УДК 517.946

О НЁТЕРОВОСТИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В R^n

П.С. Филатов (Новосибирск)

В работе рассматривается линейный дифференциальный равномерно квазиэллиптический оператор

$$L(x,D)u(x) = \sum_{\alpha\theta\le 1} a_\alpha(x) D^\alpha u(x),$$

определенный на всем евклидовом пространстве R^n. Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора L стабилизируются на бесконечности, причем коэффициенты при младших производных ($\alpha\theta < 1$) стремятся к нулю при $|x|\to\infty$. Оператор L рассматривается на функциях класса $C^{l+\lambda}$ с условием на бесконечности в виде суммируемости старших производных в степени p. При этих условиях доказывается конечномерность ядра и коядра оператора L.

Вопрос о разрешимости уравнений квазиэллиптического типа (к которым, очевидно, относятся и эллиптические, параболические и $2b$-параболические уравнения) исследовался многими авторами. В работах обзорного характера [1 - 6] приведена обширная библиография. Отметим еще работы [7 - 19], в которых при различных условиях устанавливалась нормальная или однозначная разрешимость квазиэллиптических уравнений во внешности ограниченной области и во всем пространстве (см. также библиографию в [20, 21]).

§ 1. Основные результаты

Введем некоторые обозначения: $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$, α,β и т.д. - мультииндексы, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$ - показатель однородности оператора L, $0<\theta_j\le 1$, $j=1,2,\dots,n$;

$$\sigma^\alpha=(\sigma^{\alpha_1},\sigma^{\alpha_2},\dots,\sigma^{\alpha_n}),\quad x^\alpha=\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},$$

$$x/\sigma^\alpha=(x_1/\sigma^{\alpha_1},\dots,x_n/\sigma^{\alpha_n}),\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}};$$

запись $\alpha \leqslant \beta$ означает, что $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j=1,2,\ldots,n$;

$$|u, L_p^{\ell}(R^n)| = \sum_{\rho\theta=1} |D^{\rho}u, L_p(R^n)|,$$

где $\ell=(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n)$, $\ell_j=\theta_j^{-1}$, $j=1,2,\ldots,n$;

$$|u, C^{\ell+\lambda}(R^n)| = \sum_{\rho\theta\leqslant 1} \sup_{x\in R^n} |D^{\rho}u(x)| +$$

$$+\sum_{\rho\theta=1}\sum_{j=1}^{n} \sup_{h>0} \frac{\sup\limits_{x,|w|<h} |D^{\rho}u(x+we_j)-D^{\rho}u(x)|}{h^{\lambda_j}},$$

где $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, $0<\lambda_j<1$, $j=1,2,\ldots,n$.

Равномерная квазиэллиптичность оператора L означает, что

$$|L_0(x,i\xi)| \equiv \Big|\sum_{\alpha\theta=1} a_{\alpha}(x)(i\xi)^{\alpha}\Big| \geqslant K<\xi> \tag{1}$$

для всех $x,\xi\in R^n$, где $K>0$ – константа и

$$<\xi> = \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{2\ell_j}\Big)^{1/2}, \quad \ell_j=\theta_j^{-1}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Очевидно, что все ℓ_j – целые положительные числа.

Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ достаточно гладкие и удовлетворяют условиям: при $\alpha\theta=1$

$$|a_{\alpha}(x)| \leqslant C, \quad x\in R^n, \tag{2}$$

$$|D^{\rho}a_{\alpha}(x)| \leqslant C(1+<x>)^{-d_{\alpha}}, \ \rho>0, \ x\in R^n, \ d_{\alpha}>0; \tag{3}$$

и при $\alpha\theta<1$

$$|D^{\rho}a_{\alpha}(x)| \leqslant C(1+<x>)^{-d_{\alpha}}, \ \rho\geqslant 0, \ x\in R^n, \ d_{\alpha}>0. \tag{4}$$

Здесь и далее буквой C мы обозначаем различные константы.

