УДК 517.9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ ОБЩЕГО ТИПА

А. Куфнер, Б. Опиц (Прага)

О. Введение

Теория пространств С.Л.Соболева $W_p^k(\Omega)$ имеет тесную связь с решением краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных. Весовые пространства С.Л.Соболева $W_{p,\alpha}^k(\Omega)$, т.е. банаховы пространства тех функций $u=u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{k,p,\alpha}=\left(\sum_{|i|\le k}\int_\Omega |D^i u|^p r^\alpha(x)dx\right)^{1/p}, \tag{0.1}$$

где $r=r(x)$ – расстояние точки $x\in\Omega$ до некоторой части Γ границы $\partial\Omega$ области Ω, – важны при решении краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, но имеется ряд результатов, касающихся существования и единственности (слабого) решения краевой задачи для невырождающегося эллиптического уравнения в пространстве С.Л.Соболева с весом степенного типа (см. [1-5]). Можно сказать, что задача Дирихле для эллиптического уравнения 2к-го порядка

$$\sum_{|i|,|j|\le k}(-1)^{|i|}D^i\left(a_{ij}(x)D^j u\right)=f(x) \tag{0.2}$$

с коэффициентами $a_{ij}\in L_\infty(\Omega)$ имеет единственное слабое решение в пространстве $W_{2,\alpha}^k(\Omega)$ для значений α из некоторого отрезка J, содержащего начало координат.

В настоящей статье исследуются вопросы существования и единственности решения задачи Дирихле для уравнения (0.2) в пространствах С.Л.Соболева с более общим весом типа

$$\rho(x)=\sigma(r(x)),$$

где $r=r(x)$ – опять расстояние точки $x\in\Omega$ до некоторой части Γ границы $\partial\Omega$, но функция σ может быть более общей, чем функция $\sigma(t)=t^\alpha$. Положительный ответ на этот вопрос расширяет класс краевых задач, разрешимых в терминах классов С.Л.Соболева.

§ 1. Основные обозначения и некоторые вспомогательные сведения

Символом R^N будем обозначать N-мерное евклидово пространство точек $x=[x_1,x_i,\dots,x_N]$. Символом Ω обозначим область в R^N, $\partial\Omega$ – граница области Ω. В большинстве случаев будем предполагать, что $\partial\Omega$ локально удовлетворяет условик Липшица, и тогда будем писать

$$\Omega\in C^{0,1} \tag{1.1}$$

(подробнее см., например, [1,2]).

1.1. О п р е д е л е н и е. Пусть ρ -функция, определенная п.в. (почти всюду) в Ω. Скажем, что ρ -весовая функция (или вес), если она измерима и п. в. в Ω положительна. Семейство всех весовых функций обозначим через V.

1.2. О п р е д е л е н и е. Символом $C_0^k(\Omega)$ (k – натуральное) обозначим множество всех (комплекснозначных) функций с компактным носителем в Ω, имеющих в Ω непрерывные производные до порядка k включительно. Символом $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначим семейство всех финитных бесконечно дифференцируемых функций:

$$\mathcal{D}(\Omega)=\bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega). \tag{1.2}$$

1.3. О п р е д е л е н и е. Пусть $\rho\in V$, $p\geq 1$. Символом

$$L_{p,\rho}(\Omega) \tag{1.3}$$

обозначим множество всех функций $u=u(x)$, определенных п.в. на Ω, для которых конечна норма

$$|u|_{L_{p,\rho}}=\left(\int_\Omega |u(x)|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}. \tag{1.4}$$

Если $\rho\equiv 1$, то пишем $L_p(\Omega)$ вместо $L_{p,\rho}(\Omega)$.

Символом $L_{1,loc}(\Omega)$ обозначим множество всех функций u таких, что $u\in L_1(M)$ для каждого компактного множества $M\subset\Omega$.

Пусть $i=(i_1,i_2,\dots,i_N)$ – мультииндекс, т.е. вектор в R^N, компоненты которого целые неотрицательные числа, и обозначим

$$|i|=\sum_{j=1}^N i_j\ ,\qquad D^i u=\frac{\partial^{|i|}u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_N^{i_N}}.$$

Пусть $\rho\in V$, $\rho^{-1}\in L_{1,loc}(\Omega)$ (здесь $\rho^{-1}(x)$ обозначает функцию $\frac{1}{\rho(x)}$). Тогда

$$L_{p,\rho}(\Omega)\subset\mathcal{D}'(\Omega), \tag{1.5}$$

где $\mathcal{D}'(\Omega)$ – пространство обобщенных функций. Это значит, что функция $u\in L_{p,\rho}(\Omega)$ имеет обобщенные производные $D^i u$ в смысле Соболева.

