УДК 517.947.4

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ СИСТЕМ ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГОМ

М.Е.Бессчётнов (Новосибирск)

§ 1. Постановка задачи, основной результат

Пусть S^+ – конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная замкнутым контуром Γ класса C^∞, т.е. параметрическое уравнение кривой $t(s) \in C^\infty$, $z = 0 \in S^+$, S^- – дополнение $S^+ \cup \Gamma$ до полной комплексной плоскости. На контуре Γ определим сдвиг α, ставящий в соответствие каждой точке $t \in \Gamma$ точку $\tau = \alpha(t) \in \Gamma$. Определим также оператор W, действующий на вектор-функцию $\varphi(t)$, заданную на контуре Γ : $W\varphi(t) = \varphi(\alpha(t))$. Предположим, что $\alpha(t)$ является диффеоморфизмом класса $C^\infty(\Gamma)$, $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$ и выполняется обобщенное условие Карлемана

$$\alpha(\alpha_{n-1}(t)) \equiv t, \quad \alpha_0(t) \equiv t \quad (W^n = I), \tag{1}$$

где, $\alpha_j(t) = \alpha(\alpha_{j-1}(t))$. Всюду ниже оператор W будем обозначать через W_+, если сдвиг α сохраняет ориентацию контура Γ, и через W_-, если сдвиг α изменяет ее на противоположную.

Следуя работе [1], рассмотрим операторы

$$K_m\varphi \equiv \sum_{k=0}^{M} A_{p-k}^{(m)} \lambda_+^{p-k} \varphi + \sum_{k=0}^{N} B_{q-k}^{(m)} \lambda_-^{q-k} \varphi + R_{M-p,N-q}^{(m)} \varphi, \tag{2}$$

где

$$\lambda_{\pm}^{0}\varphi = \frac{1}{2}\varphi(t_0) \pm \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt, \tag{3}$$

$$\lambda_{\pm}^{n}\varphi = \frac{d^n}{dt_0^n}\lambda_{\pm}^{0}\varphi \quad \text{при } n=1,2,\ldots, \tag{4}$$

$$\lambda_{+}^{-n}\varphi = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\lambda_{-}^{-n}\varphi = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{6}$$

а оператор $R^{(m)}_{M-p,N-q}$ определяется формулой

$$R^{(m)}_{M-p,N-q}\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[K_1^{(m)}\ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right)+K_2^{(m)}\ln\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+K_3^{(m)}\right]\varphi(t)\,dt, \tag{7}$$

где M, N – целые положительные числа, причем $M>p$, $N>q$.

Далее, $A^{(m)}_{p-k}(t_0), B^{(m)}_{q-k}(t_0), K_i^{(m)}(t,t_0), i=1,2,3,$ – заданные на Γ квадратные $(\ell\times\ell)$ – матрицы из $C^{\infty}(\Gamma)$, причем матрицы $K_1^{(m)}(t,t_0)$, $K_2^{(m)}(t,t_0)$ имеют в точке $t=t_0$ нуль порядка $>M-p, N-q$ соответственно. Операторы (2) образуют алгебру, т.е. композиция $K_1\cdot K_2$ таких операторов может быть представлена в виде (2). Коэффициенты "плюсовой" ("минусовой") части оператора $K_1\cdot K_2$ выражаются через "плюсовые" ("минусовые") части операторов K_1, K_2 по таким же формулам, что и коэффициенты произведения двух дифференциальных операторов.

Композиция операторов различных знаков является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром. Союзный оператор K_m' также представим в виде (2). Мы предполагаем, что $A_p^{(m)}(t), B_q^{(m)}(t)\not\equiv 0$. Пара чисел (p,q) называется порядком оператора K_m. Если $p,q<0$, то K_m является интегральным оператором Фредгольма 1-го рода. При

$\rho = q = 0$ он является сингулярным интегральным оператором, а при $\rho, q > 0$ – сингулярным интегродифференциальным.

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений

$$K\varphi \equiv \sum_{m=1}^{n} K_m W^{m-1} \varphi = f(t_0), \tag{8}$$

где $f(t_0) = (f_1, \ldots, f_\ell)$ – заданная на Γ комплекснозначная вектор-функция класса $C^\infty(\Gamma)$, а $\varphi(t)$ – искомая вектор-функция класса $C^{n_0}(\Gamma)$, где $n_0 = max(\rho, q)$. Теория систем без сдвига известна (см. [1-6]). Система (8) со сдвигом изучалась в работах [7-11], где приведена обширная библиография. Настоящая работа существенным образом опирается на результаты работ [1-3, 7-9].

Применим к системе (8) слева операторы $W, W^2, \ldots, W^{n-1}$. После этого в силу (1) получим еще $n-1$ уравнений относительно неизвестной функции φ. Полученные уравнения совместно с (8) образуют систему

$$\tilde{K}\rho = \tilde{f}, \tag{9}$$

которую назовем расширенной. Здесь ρ – $n\ell$ – вектор-столбец с блочными компонентами $\rho_k = W^{k-1}\varphi$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а $\tilde{K}$ – $(n \times n)$ – матрица с элементами $W^j K_m W^{n-j}$. Первая строка матрицы состоит из операторов $K_1, \ldots, K_n$, каждая последующая получается из предыдущей умножением слева на оператор W, справа – на оператор W^{-1} и циклической перестановкой операторов. В силу (1), $W^{-j} = W^{n-j}$.

Существенным моментом работы является тот факт, что оператор $\tilde{K}$, составленный из "окаймленных" операторов $W^j K_m W^{n-j}$ со сдвигом, есть оператор без сдвига. Привести оператор $\tilde{K}$ к такому виду можно потому, что каждая из композиций $W^j \lambda_\pm^6 W^{n-j}$ выражается линейно через операторы λ_+^6, λ_-^6 формулой вида (2) с коэффициентами, зависящими от сдвига α . Если все K_m являются операторами порядка (0,0), то из нормальности оператора $\widetilde{K}$ следует нётеровость оператора K . Наша задача состоит в отыскании условий на оператор $\widetilde{K}$, при которых оператор K уравнения (8) является нётеровым.