Из условий (2)–(4) при $d_{\alpha}>1$ следует, что оператор L можно представить в виде $L=L_{\infty}+L_1$, где

$$L_{\infty}=\sum_{\alpha\theta=1} a_{\alpha}(\infty)D^{\alpha}, \quad L_1=\sum_{\alpha\theta<1} b_{\alpha}(x)D^{\alpha}, \quad a_{\alpha}(\infty)=\lim_{|x|\to\infty} a_{\alpha}(x)$$

и

$$|D^{\rho}b_{\alpha}(x)| \leqslant C(1+<x>)^{-d_{\alpha}}, \ \rho\geqslant 0, \ x\in R^n. \tag{5}$$

В качестве области определения оператора L мы возьмем пространство функций $u(x)\in C^{\ell+\lambda}(R^n)\cap L_p^{\ell}(R^n)$ таких, что

$$\lim_{|t|\to\infty} \Big(\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{t_j}\Big)\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_n} u(\tau)\,d\tau=0. \tag{6}$$

Обозначим это пространство буквой X. Из теоремы о выходе на полином функций класса $L_p^\ell(R^n)$ при $1<p<|\theta|$ (см. [22]) следует, что условие (6) исключает из пространства X константы. По той же теореме, $\|u, L_q(R^n)\| < \infty$, где $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\theta| = 1.$

Введем в пространстве X норму

$$\|u, X\| = \|u, C^{\ell+\lambda}(R^n)\| + \|u, L_p^\ell(R^n)\| + \|u, L_q(R^n)\|.$$

Определим еще пространство $Y = C^\lambda \cap L_q(R^n)$.

По теореме о выходе на полином [22], $D^\alpha u \in L_{q_\alpha}$, где $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_\alpha}\right)|\theta| = 1-\alpha\theta$. Отсюда, учитывая условие (4) и полагая $\frac{p}{q_\alpha}+\frac{1}{q'}=1$, получаем

$$\int |a_\alpha(x) D^\alpha u(x)|^p dx \leqslant \left(\int |a_\alpha(x)|^{pq'} dx\right)^{1/q'} \cdot \|D^\alpha u, L_{q_\alpha}\|^p \leqslant$$

$$\leqslant \int (1+\langle x\rangle)^{-\frac{d_\alpha|\theta|}{1-\alpha\theta}} dx \, \|D^\alpha u, L_{q_\alpha}\|^p \leqslant C\|D^\alpha u, L_{q_\alpha}\|^p.$$

Интеграл конечен, так как $\frac{d_\alpha|\theta|}{1-\alpha\theta} > |\theta|$. Следовательно, оператор $L: X \to Y$ ограничен. Имеет место

Т е о р е м а. Если выполнены условия (1-4), $1<p<|\theta|$, $d_\alpha > |\theta|/p$, $\lambda_j = \lambda_0 \ell_j$, $\lambda_0 \leqslant \theta_0 = \ell_0^{-1}$, где ℓ_0 - наименьшее общее кратное чисел ℓ_j, $j=1,2,\ldots,n$, то

$$\|u, X\| \leqslant C\|Lu, Y\| + C\|u, C^\ell(U_R)\|, \tag{7}$$

где $U_R = \{x: |x| \leqslant R\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будет дано в § 2.

С л е д с т в и е. Ядро оператора L конечномерно.

Действительно, пространство X компактно вложено в $C^\ell(U_R)$ (так как вложение $C^{\ell+\lambda}$ в $C^\ell(U_R)$ компактно), а L - ограниченный и, следовательно, замкнутый оператор из X в Y. Тогда из оценки (7) следует конечномерность ядра и замкнутость в Y области значений LX оператора L (см., например, [23]).

Конечномерность коядра оператора L следует из существования правого регуляризатора $R: LR = I + T$, где T вполне непрерывен (см.[23]). Оператор R будет построен в § 3.