1.4. О п р е д е л е н и е. Пусть $\rho\in V$, $\rho^{-1}\in L_{1,loc}(\Omega)$, $p\geq 1$, k – натуральное. Обозначим

$$W_{p,\rho}^k(\Omega)=\{u\in L_{p,\rho}(\Omega);D^i u\in L_{p,\rho}(\Omega)\quad \text{для } |i|\leq k\}. \tag{1.6}$$

В пространстве $W_{p,\rho}^k(\Omega)$ введем норму по формуле

$$|u|_{W_{p,\rho}^k(\Omega)}=\Big(\sum_{|i|\leq k}|D^i u|_{L_{p,\rho}}^p\Big)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Если $\rho \equiv 1$, то пишем $W_p^k(\Omega)$ вместо $W_{p,\rho}^k(\Omega)$.

1.5. З а м е ч а н и е. Если $\rho^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$ и $\rho \in L_{1,loc}(\Omega)$, то

$$W_{p,\rho}^k(\Omega) \supset \mathcal{D}(\Omega).$$

При этих предположениях можно показать, что $W_{p,\rho}^k(\Omega)$ – банахово пространство.

1.6. О п р е д е л е н и е. Пусть $\rho \in V$, ρ, $\rho^{-1} \in L_{1,loc}(\Omega)$. Символом

$$\overset{\circ}{W}{}_{p,\rho}^k(\Omega) \tag{1.8}$$

обозначим замыкание множества $\mathcal{D}(\Omega)$ в топологии пространства $W_{p,\rho}^k(\Omega)$. Для $u \in \overset{\circ}{W}{}_{p,\rho}^k(\Omega)$ введем полунорму по формуле

$$|u|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,\rho}^k} = \Big(\sum_{|i| \le k} |D^i u|^p_{L_{p,\rho}} \Big)^{1/p}.$$

1.7. О б о з н а ч е н и я. Пусть $Q \subset \partial\Omega$ и пусть $r(x)$ обозначает расстояние точки $x \in \Omega$ до множества Q. Пусть $b = \sup_{x \in \Omega} r(x)$.

Мы будем здесь рассматривать весовые функции ρ типа

$$\rho = \sigma \circ r, \quad \text{т.е. } \rho(x) = \sigma(r(x)) \quad \text{п.в. в } \Omega, \tag{1.9}$$

причем ограничимся функциями σ, которые удовлетворяют некоторым из следующих условий:

А.1. $\sigma = \sigma(t)$ – неотрицательная функция, определенная для п.в. $t \in (0, b)$.

А.2. Функция σ имеет непрерывную производную на отрезке $(0, b)$.

А.3. Для всякого отрезка $[a_1, b_1] \subset (0, b)$ существует число $c > 0$ такое, что $\frac{1}{c} \le \sigma(t) \le c$ для п.в. $t \in [a_1, b_1]$.

А.4. Если c_1, c_2 – такие положительные постоянные, что $c_1 \le \frac{s}{t} \le c_2$, то существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что для этих s, t

$$C_1 \le \frac{\sigma(s)}{\sigma(t)} \le C_2.$$

А.5. Пусть $p > 1$, $S(t) = \sigma^{\frac{1}{1-p}}(t)$ для п.в. $t \in (0,b)$ и $\int_0^t S(\tau)d\tau < \infty$ для $t \in (0,b)$. Тогда определим функцию $S^*(t) = \int_0^t S(\tau)dt$ и обозначим

$$\varkappa(t) = \varkappa_\sigma(t) = S(t)\,[S^*(t)]^{-p} \tag{1.10}$$

для $t \in (0,b)$.

Предполагается, что функция $\varkappa$ тоже удовлетворяет условию А.4.

А.6. Функция σ удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий:

А.6.1. Существует $c_1 > 0$ такое, что $\sigma(t) \le c_1 \varkappa(t)$ для $t \in (0, b)$.

А.6.2. Существует $c_2 > 0$ такое, что $|\sigma^{1-p}(t)(\sigma'(t))^p| \le c_2\, \varkappa(t)$ для $t \in (0,b)$.