Оказывается, что нормальность оператора $\widetilde{K}$ существенным образом зависит от ориентации контура $\alpha \cdot \Gamma$ и порядка (p,q) операторов K_m . Кратко поясним суть дела. При положительной ориентации контура $\alpha \cdot \Gamma$ композиции $W^j \lambda_+^{\sigma} W^{n-j}$ (соответственно $W^j \lambda_-^{\sigma} W^{n-j}$) разлагаются по операторам λ_+^{σ} (соответственно λ_-^{σ}) (см. лемму 1 § 2). В этом случае порядок оператора $\widetilde{K}$ совпадает с порядком оператора K_m и

$$\widetilde{K}\varphi \equiv \sum_{k=0}^{M+M_1}{}' S_{p-k}\, \lambda_+^{p-k} \varphi + \sum_{k=0}^{N+M_1} D_{q-k}\, \lambda_-^{q-k} \varphi + \widetilde{R}_{\overline{M},\overline{N}}\, \varphi . \qquad (10)$$

При отрицательной ориентации контура $\alpha \cdot \Gamma$ "плюсовые" композиции $W^j \lambda_+^{\sigma} W^{n-j}$ разлагаются по операторам λ_-^{σ} , "минусовые" – по операторам λ_+^{σ} (см. лемму 2 § 2). В этом случае порядки операторов $\widetilde{K}$ и K_m могут не совпадать. Например, при $p>q$ порядок оператора $\widetilde{K}$ равен (p,p) :

$$\widetilde{K}\varphi \equiv \sum_{k=0}^{M+M_1} F_{p-k}\, \lambda_+^{p-k} \varphi + \sum_{k=0}^{M+M_1} G_{p-k}\, \lambda_-^{p-k} \varphi + \widetilde{L}_{\overline{M},\overline{N}}\, \varphi . \qquad (11)$$

Детальное описание матриц $S_{p-k}(t_0), D_{q-k}(t_0), F_{p-k}(t_0), G_{p-k}(t_0)$ дано в § 2 (см. теоремы 1, 2). Между представлениями (10), (11) оператора $\widetilde{K}$ имеется принципиальное различие: в (10) соотношение между числами p, q не влияет на нормальность оператора. Она определяется невырожденностью матриц S_p, D_q , в (11) это уже не так. При $p \neq q$ матрицы $F_p(t_0), G_p(t_0)$ имеют нулевые строки, поэтому $\widetilde{K}$ заведомо не является оператором нормального типа. Если же $p=q$, то матрицы $F_p(t_0)$, $G_p(t_0)$ нулевых строк, вообще говоря, не содержат. Если они невырожденны всюду на Γ, то оператор, заданный формулой (11), является оператором нормального типа.

Пусть порядок циклической группы, порожденной сдвигом α, равен двум $(n=2)$, и коэффициенты оператора $\tilde{K}$ подчинены ослабленному условию нормальности (одному из условий (k_1,k_2), $k_1,k_2>0$) [1, 2], которое состоит в следующем.

Рассмотрим цепочку матриц $S_p^1, S_p^2, \ldots, S_p^{k_1}, D_q^1, D_q^2, \ldots, D_q^{k_2}$, каждая из которых составляется по определенному алгоритму из коэффициентов системы (9). Условие (k_1,k_2) состоит, во-первых, в требовании постоянства ранга матриц S_p^i, D_q^j $i<k_1, j<k_2$, во-вторых, в невырожденности всюду на Γ матриц $S_p^{k_1}$, $D_q^{k_2}$. При выполнении этого условия оператор $\tilde{K}$ является нетеровым в классе $C^\infty(\Gamma)$ [1]. В этом случае система (8) также нетерова в классе $C^\infty(\Gamma)$.

В настоящей работе мы предполагаем, что $n>2$ и оператор $\tilde{K}$ является (k_1,k_2)-приводимым к оператору нормального типа. Это условие для $n=2$ является более общим при $k_1,k_2\geqslant 2$, так как не требует постоянства ранга матриц S_p^i, D_q^j, но предполагает невырожденность матриц $S_p^{k_1}$, $D_q^{k_2}$.

Следуя работе [3], мы скажем, что система (9) допускает F-преобразование, если матрица S_p удовлетворяет условиям: а) ее ранг не превосходит числа $z<nl$; б) существует не вырожденная на Γ матрица $A(t)\in C^\infty(\Gamma)$ такая, что последние $nl-z$ столбцов матрицы S_pA равны нулю для всех $t\in\Gamma$.

Аналогично система (9) допускает G-преобразование, если матрица D_q удовлетворяет условиям а), б) с числом s и матрицей B. Пусть система (9) допускает F, G-преобразования. Рассмотрим операторы

$$F\varphi \equiv A\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \lambda_{10} I_{nl-r} \end{pmatrix} A^{-1}\varphi,\quad G\psi \equiv B\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & \lambda_{01} I_{nl-s} \end{pmatrix} B^{-1}\psi, \quad (12)$$