§ 2. Априорная оценка

По лемме 7 работы [20], если $u(x)$ - регулярная обобщенная функция класса S', $u\in L_p^{loc}(R^n), p>1$, растущая на бесконечности не быстрее $|x|^{l}$, и для u выполнено условие (6), то найдется такое целое положительное k, что для почти всех $x\in R^n$

$$u(x)=\lim_{h\to 0} u_h(x),$$

где

$$u_h(x)=(2\pi)^{-n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\theta|-1}\iint e^{-\langle\xi\rangle^{2k}}\langle\xi\rangle^{2k}e^{-i\frac{t-x}{\sigma^\theta}\xi}d\xi\, u(t)\,dt\,d\sigma.$$

Преобразуя этот интеграл и считая $Lu=f$, получим (доказательство аналогично доказательству леммы 1 [24])

$$u_h(x)=u_h^{(1)}(x)+u_h^{(2)}(x)+u_h^{(3)}(x),$$

где

$$D^p u_h^{(1)}(x)=\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\theta|-p\theta}\int G_1\left(\frac{t-x}{\sigma^\theta}\right)f(t)\,dt\,d\sigma,$$

$$D^p u_h^{(2)}(x)=\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\theta|-p\theta}\int G_2\left(t,\frac{t-x}{\sigma^\theta}\right)f(t)\,dt\,d\sigma,$$

$$D^p u_h^{(3)}(x)=\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\theta|-p\theta}\int G_3\left(\sigma,t,\frac{t-x}{\sigma^\theta}\right)u(t)\,dt\,d\sigma.$$

Здесь

$$G_1(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{-\langle\xi\rangle^{2k}}\frac{\langle\xi\rangle^{2k}(i\xi)^p}{L_\infty(i\xi)}e^{-ix\xi}d\xi,$$

$$G_2(t,x)=-(2\pi)^{-n}\sum_{\alpha\theta=1}\int e^{-\langle\xi\rangle^{2k}}\frac{\langle\xi\rangle^{2k}(i\xi)^{p+\alpha}b_\alpha(t)}{L_\infty(i\xi)L_0(t,i\xi)}e^{-ix\xi}d\xi,$$

$$G_3(\sigma,t,x)=(2\pi)^{-n}\sum_{\alpha\theta\le 1}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\theta<1}}(-1)^{|\alpha|+|\gamma|+1}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\sigma^{-\gamma\theta}\times$$

$$\times\int e^{-\langle\xi\rangle^{2k}}\langle\xi\rangle^{2k}D_t^\beta\left(\frac{a_\alpha(t)}{L_0(t,i\xi)}\right)(i\xi)^{p+\gamma}e^{-ix\xi}d\xi.$$

Ядра G_j бесконечно дифференцируемы по x, гладкость по t определяется гладкостью коэффициентов. Учитывая условия (2)-(5), для любого наперед заданного m подберем такое k, что при $x,t\in R^n$

$$|D_t^{\rho} D_x^{\beta} G_2(t,x)| \leqslant C \sum_{\alpha\theta=1} (1+<t>)^{-d_\alpha} (1+<x>)^{-k}, \tag{8}$$

$$|D_t^{\rho} D_x^{\beta} G_3(v,t,x)| \leqslant C \sum_{\alpha\theta\leqslant 1} \sum_{\substack{\gamma\leqslant\alpha \\ \gamma\theta<1}} v^{-\gamma\theta} (1+<t>)^{-d_\alpha} (1+<x>)^{-k}. \tag{9}$$

Оценки $u_h^{(1)}(x)$ получены в работах [20] и [22]; при $\rho\theta\leqslant 1,\ 1<p<|\theta|$,

$$\| D^{\rho} u_h^{(1)}, C^{\lambda} \| \leqslant C \left(\| f, C^{\lambda} \| + \| f, L_p \| \right), \tag{10}$$

при $\rho\theta=1$

$$\| D^{\rho} u_h^{(1)}, L_p \| \leqslant C \| f, L_p \| \tag{11}$$

и

$$\| u_h^{(1)}, L_q \| \leqslant C \| f, L_p \|, \quad \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\theta| = 1. \tag{12}$$

Там же показано, что последовательность $u_h^{(1)}$ сходится в $C^{\ell+\lambda} \cap L_p^{\ell}(R^n)$ при $h \to 0$.