1.8. О б о з н а ч е н и е. Пусть k – натуральное, $p > 1$. Если σ из (1.9) удовлетворяет условию А.5, то формулой (1.10) определяется оператор $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(\sigma) = \varkappa_\sigma \quad (= \varkappa).$$

Положим $\mathcal{F}^0(\sigma) = \sigma$ и

$$\mathcal{F}^l(\sigma) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{l-1}(\sigma)), \quad l = 0, 1, \dots, k, \tag{1.11}$$

для всех σ, для которых правая часть в (1.11) имеет смысл, и наложим на σ дальнейшее условие:

А.5.k. Функции $\mathcal{F}^{\ell}(\sigma)$ существуют и удовлетворяют условию А.4 для $\ell=0,1,\ldots,k$.

Имеет место следующая

1.9. Т е о р е м а вложения. Пусть $\Omega\in C^{0,1}$, $Q=\partial\Omega, p>1, k\geq 1$, и пусть функция σ удовлетворяет условиям А.1, А.3, А.4 и А.5k. Пусть s целое, $0\leq s\leq k$. Тогда

$$\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}(\Omega)\subset \overset{\circ}{W}{}^{k-s}_{p,\mathcal{F}^{s}(\sigma)\circ r}(\Omega) \tag{1.12}$$

и существует $c>0$ такое, что для всех $u\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}(\Omega)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k-s}_{p,\mathcal{F}^{s}(\sigma)\circ r}}\leq c\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}}. \tag{1.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.9, которая важна для исследования задачи Дирихле (см. § 2, 3), можно найти в [6,7]. В [7] также можно найти доказательства следующих двух теорем, касающихся эквивалентности норм $\|\cdot\|_{W^{k}_{p,\rho}}$ и $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\rho}}$ на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\rho}(\Omega)$:

1.10. Т е о р е м а. Пусть $\Omega\in C^{0,1}$, $Q=\partial\Omega, p>1$, $k\geq 1$ и пусть функция σ удовлетворяет условиям А.1, А.3, А.4, А.5 и А.6. Тогда существует $c>0$ такое, что для всех $u\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^{k}_{p,\sigma\circ r}}\leq c\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\sigma\circ r}}. \tag{1.14}$$

1.11. Т е о р е м а. Пусть Ω – область в R^{N} и пусть для некоторого j, $1\leq j\leq N$,

$$D=\sup_{x,y\in\Omega}|x_j-y_j|<\infty. \tag{1.15}$$

Пусть $p\geq 1$, $\rho\in V$, $\rho,\rho^{-1}\in L_{1,loc}(\Omega)$, и пусть вес ρ не зависит от переменной x_j. Тогда для всех $u\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\rho}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^{k}_{p,\rho}}\leq D^{k}\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{p,\rho}}. \tag{1.16}$$

Если σ удовлетворяет условию А.i, то будем писать

$$\sigma\in A.i\,. \tag{1.17}$$

§ 2. Дифференциальный оператор

Пусть Ω – область в R^{N}, $i=(i_1,\ldots,i_N)$, $j=(j_1,\ldots,j_N)$ – мультииндексы, $|i|\leq k$, $|j|\leq k$. Пусть

$$a_{ij}\in L_{\infty}(\Omega).$$

Будем рассматривать линейный дифференциальный оператор $2k$-го порядка

$$Au=(-1)^{|i|}D^{i}(a_{ij}D^{j}u) \tag{2.1}$$

и соответствующую билинейную форму

$$B(u,v)=\int_{\Omega}\bar a_{ij}(x)D^{i}u\,D^{j}\bar v\,dx \tag{2.2}$$

(в (2.1) и в (2.2) суммирование проводится по всем i, j таким, что $|i|\leq k$,

$|j| \leq k$).

2.1. О п р е д е л е н и е. Оператор A называется эллиптическим, если существует $c>0$ такое, что

$$|B(\varphi,\varphi)| \geq c\,|\varphi|_{\overset{\circ}{W}{}_2^k} \qquad (2.3)$$

для всех $\varphi \in C_0^k(\Omega)$.

Пусть теперь $\mathcal{H}_1$; $\mathcal{H}_2$ – два гильбертовых пространства и пусть $B(u_1,u_2)$ – билинейная форма, определенная на $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$.

2.2. О п р е д е л е н и е. (i) Форма $B(u_1,u_2)$ называется непрерывной, если существует $c>0$ такое, что

$$|B(u_1,u_2)| \leq c\,|u_1|_{\mathcal{H}_1} \cdot |u_2|_{\mathcal{H}_2} \qquad (2.4)$$

для всех $u_1 \in \mathcal{H}_1$, $u_2 \in \mathcal{H}_2$.