где $\lambda_{10}\nu \equiv -\lambda_+^1(t\nu)+\lambda_-^0\nu$, $\lambda_{01}\mu \equiv \lambda_+^0\mu + t_0\lambda_-^1\mu$ – обратимые в $C^\infty(\Gamma)$ операторы (см. [6]). Композиция $\tilde{K}FG$ оператора $\tilde{K}$ с операторами (12) снова имеет порядок (p,q). Ее символические матрицы S_p^1, D_q^1 выражаются через матрицы S_p, S_{p-1} и D_q, D_{q-1} системы (9):

$$\begin{aligned} S_p^1(t) &= \left(S_p A_1,\ -tS_{p-1}A_2 - ptS_p\frac{d}{dt}A_2\right)A^{-1}, \\ D_q^1(t) &= \left(D_q B_1,\ tD_{q-1}B_2 + qtD_q\frac{d}{dt}B_2\right)B^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $A=(A_1,A_2)$, $B=(B_1,B_2)$, где $A_2(t)$ – $(nl\times(nl-r))$ – матрица ранга $nl-r$ класса $C^\infty(\Gamma)$, и удовлетворяет условию $S_pA_2=0$; $B_2(t)$ – $(nl\times(nl-s))$ – матрица того же класса, удовлетворяющая условию $D_qB_2=0$. Матрицы $A_1(t), B_1(t)$ произвольны, но таковы, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ невырожденны для всех $t\in\Gamma$. Они могут быть найдены, например, решением алгебраических уравнений $\bar{A}_2'(t)A_1(t)=0$, $\bar{B}_2'(t)B_1(t)=0$, соответственно. Ранги матриц $S_p^1(t), D_q^1(t)$ не зависят от произвола, который имеется в выборе матриц $A(t), B(t)$.

Определение (см. [3]). Система (9) является (k_1,k_2) -приводимой к системе нормального типа, если она допускает цепочку F, G -преобразований такую, что оператор композиции $\tilde{K}F_1G_1\ldots F_{k_1}\cdot G_{k_2}$ принадлежит к нормальному типу.

Отметим здесь, что если символические матрицы S_p, D_q оператора $\tilde{K}$ и матрицы $S_p^\nu(t)$, D_q^j, $\nu=1,\ldots,k_1$; $j=1,\ldots,k_2$, возникающие на каждой итерации цепочки F, G -преобразований оператора $\tilde{K}$ имеют на Γ постоянный ранг, то получим условие (k_1, k_2) .

Говорят [5], что оператор $\tilde{K}$ нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$, если: 1) ядро оператора $\tilde{K}$ и ядро союзного оператора $\tilde{K}'$ конечномерны и состоят из бесконечно дифференцируемых функций; 2) система (9) разрешима тогда и только тогда, когда $\tilde{f} \in C^{\infty}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}(t)\, w_j(t)\, dt = 0, \quad j=1,\dots,\tilde{\ell}, \tag{14}$$

где $w_1, \dots, w_{\tilde{\ell}}$ - базис ядра союзного оператора $(\tilde{K})'$. Из результатов работы [3] вытекает, что если система (9) является (k_1, k_2)-приводимой к системе нормального типа, то оператор $\tilde{K}$ нётеров в классе $C^{\infty}(\Gamma)$.

Основным содержанием настоящей работы является следующая

Т е о р е м а. Если оператор $\tilde{K}$ является (k_1, k_2)-приводимым к оператору нормального типа, то оператор K нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$.

Введем в рассмотрение операторы

$$K^{(j)}\varphi = \sum_{m=1}^{n} \omega_m^j K_m W^{m-1} \varphi, \quad j=0,1,\dots,n-1, \tag{15}$$

где ω_n - корни n -й степени из единицы. Отметим, что $K^{(0)} = K$. Операторы (15) называются сопутствующими друг другу. Мы скажем, что совокупность операторов (15) нётерова в $C^{\infty}(\Gamma)$, если каждый из операторов $K^{(j)}$ нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$. В основе доказательства основной теоремы, кроме представления операторов со сдвигом через операторы без сдвига, лежит следующая

Т е о р е м а 1. Совокупность операторов $\{K^{(j)}\}, j=0,1,\dots,n-1,$ нётерова в $C^{\infty}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{K}$ расширенной системы (9) нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$.

Сначала докажем два вспомогательных утверждения. Пусть $X_j = \ker K^{(j)}$, $\tilde{X} = \ker \tilde{K}$ означают ядра операторов $K^{(j)}$ и $\tilde{K}$ соответственно; $Y_j = \ker K^{(j)\prime}$, $\tilde{Y} = \ker(\tilde{K})'$ – ядра операторов $K^{(j)\prime}$, $(\tilde{K})'$, союзных с $K^{(j)}$ и $\tilde{K}$. Через H_j, H_j', $j=0,1,\dots,n-1$, обозначим операторы

$$
\begin{aligned}
H_j &= (I_\ell, \omega_1^j W I_\ell, \dots, \omega_{n-1}^j W^{n-1} I_\ell)\updownarrow, \\
H_j' &= (I_\ell, \omega_1^j W' I_\ell, \dots, \omega_{n-1}^j W'^{\,n-1} I_\ell)\updownarrow,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где I_ℓ – единичная $(\ell \times \ell)$ – матрица, а $W' = (\alpha'(t) W)^{n-1}$ является союзным с W оператором и удовлетворяет условию (1). Символ $(x_1, x_2, \dots, x_n)\updownarrow$ означает вектор-столбец с компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Л е м м а 1. <u>Ядро</u> $\tilde{X}$ <u>оператора</u> $\tilde{K}$ <u>разлагается в прямую сумму подпространств:</u> $\tilde{X} = H_0 X_0 \oplus H_1 X_1 \oplus \dots \oplus H_{n-1} X_{n-1}$. <u>Ядро</u> $\tilde{Y}$ <u>союзного оператора</u> $(\tilde{K})'$ <u>разлагается в прямую сумму подпространств:</u> $\tilde{Y} = H_0' Y_0 \oplus H_1' Y_1 \oplus \dots \oplus H_{n-1}' Y_{n-1}$.