Оценки $u_h^{(2)}(x)$ и $u_h^{(3)}(x)$ получаем с помощью неравенств (8) и (9) (выкладки практически не отличаются от проведенных в леммах 2, 6 и 7 работы [24], поэтому мы их опустим). При $\rho\theta\leqslant 1$

$$| D^{\rho} u_h^{(2)}(x) | \leqslant C (1+<x>)^{-\sigma} \ln(2+<x>) \| f, C^{\lambda} \|,$$

где $\sigma = \min\limits_{\alpha\theta=1} (|\theta|, d_\alpha) + \rho\theta - 1$;

$$\| D^{\rho} u_h^{(2)}, C^{\lambda} \| \leqslant C \| f, C^{\lambda} \|. \tag{13}$$

Если $\rho\theta = 1$, то $\sigma > \dfrac{|\theta|}{p}$, следовательно,

$$\int | D^{\rho} u_h^{(2)}(x) |^{p} dx \leqslant$$

$$\leqslant C \| f, C^{\lambda} \|^{p} \int (1+<x>)^{-\sigma p} |\ln(2+<x>)|^{p} dx \leqslant C \| f, C^{\lambda} \|^{p},$$

или $\| D^{\rho} u_h^{(2)}, L_p \| \leqslant C \| f, C^{\lambda} \|. \tag{14}$

Аналогично $\| u_h^{(2)}, L_q \| \leqslant C \| f, C^{\lambda} \|. \tag{15}$

Из оценки

$$| D^{\rho} u_{h_1}^{(2)}(x) - D^{\rho} u_{h_2}^{(2)}(x) | \leqslant$$

$$\leqslant C (h_1 + h_2)^{\varkappa} (1+<x>)^{-\sigma} \ln(2+<x>) \| f, C^{\lambda} \|, \tag{16}$$

где $\varkappa > 0$, следует сходимость $u_h^{(2)}(x)$ при $h \to 0$ в C^{ℓ}, L_p^{ℓ} и L_q.

Из неравенств (13) и (16) следует, что предельная функция тоже удовлетворяет оценке (13).

Для $u_h^{(3)}(x)$ имеем: при $\rho\theta \leq 1$

$$|D^\rho u_h^{(3)}(x)| \leq C(1+<x>)^{-6} \ln(2+<x>) \sum_{\beta\leq\rho} \|D^\beta u, C\|,$$

где $6 = \min\limits_{\alpha,\lambda\leq 1} (|\theta|, d_\alpha) + \rho\theta - 1$,

при $\rho\theta = 1$ и $\lambda \leq \theta_0$

$$\|D^\rho u_h^{(3)}, C^\lambda\| \leq C \sum_{\beta\leq\rho} \|D^\beta u, C\|. \tag{17}$$

Норма $D^\rho u_h^{(3)}(x)$ в L_ρ оценивается так же, как норма $D^\rho u_h^{(2)}(x)$:

$$\|D^\rho u_h^{(3)}, L_\rho\| \leq C \sum_{\beta\leq\rho} \|D^\beta u, C\|, \quad \rho\theta = 1, \tag{18}$$

$$\|u_h^{(3)}, L_q\| \leq C\|u, C\|. \tag{19}$$

Сходимость $u_h^{(3)}(x)$ в пространстве X устанавливается подобно доказательству сходимости $u_h^{(2)}(x)$.

Итак, мы получили оценку: для почти всех $x\in R^n$, $\rho\theta\leq 1$,

$$|D^\rho u(x)| \leq C\|f, Y\| + C(1+<x>)^{-6} \ln(2+<x>) \sum_{\beta\leq\rho} \|D^\beta u, C\|. \tag{20}$$

Пусть R столь велико, что в неравенстве (20) при $x\in R^n \setminus U_R$, $C(1+<x>)^{-6} \ln(2+<x>) \leq \frac{1}{2}$ для всех ρ , $\rho\theta\leq 1$. Тогда так как $\|u, C\| \leq \|u, C(U_R)\| + \|u, C(R^n \setminus U_R)\|$, то

$$\|u, C(R^n\setminus U_R)\| \leq C\|f, Y\| + \frac{1}{2}\|u, C(U_R)\| + \frac{1}{2}\|u, C(R^n\setminus U_R)\|,$$