(ii) Форма $B(u_1,u_2)$ называется $\mathcal{H}_i$ -эллиптической (i =1,2), если существует $c_i>0$ такое, что

$$\sup_{|u_j|_{\mathcal{H}_j} \leq 1} |B(u_1,u_2)| \geq c_i\,|u_i|_{\mathcal{H}_i} \qquad (2.5)$$

для всех $u_i \in \mathcal{H}_i$, (здесь j =2 для i =1 и j =1 для i =2).

(iii) Форма $B(u_1,u_2)$ называется $(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$-эллиптической, если она одновременно $\mathcal{H}_1$ -эллиптическая и $\mathcal{H}_2$ -эллиптическая.

Пусть $p=2$, Ω – область в R^N и пусть выполнены условия теоремы 1.10 или условия теоремы 1.11 (для $p=\sigma \circ r$). Очевидно, что пространства

$$\mathcal{H}_1 = \overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma\circ r}(\Omega),$$
$$\mathcal{H}_2 = \overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega) \qquad (2.6)$$

являются гильбертовыми пространствами со скалярными произведениями

$$(u,v)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i u(x)\, D^i \bar{v}(x)\, \sigma(r(x))\,dx$$

и

$$(u,v)_{\mathcal{H}_2} = \sum_{|i|=k} \int_\Omega D^i u(x)\, D^i \bar{v}(x)\, \frac{1}{\sigma(r(x))}\,dx .$$

Как увидим в § 3, вопрос о существовании и единственности решения задачи Дирихле для оператора А из (2.1) сводится к вопросу $(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$-эллиптичности формы (2.2), причем $\mathcal{H}_i$ дано в (2.6).

2.3. О п р е д е л е н и е. Пусть $k \geq 1$. Будем писать

$$(\Omega, Q, \sigma, r) \in B_k , \qquad (2.7)$$

если Ω – область в R^N , $Q \subset \partial\Omega$, σ удовлетворяет условию А.3 и выполнено одно из следующих условий:

В.1. k . Функция $r(x)=dist(x,Q)$ имеет непрерывные производные до порядка k включительно в Ω .

В.2. k . Функция σ удовлетворяет условию А.4, и существует функция $r_1(x)$, имеющая непрерывные производные до порядка k включительно и такая, что

$$c_1 r_1(x) \leq r(x) \leq c_2 r_1(x) \qquad (2.8)$$

для п.в. $x \in \Omega$ $(c_1>0, c_2>0)$.

2.4. З а м е ч а н и е. (i) Если $\Omega \in C^{0,1}$ и $Q=\partial\Omega$, то функция $r_1(x)$ из условия В.2.k всегда существует (см. [1]). Напомним, что в случае В.1.k не предполагается выполнение условия А.4 — это важно, например, для функций $\sigma=e^{\rho t}$.

(ii) Если выполнено условие В.1.k, то можно определить функцию $r_1(x)$ формулой $r_1(x)=r(x)$ для п.в. $x\in\Omega$. Это значит, что для $\Omega\in C^{0,1}$ и $Q=\partial\Omega$ или для $(\Omega, Q, \sigma, r)\in B_K$ всегда существует функция r_1, удовлетворяющая неравенствам (2.8).

2.5. О б о з н а ч е н и е. Будем писать

$$(\Omega, Q, \sigma, r)\in E_k, \tag{2.9}$$

если или выполнены условия теоремы 1.10 (т.е. $\Omega\in C^{0,1}, Q=\partial\Omega, \sigma\in A.i$ для i = 1, 3, 4, 5, 6), или выполнены условия теоремы 1.11 (для $\rho=\sigma\circ r$) и $(\Omega, Q, \sigma, r)\in B_K$.

Прежде всего мы будем рассматривать случай $k=1$ (т.е. оператор второго порядка).

Пусть $p=2$, $(\Omega, Q, \sigma, r)\in E_1$ и α — вещественное число, $\alpha\neq 0$. Определим функцию $\omega=\omega_\alpha$ по формуле $\omega(t)=\sigma^{\frac{1}{\alpha}}(t)$ для $t>0$. Для функции $\sigma=\omega^\alpha$ найдем теперь условия, при которых форма $B(u,v)$ будет $(\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r}, \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r})$-эллиптической.