Пусть $\tilde{\ell}$, ℓ_j, $j=0,1,\dots,n-1$, означают числа базисных векторов в $\tilde{X}$, X_j соответственно, а $\tilde{\ell}'$, ℓ_j' – числа базисных векторов в $\tilde{Y}$, Y_j.

С л е д с т в и е. <u>Имеют место соотношения:</u>

$$
\tilde{\ell} = \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j, \quad \tilde{\ell}' = \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j', \quad \varkappa(\tilde{K}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa(K^{(j)}). \tag{17}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы опирается на тот факт, что циклическая группа, порожденная сдвигом α, имеет конечный порядок. Для операторов порядка (0,0) лемма 1 фактически доказана в [7-9], хотя и не сформулирована в таком виде. Это доказательство носит алгебраический характер. В нем используется лишь линейность операторов K_m и связь между решениями систем $K^{(j)}\varphi=0$, $\tilde{K}\rho=0$. Поэтому оно переносится на класс интегродифференциальных операторов, рассматриваемых нами.

Для доказательства леммы 1 нам понадобятся операторы

$$P_j = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \omega_m^j W^{n-m} \mathcal{J}_{m+1}, \quad j=0,1,\dots,n-1, \tag{18}$$

где $\mathcal{J}_m$ – циклическая перестановка $(1,\dots,n) \longrightarrow (m,m+1,\dots,n,1,\dots,m-1)$. Эти операторы являются проекционными, так как $P_j^2=P_j$, $P_j P_i = P_i P_j = 0$, если $i\neq j$ и

$$\sum_{j=0}^{n-1} P_j = I. \tag{19}$$

Нэтрудно показать, что $\tilde{K} W^{n-m+1}\mathcal{J}_m = W^{n-m+1}\mathcal{J}_m \tilde{K}$. Поэтому $\tilde{K}P_j = P_j\tilde{K}$. Отсюда вытекает, что если $\rho\in \ker\tilde{K}$, то $P_j\rho \in \ker\tilde{K}$. В силу (19) ядро $\tilde{X}$ оператора $\tilde{K}$ разлагается в прямую сумму подпространств $P_j\tilde{X}$, $j=0,1,\dots,n-1$: $\tilde{X}=P_0\tilde{X}\oplus P_1\tilde{X}\oplus\dots \oplus P_{n-1}\tilde{X}$. Символом $B_{j,k}$, $j=0,1,\dots,n-1$; $k=2,\dots,n$, обозначим оператор

$$B_{j,k} \equiv \left(-\omega_{k-1}^j I_\ell, 0,\dots,0, W^{n-k+1} I_\ell, 0,\dots,0\right). \tag{20}$$

Разобьем $n\ell$ -вектор $\mu^{(j)}$ из $P_j\tilde{X}$ на n векторов $\mu_k^{(j)}$, $k=1,\dots,n$, длины ℓ. Нетрудно убедиться в том, что $B_{j,k}\mu^{(j)}=0$. Отсюда следует, что $\mu_k^{(j)}=\omega_{k-1}^j W^{k-1}\mu_1^{(j)}(t)$. Поскольку $\mu^{(j)}\in\tilde{X}$, то, применяя первую строку оператора $\tilde{K}$ к вектору $\mu^{(j)}$, получаем $K^{(j)}\mu_1^{(j)}=0$, т.е. $\mu_1^{(j)}\in X_j$. Вектор $\mu^{(j)}\in P_j\tilde{X}$ перепишем в виде $\mu^{(j)}=H_j\mu_1^{(j)}$, где H_j – оператор, определенный с помощью (16). Как мы показали, $P_j\tilde{X}=H_jA_j$, где A_j – подпространство в X_j. Докажем, что $A_j=X_j$. Предположим, что $A_j\neq X_j$. Пусть $\bar{\varphi}(t)$ – вектор из $X_j - A_j$. Тогда, в силу построения системы (9), вектор $\rho = H_j \bar{\varphi} \in \widetilde{X}$ и удовлетворяет соотношению $\mathcal{B}_{j,k}\,\rho = 0$. Поэтому $\bar{\varphi} \in A_j$. Противоречие показывает, что $A_j = X_j$. Таким образом, $\widetilde{X} = H_0 X_0 \oplus H_1 X_1 \oplus \ldots \oplus H_{n-1} X_{n-1}$.

Утверждение леммы для ядра $\widetilde{Y}$ оператора $(\widetilde{K})'$ доказывается по той же схеме, только вместо операторов $\widetilde{K}$, $K^{(j)}$ используются союзные с ними операторы $(\widetilde{K})'$, $K^{(j)\prime}$. Оператор $K^{(j)\prime}$ имеет вид

$$K^{(j)\prime}\psi \equiv \sum_{m=1}^{n} \omega_{m-1}^{j}\, W'^{\,m-1} K_m' \psi, \tag{21}$$

где $W' = (\alpha'(t) W)^{n-1}$ и удовлетворяет условию (1). Оператор $(\widetilde{K})'$ строится по оператору $K^{(0)\prime}$ с помощью W' по аналогии с $\widetilde{K}$, т.е. оператор $\widetilde{K^{(0)\prime}}$ совпадает с оператором $(\widetilde{K})'$, союзным с $\widetilde{K}$. Далее, вместо операторов (18), (20) используются следующие:

$$P_j' \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \omega_{m-1}^{j}\, W'^{\,n-m} \mathcal{J}_{m+1}, \tag{22}$$

$$B_{j,k}' \equiv (-\omega_{k-1}^{j} I_\ell, 0, \ldots, 0, W'^{\,n-k+1} I_\ell, 0, \ldots, 0), \tag{23}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1; \quad k = 2, \ldots, n.$$

Они аналогичны операторам P_j, $B_{j,k}$: операторы P_j' образуют семейство проекционных операторов, а оператор $\mathcal{B}_{j,k}'$ переводит в нуль подпространство $P_j' \widetilde{Y}$, т.е. для любого вектора $w^{(j)} \in P_j' \widetilde{Y}$ длины $n\ell$ с компонентами $w_k^{(j)}$, $k = 1, \ldots, n$, размерности ℓ каждая справедливо соотношение $\mathcal{B}_{j,k}' w^{(j)} = 0$.