или

$$\|u, C(R^n\setminus U_R)\| \leq C\|f, Y\| + \|u, C(U_R)\|.$$

Таким образом,

$$\|u, C\| \leq \|u, C(R^n\setminus U_R)\| + \|u, C(U_R)\| \leq C\|f, Y\| + 2\|u, C(U_R)\|.$$

Отсюда и из оценки (20) при $|\rho| = 1$ получим

$$\|D^\rho u, C\| \leq C\|f, Y\| + C\|u, C(U_R)\| + C\|D^\rho u, C(U_R)\|.$$

После конечного числа шагов ($|\rho| = 2, 3, \dots$) будем иметь:

$$\|D^\rho u, C\| \leq C\|f, Y\| + C\sum_{\beta\leq\rho} \|D^\beta u, C(U_R)\|.$$

Из этого неравенства и (10)-(15), (17)-(19) вытекает нужная нам оценка

$$\|u, X\| \leq C\|f, Y\| + C\|u, C^\ell(U_R)\|.$$

§ 3. Построение правого регуляризатора

Мы используем обычную схему рассуждений (см., например, [25]). Выберем столь большое R , чтобы при $|x|>R$

$$|b_\alpha(x)| \leq \varepsilon(1+<x>)^{-d'_\alpha}. \tag{21}$$

Величину $\varepsilon>0$ уточним несколько позже. Шар U_R покроем конечной системой окрестностей $V_1, V_2, \ldots, V_N$ таких, что $|a_\alpha(x)-a_\alpha(y)|<\varepsilon$, $\alpha\theta\leq 1$ при $x,y\in V_k$. Обозначив $V_0=R^n\setminus U_R$, получим открытое покрытие $\{V_k\}_0^N$ пространства R^n. Пусть φ_k, $k=0,1,\ldots,N,$ – разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т.е. $\varphi_k\in C^\infty$, $supp\,\varphi_k\subset V_k$,

$$\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(x)=1.$$

Пусть $\psi_k\in C^\infty$, $supp\,\psi_k\subset V_k$, $\varphi_k\psi_k=\varphi_k$.

Будем искать правый регуляризатор $\mathcal{R}$ в виде

$$\mathcal{R}=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k\mathcal{R}_k.$$

Пусть $u\in X$, рассмотрим

$$L\varphi_k u=\sum_{\alpha\theta\leq 1}a_\alpha(x)D^\alpha(\varphi_k(x)u(x))=\sum_{\alpha\theta\leq 1}a_\alpha(x)\varphi_k(x)D^\alpha u(x)+$$

$$+\sum_{\alpha\theta\leq 1}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \beta>0}}a_\alpha(x)\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}D^\beta\varphi_k(x)D^\gamma u(x).$$

Пусть $k=0$, тогда

$$L\varphi_0 u=\varphi_0\sum_{\alpha\theta=1}a_\alpha(\infty)D^\alpha u+\varphi_0\sum_{\alpha\theta\leq 1}b_\alpha(x)D^\alpha u+$$

$$+\sum_{\alpha\theta\leq 1}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \beta>0}}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}a_\alpha(x)D^\beta\varphi_0(x)D^\gamma u(x)=\varphi_0L_\infty u+\varphi_0L_1u+L^{(1)}u.$$

Из работ [20] и [22] следует, что оператор с постоянными коэффициентами L_∞ имеет ограниченный обратный L_∞^{-1} $:Y\to X$. Из неравенства (21) следует, что $\|\varphi_0L_1\|_{X\to Y}\leq\frac{1}{2}\|L_\infty\|_{X\to Y}$, если только $\varepsilon>0$ достаточно мало. Отсюда вытекает существование ограниченного оператора $\mathcal{R}_0=(L_\infty+\varphi_0L_1)^{-1}:Y\to X$. Положим $u=\mathcal{R}_0 f$, тогда $L\varphi_0\mathcal{R}_0f=$ $=\varphi_0(L_\infty+\varphi_0L_1)\mathcal{R}_0f+L^{(1)}\mathcal{R}_0f=\varphi_0f+T_0f$. Покажем, что оператор $T_0=L^{(1)}\mathcal{R}_0$ вполне непрерывен. Рассмотрим $a_\alpha(x)D^\beta\varphi_0(x)D^\gamma u(x)$ при $u\in X$. Поскольку $\varphi_0(x)=1$ при $|x|>R+\tau$, $\tau>0$, то $D^\beta\varphi_0(x)\equiv 0$