Пусть $u\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\sigma\in A\cdot 2$, и положим $v=u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1)$. Потом $v\in C_0^1(\Omega)$, и имеем

$$B(v,u)=B(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1),u)=\int_\Omega \bar a_{ij} D^i(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1))\cdot D^j\bar u\,dx=$$
$$=\int_\Omega \bar a_{ij} D^i(u\cdot(u^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))\cdot D^j(\bar u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))\,dx+J,$$

где

$$J=J_\alpha=\int_\Omega \bar a_{ij}\Big[D^i(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1))D^j\bar u-$$
$$-D^i(u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))\cdot D^j(\bar u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))\Big]dx. \tag{2.10}$$

Наложим на функцию ω еще одно условие:

2.6. О б о з н а ч е н и е.

А.7. Существует непустое множество $M\subset R^1$ и число $c(M)>0$ такое, что для п.в. $x\in\Omega$, для каждого $\alpha\in M$ и для $|i|=1$ выполнено по крайней мере одно из двух условий:

А.7.1. $\Omega\in C^{0,1}$, $Q=\partial\Omega$, $\sigma\in A.j$, $j=1,3,4,5,6$,

и

$$[(\omega\circ r_1)(x)]^{\alpha-2}[(\omega'\circ r_1)(x)\cdot D^i r_1(x)]^2\leq c(M)\cdot(x_\sigma\circ r_1)(x);$$

А.7.2. $[(\omega\circ r_1)(x)]^{\alpha-2}[(\omega'\circ r_1)(x)\cdot D^i r_1(x)]^2\leq c(M)\cdot(\sigma\circ r_1)(x)$

(ω' обозначает производную функции $\omega=\omega(t)$).

2.7. Л е м м а. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_1$ и $\sigma\in A.2\cap A.7$. Потом для $\alpha\in M$ и для $u\in\mathcal{D}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{|B(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1),u)|}{\|u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r}}}\geq\frac{\tilde c-\tilde c_1|\alpha|-\tilde c_2\alpha^2}{\sqrt{\tilde c_3+|\alpha|\tilde c_4+\alpha^2\tilde c_5}}\,\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}} \tag{2.11}$$

(M – множество из условия А.7).

Доказательство. Пусть $\alpha \in M$. В силу эллиптичности оператора A, имеем

$$|B(u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1), u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))| \geq c\|u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}. \qquad (2.12)$$

Далее,

$$\|u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2} - \sum_{|i|=1}\int_\Omega |D^i(u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1))|^2 dx \geq$$

$$\geq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}} - |\alpha|\cdot J_1 - \frac{\alpha^2}{4}J_2, \qquad (2.13)$$

где

$$J_1 = \int_\Omega \left[\sum_{|i|=1} |D^i u|\cdot(\omega\circ r_1)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot|u|\cdot(\omega\circ r_1)^{\frac{\alpha}{2}-1}|\omega'\circ r_1|\cdot|D^i r_1|\right]dx,$$

$$J_2 = \int_\Omega \left[\sum_{|i|=1} |u|^2\cdot(\omega\circ r_1)^{\alpha-2}\cdot(\omega'\circ r_1)^2\cdot(D^i r_1)^2\right]dx. \qquad (2.14)$$

В силу неравенства Гёльдера, имеем

$$|J_1| \leq \sum_{|i|=1}\left(\int_\Omega |D^i u|^2\cdot(\omega\circ r_1)^\alpha dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_\Omega |u|^2\cdot(\omega\circ r_1)^{\alpha-2}\cdot[(\omega\circ r_1)\cdot D^i r_1]^2 dx\right)^{1/2}.$$

Из условия А.7 следует, что

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq [c(M)]^{1/2}\cdot\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}}\cdot\|u\|_{L_{2,\varkappa\circ r_1}}, \\ |J_2| &\leq N\cdot c(M)\cdot\|u\|^2_{L_{2,\varkappa\circ r_1}} \end{aligned} \qquad (*)$$

(если выполнено условие А.7.1) или

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq [c(M)]^{1/2}\cdot\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}}\cdot\|u\|_{L_{2,\sigma\circ r_1}}, \\ |J_2| &\leq N\cdot c(M)\cdot\|u\|^2_{L_{2,\sigma\circ r_1}} \end{aligned} \qquad (**)$$

(если выполнено условие А.7.2).