Л е м м а 2. <u>Неоднородная система (8) разрешима в $C^\infty(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда разрешима в $C^\infty(\Gamma)$ неоднородная расширенная система (9).</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы для операторов порядка

(0,0) приведено в [7-9]. Наше доказательство отличается лишь деталями. Пусть ℓ-мерный вектор $\varphi \in C^{\infty}(\Gamma)$ является решением неоднородной системы (8). Тогда в силу построения расширенной системы (9) $n\ell$-мерный вектор $\rho(t)$ с компонентами $\rho_k(t) = W^{k-1}\varphi(t)$, $k=1,\dots,n$, есть решение неоднородной расширенной системы (9) и принадлежит $C^{\infty}(\Gamma)$, так как $\alpha(t) \in C^{\infty}(\Gamma)$. Обратно, пусть $n\ell$-мерный вектор $\rho \in C^{\infty}(\Gamma)$ является решением системы (9) с правой частью $\tilde{f}$. Поскольку $\tilde{K}P_0 = P_0\tilde{K}$, то вектор $P_0\rho$ является решением системы с правой частью $P_0\tilde{f}$. Выше мы уже показывали, что $P_0\rho$ есть $n\ell$-мерный вектор $\mu^0(t)$ с компонентами $\mu_k^{(0)}(t) = W^{k-1}\mu_1^{(0)}(t)$, $k=1,2,\dots,n$, размерности ℓ каждая. Далее, $\tilde{f}_1 = f$ в силу самого построения системы (9). Применив первую строку оператора $\tilde{K}$ к вектору $\mu^{(0)}(t)$, получим $K\mu_1^{(0)} = f$. Так как $\rho \in C^{\infty}(\Gamma)$, то $\mu_1^{(0)}(t)$ также принадлежит $C^{\infty}(\Gamma)$.
Лемма 2 доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1. Предположим, что совокупность операторов $\{K^{(j)}\}$, $j=0,1,\dots,n-1$, нётерова в $C^{\infty}(\Gamma)$. Покажем, что оператор $\tilde{K}$ также нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$. В силу следствия из леммы 1 ядро $\tilde{X}$ оператора $\tilde{K}$ и ядро $\tilde{Y}$ союзного оператора $(\tilde{K})'$ конечномерны, а из леммы 1 вытекает, что $\tilde{X}, \tilde{Y} \subset C^{\infty}(\Gamma)$. Далее, пусть w – произвольный вектор из $\tilde{Y}$. В силу формул (19) для операторов P_j'

$$\int_{\Gamma} \tilde{f}(t)w(t)dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Gamma} \tilde{f}(t)P_j'(t)w(t)dt.$$

Поскольку $P_j'w$ есть вектор с компонентами $\eta_k^{(j)}(t) = \omega_{k-1}^{j} W'^{k-1}$ $\eta_1^{(j)}(t)$, где $\eta_1^{(j)} \in Y_j$, то, учитывая, что $W'^n = I$, сумму интегралов преобразуем к виду

$$n\int_\Gamma f(t)\,l_1^{(0)}(t)\,dt+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\int_\Gamma f(t)\,l_1^{(j)}(t)\,dt\right)\sum_{m=1}^{n}\omega_{m-1}^{j}.$$

Так как $\sum_{m=1}^{n}\omega_{m-1}^{j}=0$, то условия разрешимости неоднородной расширенной системы (9) совпадают с условиями разрешимости неоднородной системы (8). Они выражаются соотношением $\int_\Gamma f\,l_1^{(0)}\,dt=0$, где $l_1^{(0)}$ – произвольный вектор из Y_0. Поэтому условие $\int_\Gamma \tilde f(t)\,w(t)\,dt=0$, где w – любой вектор из $\tilde Y$, необходимо и достаточно для разрешимости в $C^\infty(\Gamma)$ неоднородной системы (9). Следовательно, оператор $\tilde K$ нётеров в $C^\infty(\Gamma)$.

Обратно, пусть оператор $\tilde K$ нётеров в $C^\infty(\Gamma)$. Покажем, что каждый из операторов $K^{(j)}$, $j=0,1,\ldots,n-1$, нётеров в $C^\infty(\Gamma)$. Сначала установим нётеровость оператора $K^{(0)}$. В силу леммы 1 и следствия из нее, ядро оператора $K^{(0)}$ и ядро союзного оператора $K^{(0)\prime}$ конечномерны и состоят из функций класса $C^\infty(\Gamma)$. Пусть w – произвольный вектор из $\tilde Y$. Как мы уже показывали, $\int_\Gamma \tilde f(t)\,w(t)\,dt=$ $=n\int_\Gamma f\cdot\psi\,dt$, где ψ – l-мерный вектор из $Y^{(0)}$. Так как условия разрешимости системы (9) в $C^\infty(\Gamma)$ совпадают с условиями разрешимости в $C^\infty(\Gamma)$ системы (8) (лемма 2), то $\int_\Gamma f(t)\,\psi(t)\,dt=0$. Следовательно, оператор $K^{(0)}$ нётеров в $C^\infty(\Gamma)$. Перейдем к операторам $K^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,n-1$. Для доказательства нётеровости в $C^\infty(\Gamma)$ операторов $K^{(j)}$ достаточно показать нётеровость в $C^\infty(\Gamma)$ каждого из операторов $\tilde K^{(j)}$. Но это следует из соотношения $\tilde K^{(j)}=F^j\tilde K G^j$, где F^j – диагональная матрица с элементами $\omega_0^j,\omega_1^j,\ldots,\omega_{n-1}^j$, а G^j – матрица, обратная к F^j. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Требование нётеровости операторов $K^{(j)}$, $j=1,\ldots$ $\ldots,n-1$, в теореме 1 отбросить нельзя.

