_k и которые удовлетворяют условиям а$_2$)–г$_2$). Таким образом, получим формулу

$$\int\limits_{K^n} f(x)g(x)dx \cong \int\limits_{K^n} g(x) \left[\sum_{1\le k_1,\ldots,k_n\le M} \ \sum_{H_k\gamma \in Q_k} I_{H_k\gamma}(x) f(x) \right] dx,$$

правую часть которой обозначим через $\Phi_n^N(f)$, а ее функционал погрешности – через ℓ_n^N.

Т е о р е м а 3. <u>Пусть</u> $g(x)$ – <u>произвольная функция, принадлежащая</u> $L_\infty(K^n)$. <u>Тогда при</u> $N \to \infty$ <u>имеет место оценка</u>

$$\mathcal{D}_N(\Phi_n^N, L_{p,\lambda}^m(K^n, \Pi, A), g) \le \mathcal{K} N^{-\frac{m}{n}},$$

<u>константа</u> $\mathcal{K}$ <u>не зависит от</u> N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма 1, а также условия (10) и (11) дают

$$|(\ell_n^N, f)| \le \mathcal{K}_1 h_0^{m+1/q} +$$

$$+\mathcal{K}_2 \sum_{1\le k_1,\dots,k_n\le M} |Q_k|^{1/q}[\varphi(Q_k)]^{1/p} \sum_{|\alpha|=m} h_k^{\alpha}\left(1+R_{1,k_1}^{\lambda_1-\alpha_1+\frac{1}{p}}\times\dots\times R_{n,k_n}^{\lambda_n-\alpha_n+\frac{1}{p}}\right).$$

Отсюда следует, что главным членом погрешности $\mathcal{D}_N(\Phi_n^N, L_{p,\lambda}^m, g)$ при $N \longrightarrow \infty$ является выражение

$$S=\sum_{|\alpha|=m} S_\alpha,$$

где

$$S_\alpha=\sum_{1\le k_1,\dots,k_n\le M} |Q_k|^{1/q}[\varphi(Q_k)]^{1/p} h_k^{\alpha} R_{1,k_1}^{\lambda_1-\alpha_1+\frac{1}{p}}\times\dots\times R_{n,k_n}^{\lambda_n-\alpha_n+\frac{1}{p}}.$$

Оценим S_α, используя дискретное неравенство Гёльдера, а также явный вид параметров h_k, R_k и

$$|Q_k|=(R_{1,k_1+1}-R_{1,k_1})\times\dots\times(R_{n,k_n+1}-R_{n,k_n}).$$

Имеем

$$S_\alpha\le[\varphi(K^n)]^{1/p}\left\{\sum_{1\le k_1,\dots,k_n\le M}|Q_k| h_{1,k_1}^{q\alpha_1}\dots h_{n,k_n}^{q\alpha_n} R_{1,k_1}^{q(\lambda_1-\alpha_1+1)-1}\dots R_{n,k_n}^{q(\lambda_n-\alpha_n+1)-1}\right\}^{1/q}\le$$

$$\le \mathcal{K}_0 h_0^m\left\{\sum_{1\le k_1,\dots,k_n\le M} t_{k_1}^{\sigma_1}\dots t_{k_n}^{\sigma_n}(M_0h_0)^n\right\}^{1/q},$$

где $\sigma_j=q\left[r_j(\lambda_j+1)-(\alpha_j+1/q)\right]$, $j=1,\dots,n$.

Так как $\sigma_1>0,\dots,\sigma_n\ge 0$;

то

$$S_\alpha\le\mathcal{K}_2 h_0^m\left\{\int_{h_0}^{1} t^{\sigma_1}dt\dots\int_{h_0}^{1} t^{\sigma_n}dt\right\}^{1/q}\le\mathcal{K}_3 h_0^m.$$

Теорема 3 доказана.

В силу замечания 1 п.3 формулы $\Phi_{p_0}^N$ и Φ_{n}^N оптимальны по порядку сходимости в соответствующих классах.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М., "Наука", 1974, 803 с.
2. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы. - "Докл. АН СССР", 1968, т.179, № 3, с.542-544.
3. Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул. - "Сиб. мат. журн.", 1971, т.12, № 1, с.177-196.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы, ч.1. М., "Наука", 1973, 631 с.
5. Соболь И.М. Вычисление несобственных интегралов при помощи равномерно распределенных последовательностей. - "Докл. АН СССР", 1973, т.210, № 2, с.278-281.
6. Буренков В.И. Интегральное представление Соболева и формула Тейлора. - "Труды Мат. ин-та АН СССР", 1974, т.131, с.33-38.