Пользуясь теоремой 1.9 (условия которой выполнены), можно неравенства $(*)$ привести к виду:

$$|J_1| \leq [c(M)]^{1/2}\cdot c\cdot\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}},$$

$$|J_2| \leq N\cdot c(M)\cdot c\cdot\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}}$$

и в силу эквивалентности норм (теоремы 1.10 или 1.11 для r_1 вместо r) из $(**)$ следует, что

$$|J_1| \leq |c(M)|^{1/2}\cdot c\cdot\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r_1}}, \quad |J_2| \leq N\cdot c(M)\cdot c\cdot\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r_1}}.$$

Таким образом, имеем в обоих случаях

$$|J_1| \leq c_1\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}}, \quad |J_2| \leq c_2\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}}.$$

Отсюда и из (2.13) следует

$$\|u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2} \geq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r_1}} \cdot \left(1-|\alpha|c_1-\alpha^2\,\frac{c_2}{4}\right).$$

Теперь или $r\equiv r_1$, или $\sigma\in$ A.4, и поэтому

$$\|u\cdot(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2} \geq (c_3-|\alpha|c_4-\alpha^2c_5)\cdot\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}}\,. \tag{2.15}$$

Оценим интеграл $\mathcal{J}$ из (2.10). В этом интеграле остаются только члены, которые содержат в качестве множителя производную функции $\omega^\alpha\circ r_1$ или $\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1$. Обозначим

$$M_{ij} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |a_{ij}(x)|.$$

Подобным путем, как и при оценке интегралов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, можно показать, что

$$|\mathcal{J}| \leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}} \cdot (|\alpha|\cdot c_6+\alpha^2c_7).$$

Из всех оценок получаем

$$|B(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1),u)| \geq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}} \cdot (c_3-|\alpha|c_8-\alpha^2c_9). \tag{2.16}$$

Так как $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_1$, то $u(\omega^\alpha\circ r_1)\in C_0^1(\Omega)\subset\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r_1}$, и аналогично, как выше, получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\|u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r_1}} = \\
&= \sum_{|i|=1}\int_\Omega |D^i(u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1))|^2\cdot(\omega\circ r_1)^{-\alpha}dx \leq \\
&\leq \sum_{|i|=1}\int_\Omega |D^iu|^2(\omega^\alpha\circ r_1)\,dx + \\
&+ 2\cdot\sum_{|i|=1}\int_\Omega |D^iu|\cdot|u|\cdot|\alpha|\cdot(\omega\circ r_1)^{\alpha-1}\,|\omega'\circ r_1|\cdot|D^ir_1|\,dx + \\
&+ \sum_{|i|=1}\int_\Omega |u|^2\alpha^2(\omega\circ r_1)^{\alpha-2}\cdot(\omega'\circ r_1)^2\cdot(D^ir_1)^2dx.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Правую часть в (2.17) можно оценить сверху через

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}} \cdot (1+|\alpha|\cdot c_{10}+\alpha^2c_{11}),$$

и поэтому

$$\begin{aligned}
&\|u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r}} \leq c_{12}\|u\cdot(\omega^\alpha\circ r_1)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r_1}} \leq \\
&\leq \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^\alpha\circ r}} \cdot (c_{13}+|\alpha|c_{14}+\alpha^2c_{15}).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.16) и (2.18) сразу следует утверждение леммы.

Обозначим $c(\alpha) = \dfrac{\tilde{c}-|\alpha|\tilde{c}_1-\alpha^2\tilde{c}_2}{\sqrt{\tilde{c}_3+|\alpha|\tilde{c}_4+\alpha^2\tilde{c}_5}}$

и

$$I^* = (-\alpha^*,\alpha^*), \tag{2.19}$$

где $\alpha^*>0$, $-\alpha^*$ – корни уравнения $\tilde{c}-|\alpha|\tilde{c}_1-\alpha^2\tilde{c}_2=0$. Имеет место

2.8. Т е о р е м а. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_1$, $\sigma\in A.2\cap A.7$. Пусть A – эллиптический оператор второго порядка и пусть $M\cap I^*\neq\emptyset$ (M – множество из условия A.7). Тогда форма $B(u,v)$ $\overset{\circ}{W}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ – эллиптическая.

Доказательство. Пусть $u\in\mathcal{D}(\Omega)$, $v=u(\omega\circ r_1)^{\alpha'}$, где $\alpha'\in M\cap I^*$. Тогда имеет место неравенство (2.11) и $c(\alpha')>0$. Положим

$$w=\frac{v}{\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha'}\circ r}}}.$$

Потом

$$|B(w,u)|=\frac{1}{\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha'}\circ r}}}\cdot|B(v,w)|\geq c(\alpha')\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{\alpha}\circ r}}=c(\alpha')\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r}},$$

и так как $\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma^{-1}\circ r}}=1$, то выполняется неравенство

$$\sup_{\|\tilde{w}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma^{-1}\circ r}}\leq 1}|B(\tilde{w},u)|\geq|B(w,u)|\geq c(\alpha')\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r}}. \tag{2.20}$$

Так как множество $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$, то (2.20) верно и для функций $u\in$ $\in\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$, и теорема доказана.