Действительно, пусть каждый или один из них имеет ограниченный дефект, но ортогональность правой части f уравнения $K^{(j)}\varphi = f$ к ядру Y_j оператора $K^{(j)\prime}$ является только необходимым условием разрешимости в $C^{\infty}(\Gamma)$ системы $K^{(j)}\varphi = f$. Тогда в силу следствия из леммы 1 и того, что условия разрешимости систем (8), (9) в $C^{\infty}(\Gamma)$ совпадают, заключаем: если оператор $K^{(0)}$ нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$, то оператор $\widetilde{K}$ также нётеров в $C^{\infty}(\Gamma)$. Но из нётеровости в $C^{\infty}(\Gamma)$ оператора $\widetilde{K}$ в силу теоремы 1 вытекает нётеровость в $C^{\infty}(\Gamma)$ каждого из операторов $K^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Получили противоречие. Замечание доказано.

§ 2. Приведение оператора $\widetilde{K}$ к виду, не содержащему сдвига в искомой функции

Доказательство теорем 1, 2 этого параграфа основано на том, что "окаймленные" операторы можно выразить через операторы, не содержащие сдвига в искомой функции. Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Л е м м а 1. Если $W = W_+$, то операторы $W^j \lambda_{\pm}^{\sigma} W^{n-j}$, $\sigma = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, выражаются формулой

$$W^j \lambda_{\pm}^{\sigma} W^{n-j} \varphi = \sum_{m=0}^{M_1} \beta_{m,\sigma}(t_0) \lambda_{\pm}^{\sigma - m} \varphi + R^{(\pm,\sigma,j)} \varphi, \qquad (24)$$

где $R^{(\pm,\sigma,j)}$ – операторы вида (7): $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}_{\infty,\infty}$, если $\sigma \geq 0$, и $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}_{M_1, M_1}$ при $\sigma < 0$. Функции $\beta_{m,\sigma}(t_0)$ определяются так: при $\sigma < 0$

$$\beta_{m,\sigma}(t_0) = \binom{m + |\sigma| + 1}{m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\left(\frac{\alpha_j(t) - \alpha_j(t_0)}{t - t_0} \right)^{|\sigma| - 1} \alpha_j'(t) \right]_{t = t_0}; \qquad (25)$$

если $\sigma = m = 0$, то $\beta_{m,\sigma} = 1$; при $\sigma = 0$ и $0 < m < M_1$ функции $\beta_{m,\sigma} \equiv 0$; если же $\sigma > 0$, то они являются коэффициентами разложения оператора $\left[(\alpha_j'(t_0))^{-1} d/dt_0\right]^{\sigma}$ в сумму по убывающим степеням оператора d/dt_0 от σ до единицы.

Доказательство. При $\sigma = 0$ получаем $W^j \lambda_{\pm}^0 W^{n-j}\varphi = \lambda_{\pm}^0 \varphi \mp R^{(\pm,0,j)}\varphi$, где $R^{(\pm,0,j)}$ – интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром

$$K^{(\pm,0,j)}(t,t_0) = \left(\frac{1}{t-t_0} - \frac{\alpha_j'(t)}{\alpha_j(t)-\alpha_j(t_0)}\right),$$

поэтому $R^{(\pm,0,j)} = R^{(\pm,0,j)}_{\infty,\infty}$. В случае $\sigma > 0$ нетрудно убедиться, что

$$W^j \lambda_{\pm}^{\sigma} W^{n-j}\varphi = \left[(\alpha_j'(t_0))^{-1}\frac{d}{dt_0}\right]^{\sigma} W^j \lambda_{\pm}^0 W^{n-j}\varphi. \quad (26)$$

При $\sigma < 0$ из композиций $W^j \lambda_{+}^{\sigma} W^{n-j}(W^j\lambda_{-}^{\sigma} W^{n-j})$ выделяются операторы $\lambda_{+}^{\sigma}\ (\lambda_{-}^{\sigma})$:

$$W^j \lambda_{\pm}^{\sigma} W^{n-j}\varphi = \lambda_{\pm}^{\sigma}\left(v(t,t_0)\varphi\right) + R^{(\pm,\sigma,j)}\varphi,$$

где

$$v(t,t_0) = \left(\frac{\alpha_j(t)-\alpha_j(t_0)}{t-t_0}\right)^{|\sigma|-1}\alpha_j'(t),$$

а $R^{(\pm,\sigma,j)}$ – операторы вида (7). Это следует из того, что функция $K_3^{(+,\sigma,j)}(t,t_0)(K_3^{(-,\sigma,j)}(t,t_0))$ содержит множителем разность логарифмов вида

$$\ln\left(1-\frac{\alpha_j(t_0)}{\alpha_j(t)}\right) - \ln\left(1-\frac{t_0}{t}\right),$$

которая, как нетрудно проверить, принадлежит классу $C^{\infty}(\Gamma\times\Gamma)$. Функции $K_\nu^{(\pm,\sigma,j)}(t,t_0)$, $\nu=1,2$, имеют в точке $t=t_0$ нули порядков $> M_1$, поэтому $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}$. Разложив функцию $v(t,t_0)$ по формуле Тейлора в точке t_0 по параметру t придем к формуле (24).