при $|x| > R+\tau$. Проводя для $D^{\gamma}u(x)$ оценки, подобные (10), (13) и (17), мы получим, заметив, что $\gamma\theta < 1$, $D^{\gamma}u \in C^{\lambda'}(R^n)$, где $\lambda_j' = \lambda_0' \ell_j$, $j=1,2,\dots,n$ и $\lambda_0' > \lambda_0$. Таким образом,

$$a_{\alpha}(x) D^{\beta}\varphi_0(x) D^{\gamma}u(x) \in C^{\lambda'}(U_{R+\tau}).$$

Пространство $C^{\lambda'}(U_{R+\tau})$ компактно вложено в $C^{\lambda}(U_{R+\tau})$ (так как $\lambda_j' > \lambda_j$, $j=1,2,\dots,n$). Следовательно, оператор $L^{(1)}: X \to Y$ вполне непрерывен. Так как R_0 ограничен, то оператор $T_0 : Y \to Y$ вполне непрерывен.

Пусть теперь $k \neq 0$. В окрестности V_k зафиксируем точку $x^{(k)}$ и оператор L представим в виде

$$\begin{aligned} L\varphi_k u &= \varphi_k(x)\sum_{\alpha\theta=1} a_{\alpha}(x^{(k)})D^{\alpha}u + \varphi_k(x)\sum_{\alpha\theta=1}(a_{\alpha}(x) - a_{\alpha}(x^{(k)}))D^{\alpha}u + \\ &+ \varphi_k(x)\sum_{\alpha\theta<1} a_{\alpha}(x)D^{\alpha}u(x) + \sum_{\alpha\theta\leq 1}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta>0}} a_{\alpha}(x)\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}D^{\beta}\varphi_k(x)D^{\gamma}u(x) = \\ &= \varphi_k L_0(x^{(k)}, D)u + \varphi_k L^{(2)}u + L^{(3)}u + L^{(4)}u. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при $k=0$, мы устанавливаем, что оператор $L_0(x^{(k)}, D)$ имеет ограниченный обратный, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\|\varphi_k L^{(2)}\|_{X\to Y} \leq \frac{1}{2}\|L_0\|_{X\to Y}$, а операторы $L^{(3)}$ и $L^{(4)}$ вполне непрерывны. Следовательно, положив $R_k = (L_0(x^{(k)}, D) + \varphi_k L^{(2)})^{-1}$, получим

$$L\varphi_k R_k f = \varphi_k (L_0(x^k, D) + \varphi_k L^{(2)}) R_k f + (L^{(3)} + L^{(4)}) R_k f = \varphi_k f + T_k f,$$

где оператор $T_k : Y \to Y$ вполне непрерывен.

Тогда для оператора $R = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k R_k$ имеем:

$$LRf = \sum_{k=0}^{N} L\varphi_k R_k f = \sum_{k=0}^{N}(\varphi_k f + T_k f) = f + Tf,$$

где $T = \sum_{k=0}^{N} T_k$ - вполне непрерывный оператор.

Таким образом, оператор R является искомым правым регуляризатором для оператора L.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю С. В. Успенокому.

Литература

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ., 1957.

2. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с

параметром и параболические задачи общего вида. - "Успехи мат. наук", 1964, т. 19, № 3, с. 53-161.

3. К у д р я в ц е в Л.Д. Свойства граничных значений функций из весовых пространств и их приложения к краевым задачам, - В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., "Наука", 1972, с. 259-265.

4. П а л а м о д о в В.П. Системы линейных дифференциальных уравнений. - В кн.: Математический анализ. 1968 (Итоги науки), М., 1969, с. 5-37.