Теперь будем исследовать $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)$-эллиптичность формы $B(u,v)$. Будем предполагать, что $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_1$ и наложим еще одно условие на функцию σ^{-1}.

2.9. Обозначение.

А.7'. Существует непустое множество $M'\subset R^1$ и число $c(M')>0$ такое, что для п. в. $x\in\Omega$, для каждого $\alpha\in M'$ и для $|i|=1$ выполнено по крайней мере одно из двух условий:

А.7'.1. $\Omega\in C^{0,1}$, $Q=\partial\Omega$, $\sigma^{-1}\in A.j$, $j=1,3,4,5,6$, и

$$[(\omega\circ r_1)(x)]^{-\alpha-2}\cdot[(\omega'\circ r_1)(x)\cdot D^i r_1(x)]^2\leq c(M')\cdot(x_{\sigma-1}\circ r_1)(x);$$

А.7'.2 $[(\omega\circ r_1)(x)]^{-\alpha-2}\,[(\omega'\circ r_1)(x)\cdot D^i r_1(x)]^2\leq c(M')\cdot(\sigma\circ r_1)(x)$.

2.10. Лемма. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_1$ и $\sigma^{-1}\in A.2\cap A.7'$. Тогда для $\alpha\in M'$ и для $u\in\mathcal{D}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\frac{|B(u,u\cdot(\omega^{-\alpha}\circ r_1))|}{\|u\cdot(\omega^{-\alpha}\circ r_1)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{\alpha}\circ r}}}\geq\frac{K-|\alpha|K_1-\alpha^2K_2}{\sqrt{K_3+|\alpha|K_4+\alpha^2K_5}}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\omega^{-\alpha}\circ r}}. \tag{2.21}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.7, только вместо функции $c(\alpha)$ получается функция

$$K(\alpha)=\frac{K-|\alpha|K_1-\alpha^2K_2}{\sqrt{K_3+|\alpha|K_4+\alpha^2K_5}}.$$

Положим

$$I^{**}=(-\alpha^{**},\alpha^{**}), \tag{2.22}$$

где $\alpha^{**}>0$, $-\alpha^{**}$ – корни уравнения $K-|\alpha|K_1-\alpha^2K_2=0$. Тогда $K(\alpha)>0$ для $\alpha\in I^{**}$, и аналогично тому, как из леммы 2.7 следовала теорема 2.8, из леммы 2.10 следует

2.11. Теорема. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_1$, $\sigma^{-1}\in A.2\cap A.7'$. Пусть A – эллиптический оператор второго порядка и пусть $M'\cap I^{**}\neq\emptyset$ (M' – множество из условия А.7'). Тогда форма $B(u,v)$ – $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)$ -эллиптическая.

2.12. Замечание. Функция σ принадлежит А. i (i = 1, 3, 4) тогда и только тогда, когда $\sigma^{-1}\in A.l$ (l = 1, 3, 4).

2.13. Л е м м а. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_1$ и $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_1$. Тогда форма $B(u,v)$ непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)\times\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)$, $v\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$. Из неравенства Гёльдера и утверждения об эквивалентности норм на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,p}(\Omega)$ $(p=\sigma\circ r,\ p=\sigma^{-1}\circ r)$ имеем

$$|B(u,v)|=\int_\Omega \bar a_{ij} D^i u D^j v\,dx\le M_{ij}\int_\Omega |D^i u|\cdot(\sigma\circ r)^{-1/2}\cdot|D^j v|(\sigma\circ r)^{1/2}dx\le$$

$$\le c_1\sum_{|i|\le 1}\sum_{|j|\le 1}\|D^i u\|_{L_{2,\sigma^{-1}\circ r}}\|D^j v\|_{L_{2,\sigma\circ r}}\le c_2\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma^{-1}\circ r}}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma\circ r}},$$

и лемма доказана.