Лемма 2. Если $W = W_-$, то при четных j операторы $W^j \lambda_\pm^\sigma W^{n-j}$ выражаются формулой (24), а при нечетных

$$W^j \lambda_\pm^\sigma W^{n-j} \varphi = \sum_{m=0}^{M_1} \beta_{m,\sigma}(t_0) \lambda_\mp^{\sigma-m} \varphi + R^{(\pm,\sigma,j)} \varphi, \qquad (27)$$

где $R^{(\pm,\sigma,j)}$ – операторы вида (7): $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}_{\infty,\infty}$, если $\sigma > 0$, и $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}_{M_1,M_1}$ при $\sigma < 0$. Функции $\beta_{m,\sigma}(t_0)$ те же, что и в лемме 1.

Доказательство леммы 2 распадается на два случая: а) j четно; б) j нечетно. В первом случае ориентация контура Γ при отображении α_j не меняется, поэтому имеем случай леммы 1. При нечетных j ориентация контура Γ меняется на противоположную. В этом случае из "минусовых" окаймленных операторов выделяются "плюсовые" операторы без сдвига, и наоборот. Например, при $\sigma = 0$ имеем $W^j \lambda_\pm^0 W^{n-j} \varphi = \lambda_\mp^0 \varphi \pm R^{(\pm,0,j)} \varphi$. Из этой формулы, учитывая (26), получим утверждение леммы 2 для $\sigma > 0$. При $\sigma < 0$ из композиций $W^j \lambda_+^\sigma W^{n-j}$ $(W^j \lambda_-^\sigma W^{n-j})$ выделяются операторы λ_-^σ (λ_+^σ):

$$W^j \lambda_\pm^\sigma W^{n-j} \varphi = \lambda_\mp^\sigma (\sigma(t,t_0)\varphi) + R^{(\pm,\sigma,j)} \varphi,$$

где $R^{(\pm,\sigma,j)}$ – операторы вида (7). Это следует из того, что функция $L_3^{(+,\sigma,j)}(t,t_0)$ $(L_3^{(-,\sigma,j)}(t,t_0))$ содержит разность логарифмов вида

$$\ln\left(1 - \frac{\alpha_j(t_0)}{\alpha_j(t)}\right) - \ln\left(1 - \frac{t}{t_0}\right),$$

которая является элементом $C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$. Далее, функции $L_\nu^{(\pm,\sigma,j)}(t,t_0)$, $\nu = 1, 2$, имеют в точке $t = t_0$ нули порядков $> M_1$, поэтому $R^{(\pm,\sigma,j)} = R^{(\pm,\sigma,j)}_{M_1,M_1}$. Как и выше, разложив $\sigma(t,t_0)$ по формуле Тейлора в точке t_0 по t, придем к формуле (27).

Лемма 3. Если $W = W_+$, то

$$W^j R^{(m)}_{M,N} W^{n-j} \varphi = R^{(m,j)}_{M-p,N-q} \varphi. \qquad (28)$$

Если же $W = W_-$, то при четных j оператор $W^j R^{(m)}_{M,N} W^{n-j}$ выражается по формуле (28), а при нечетных j

$$W^j R^{(m)}_{M,N} W^{n-j} \varphi = R^{(m,j)}_{N-q,M-p} \varphi. \qquad (29)$$

Доказательство леммы 3 аналогично предыдущему.

Приступим к доказательству теорем 1, 2. Рассмотрим сначала операторы $W^j K_m W^{n-j}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$; $m = 1, \ldots, n$. При $W = W_+$ для каждого из них в силу лемм 1, 3 справедливо представление

$$W^j K_m W^{n-j} \varphi = \sum_{k=0}^{M+M_1} S^{(j,m)}_{p-k} \lambda_+^{p-k} \varphi + \sum_{k=0}^{N+M_1} D^{(j,m)}_{q-k} \lambda_-^{q-k} \varphi + R^{(j,m)}_{\bar M, \bar N} \varphi, \qquad (30)$$

где

$$\begin{aligned} S^{(j,m)}_{p-k}(t_0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{\nu, p-k+\nu}(t_0) W^j A^{(m)}_{p-k+\nu}(t_0), \\ D^{(j,m)}_{q-k}(t_0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{\nu, q-k+\nu}(t_0) W^j B^{(m)}_{q-k+\nu}(t_0), \end{aligned} \qquad (31)$$

а $R^{(j,m)}_{\bar M, \bar N}$ – оператор вида (7), $\bar M = \min(M_1, M-p)$, $\bar N = \min(M_1, N-q)$.

Рассмотрим случай, когда $W = W_-$. Если j четно, то контур $\alpha_j \cdot \Gamma$ ориентирован положительно. Следовательно, имеем случай $W = W_+$, поэтому операторы $W^j K_m W^{n-j}$ выражаются формулой (30). При нечетном j контур $\alpha_j \cdot \Gamma$ ориентирован отрицательно. В этом случае

$$W^j K_m W^{n-j} \varphi = \sum_{k=0}^{N+M_1} F^{(j,m)}_{q-k} \lambda_+^{q-k} \varphi + \sum_{k=0}^{M+M_1} G^{(j,m)}_{p-k} \lambda_-^{p-k} \varphi + R^{(j,m)}_{\bar N, \bar M} \varphi, \qquad (32)$$

где

$$
\begin{aligned}
F_{q-k}^{(j,m)}(t_0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{\nu,\, q-k+\nu}(t_0)\, W^j B_{q-k+\nu}^{(m)}(t_0),\\
G_{p-k}^{(j,m)}(t_0) &= \sum_{\nu=0}^{k} \beta_{\nu,\, p-k+\nu}(t_0)\, W^j A_{p-k+\nu}^{(m)}(t_0),
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

а $R_{\bar N,\bar M}^{(j,m)}$ – оператор вида (7).

Формулы (30), (32) показывают, что каждый из операторов $W K_m W^{-j}$ имеет вид (2). Этим свойством обладает также и оператор $\widetilde K$. Действительно, подстановка формул (30), (32) в операторную матрицу $\widetilde K$ приводит к следующим результатам.