5. **B r o w d e r F.E. A priori estimates for elliptic and parabolic equations, Partial Differential Equations.-" Proc.of Symp. in Pure Math."4, Providence, R.I.,Amer.Math.Soc., 1961, p.73-81.**

6. **F r e e m a n R.S., S c h e c h t e r M. On the existense, uniqueness and regularity of solutions to general elliptic boundary-value problems.- "J. Different. Equat.", 1974, v.15, N 2, p.213-246.**

7. Б а г и р о в Л.А., К о н д р а т ь е в В.А. Об эллиптических уравнениях в R^n. - "Дифференц. уравнения", 1975, т. 11, № 3, с. 498-504.

8. В а й н б е р г Б.Р. Об эллиптических задачах в неограниченных областях. - "Мат. сб.", 1968, т. 75, № 3, с. 454-480.

9. Г р у ш и н В.В. Псевдодифференциальные операторы в R^n с ограниченными символами. - В кн.: Функциональный анализ и его приложения, 1970, т. 4, № 3, с. 37-50.

10. Н а р а л е н к о в М.И. Эллиптические операторы с неограниченными коэффициентами в пространстве R^n. - "Успехи мат. наук", 1973, т. 28, № 6, с. 213-214.

11. Н а р а л е н к о в М.И. Асимптотическое поведение решений эллиптических уравнений с неограниченными коэффициентами в пространстве R^n.- "Докл. АН СССР", 1975, т. 220, № 3, с. 524-527.

12. Ф е й г и н В.И. О нётеровости дифференциальных операторов в R^n. - "Дифференц. уравнения", 1975, т. 11, № 12, с. 2231-2235.

13. **A r k e r y d L. On L^p estimates for quasielliptic boundary problems.- "Math.scand.", 1969, v.24, N 1, p.141-144.**

14. **H a n o u s e t B. Problems aux limites elliptiques dans des ouverts non bornés.-"Bull. Soc.math. France", 1972, mém., N 31-32,p.191-199.**

15. **M a t a r a s s o S. Sul problema esterno di Dirichlet per le ellittiche di ordine superiore in n variabili.-"Ric. mat.", 1972,v.21, N 1, p.48-74.**

16. **N i r e n b e r g L., W a l k e r H. F. The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n .-"J.Math.Anal. and Appl.",1973, v.42, N 2, p.271-301.**

17. P a r e n t i C. Valutazioni a priori e regolarità per soluzioni di equazioni quasi-ellittiche.-Rend. Semin.mat.Univ.Padova, 1971,v.45,p.1-70.

18. P a r e n t i C. Problemi quasi-ellittici di transmissione.-Ann.mat. pura ed appl.,1974,v.100,p.327-355.

19. P i n i B. Propietà al contorno delle funzioni di classe $H^{p_1 \dots p_n}$ per regioni dotate di punti angolosi, Ann.mat.pura ed appl.,1966,v.73, p.33-53.

20. У с п е н с к и й С.В. О дифференциальных свойствах решений одного класса псевдодифференциальных уравнений на бесконечности. - "Сиб. мат. журн.", 1972, т.13, № 3, с.665-678; § 4, с. 903-909.

21. Ф и л а т о в П.С. О дифференциальных свойствах решений уравнений квазиэллиптического типа на бесконечности. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики", Новосибирск, "Наука", 1973, с.212-221.

22. У с п е н с к и й С.В., Ч и с т я к о в Б.Н. О выходе на полином при стремлении $|x| \to \infty$ решений одного класса псевдодифференциальных уравнений. - "Сиб. мат. журн"., 1975, т.16, № 5, с.1053-1070.

23. К р е й н С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., "Наука", 1971.

24. Ф и л а т о в П.С. О дифференциальных свойствах решений уравнений квазиэллиптического типа на бесконечности, - "Сиб. мат. журн.", 1975, т.16, № 2, с.368-383.

25. В о л ё в и ч Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем."- Мат. сб.," 1965, т.68, № 3, с.373-416.