Т е о р е м а 1. Если $W = W_+$, то оператор $\widetilde K$ выражается формулой

$$
\widetilde K \rho = \sum_{k=0}^{M+M_1} S_{p-k}\, \lambda_+^{p-k} \rho + \sum_{k=0}^{N+M_1} D_{q-k}\, \lambda_-^{q-k} \rho + R_{\bar M,\bar N}\, \rho, \qquad (34)
$$

где $S_{p-k}(t_0), D_{q-k}(t_0)$ – $(n\ell \times n\ell)$ –матрицы класса $C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$, а $R_{\bar M,\bar N}$ – оператор вида (7).

Т е о р е м а 2. Пусть $W = W_-$ и, для определенности, $M > N$, $p > q+1$, n нечетно. Тогда оператор $\widetilde K$ выражается формулой

$$
\widetilde K \rho = \sum_{k=0}^{M+M_1} F_{p-k}\, \lambda_+^{p-k} \rho + \sum_{k=0}^{M+M_1} G_{p-k}\, \lambda_-^{p-k} \rho + L_{\bar M,\bar N}\, \rho, \qquad (35)
$$

где $F_{p-k}(t_0)$, $G_{p-k}(t_0)$ – $(n\ell \times n\ell)$ –матрицы из $C^\infty(\Gamma \times \Gamma)$, а $L_{\bar M,\bar N}$ – оператор вида (7).

Дадим описание матриц $S_{p-k}, D_{q-k}, F_{p-k}, G_{p-k}$. Условимся под символом J_m понимать циклическую перестановку $(1,\dots,n) \to (m, m+1, \dots, n, 1, \dots, m-1)$. Все перечисленные матрицы блочные. Первой строкой матрицы S_{p-k} при $k=0,\dots,M$ является матричный блок

$$S^{(1)}_{p-k}(t_0)=\left(A^{(1)}_{p-k},\ldots,A^{(n)}_{p-k}\right), \tag{36}$$

а ее i-я строка получается перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $S^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$, выражающихся формулой (31). При $k=M+1,\ldots$ $\ldots,M+M_1$ матрица S_{p-k} получается из матрицы S_{p-k} при $k=0,\ldots$ $\ldots,M$ занулением первой строки. Матрица D_{q-k} получается из матрицы S_{p-k} заменой символов A,S,p на B,D,q соответственно.

Матрицы F_{p-k}, G_{p-k}. Первой строкой матрицы F_{p-k} при $k=0,\ldots,p-q-1$ является матричный блок (36). Строки с четными номерами i - нулевые, а при нечетных i они получаются перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $S^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$, из (31). При $k=p-q,\ldots,p-q+N+M_1$ матрица F_{p-k} такова: ее первой строкой является матричный блок (36), строки с четными номерами i получаются перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $F^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$, выражающихся формулой (33), а при нечетных $i>1$ - элементов $S^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$. Наконец, при $k=p-q+N+M_1+1,\ldots,M+M_1$ первая строка, а также строки с четными номерами i нулевые. При нечетных i они получаются перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $S^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$.

Матрица G_{p-k} при $k=0,\ldots,p-q-1$ имеет нулевыми строки с нечетными номерами, при четных i они получаются перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $G^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$, из формулы (33). При $k=p-q,\ldots,p-q+N$ первой строкой матрицы G_{p-k} является матричный блок $G^{(1)}_{p-k}=\left(B^{(1)}_{p-k},\ldots,B^{(n)}_{p-k}\right)$, i-я строка при четных i получается перестановкой $\mathcal{J}_{n-i+2}$ элементов $G^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$; при нечетных $i>1$ - элементов $D^{(i-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\ldots,n$ из (31). При $k=p-q+N+1,\ldots,p-q+N+M_1$ матрица G_{p-k} получается из матрицы G_{p-k}, $k=p-q,\dots,p-q+N$, занулением первой строки. Наконец, при $k=p-q+N+M_1+1,\dots,M_1+M$ матрица G_{p-k} такова: строки с нечетными номерами нулевые, а при четных s они получаются перестановкой J_{n-s+2} элементов $G^{(s-1,m)}_{p-k}$, $m=1,\dots,n$.

Литература

1. Сакс Р.С. Об одном классе сингулярных интегродифференциальных уравнений. – "Дифференц. уравнения", 1969, т.5, № 1, с.115–137.

2. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Спецкурс. Новосибирск, 1975. 164 с.

3. Сакс Р.С. Об одномерных сингулярных интегродифференциальных операторах, приводимых к нормальному типу. Труды семинара С.Л.Соболева, П, 1976, с.83–108.

4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963, 640 с.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., "Наука", 1968, 511 с.

6. Товмасян Н.Е. К теории сингулярных интегральных уравнений. – "Дифференц. уравнения", 1967, 3, № 1, с.69–80.

7. Зверович Э.И., Литвинчук Г.С. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. – "Успехи мат. наук", 1968, т.23, вып.3, с.67–121.

8. Литвинчук Г.С. Теория Нётера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно-сопряженными неизвестными. – "Изв. АН СССР. Серия мат.", 1967, т.31, № 3, с.536–586.

9. Литвинчук Г.С. Исправления к работе "Теория Нётера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно-сопряженными неизвестными", – "Изв. АН СССР. Серия

мат.", 1968, т.32, № 6, с.1414-1417.

10. К о р д з а д з е Р.А. Об индексе сингулярных интегро-функциональных операторов. - "Докл. АН СССР", 1969, т.185, № 4, с.753-756.

11. К а р а п е т я н ц Н.К., С а м к о С.Г. Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом. - "Докл. АН СССР", 1972, т.202, № 2, с.273-276.