Из теорем 2.8 и 2.11 и из леммы 2.13 непосредственно следует

2.14. Т е о р е м а. Пусть $p=2$, $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_1$, $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_1$, $\sigma\in$ A.2 $\cap$ A.7, $\sigma^{-1}\in$ A.2 $\cap$ A.7'. Пусть A – эллиптический оператор второго порядка, M и M' – множества из условий A.7 и A.7', I^* и I^{**} – отрезки из (2.19) и (2.22) и пусть

$$M\cap I^*\cap M'\cap I^{**}\ne\varnothing.$$

Тогда форма $B(u,v)$, соответствующая оператору A, непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma^{-1}\circ r}\times\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma\circ r}$ и $(\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma^{-1}\circ r},\ \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\sigma\circ r})$ – эллиптическая.

Теперь будем предполагать, что $k>1$ (k – натуральное число), и будем рассматривать оператор A $2k$ -го порядка. Надо обобщить условия A.7 и A.7' и условие A.2:

2.15. О б о з н а ч е н и я. Пусть $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_k$, $p=2$.

A.7.k. Существует непустое множество $M\subset R^1$ и числа $c_1(M)>0$, $c_2(M)>0$ такие, что для п.в. $x\in\Omega$, для каждого $\alpha\in M$ и для $1\le|i|\le k$ выполнено по крайней мере одно из условий:

A.7k.1. $\Omega\in C^{0,1}$, $Q=\partial\Omega$, $\sigma\in A.j$, $j=1,3,4,5k,6$, и

$$|D^i(\omega^\alpha\circ r_1)|\le|\alpha|c_1(M)(\sigma\circ r_1)^{1/2}\cdot\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma)\circ r_1\right]^{1/2},$$

$$|D^i(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)|\le|\alpha|c_2(M)\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma)\circ r_1\right]^{1/2}.$$

З а м е ч а н и е. Если $|i|=1$, то эти два неравенства эквивалентны; то же самое верно и в случаях неравенств из следующих условий A.7.k.2, A.7'.k.1 и A.7'.k. 2.

A.7.k.2. $|D^i(\omega^\alpha\circ r_1)|\le|\alpha|c_1(M)\ (\sigma\circ r_1)$,

$$|D^i(\omega^{\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)|\le|\alpha|c_2(M)(\sigma\circ r_1)^{1/2}.$$

Пусть $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_k$, и наложим условие на σ^{-1}:

A.7'.k. Существует непустое множество $M'\subset R^1$ и числа $c_1'(M')>0$, $c_2(M')>0$ такие, что для п.в. $x\in\Omega$, для каждого $\alpha\in M'$ и для $1\le|i|\le k$ выполнено по крайней мере одно из условий:

A.7'.k. 1. $\Omega\in C^{0,1}$, $Q\in\partial\Omega$, $\sigma^{-1}\in A.j$, $j=1,3,4,5k,6$ и

$$|D^i(\omega^{-\alpha}\circ r_1)| \le |\alpha| C_1(M')(\sigma\circ r_1)^{-1/2}\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma^{-1})\circ r_1\right]^{1/2},$$

A.7'.k.2.
$$|D^i(\omega^{-\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)| \le |\alpha| C_2(M')\cdot\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma^{-1})\circ r_1\right]^{1/2};$$
$$|D^i(\omega^{-\alpha}\circ r_1)| \le |\alpha| C_1(M')\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma^{-1})\circ r_1\right]^{1/2},$$
$$|D^i(\omega^{-\frac{\alpha}{2}}\circ r_1)| \le |\alpha| C_2(M')\left[\mathcal{F}^{|i|}(\sigma^{-1})\circ r_1\right]^{1/2}.$$

А.2.k. Функция σ имеет производные до порядка k включительно, и $\frac{d^j\sigma}{dt^j}\in A.2$ для $j=1,\dots,k$.

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.14, получим следующее ее обобщение:

2.16. Т е о р е м а. Пусть $p=2$, $k\ge 1$, $(\Omega,Q,\sigma,r)\in E_k$, $(\Omega,Q,\sigma^{-1},r)\in E_k$. Пусть $\sigma\in A.2.k\cap A.7.k$, $\sigma^{-1}\in A.2.k\cap A.7'.k$. Пусть A – эллиптический оператор $2k$-го порядка; M, M' – множества соответственно из условий А.7.k, А.7'.k. Тогда существует отрезок I, содержащий точку $\alpha=0$, такой, что если $M\cap M'\cap I\ne\varnothing$, то форма $B(u,v)$, соответствующая оператору А, непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma^{-1}\circ r}\times\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma\circ r}$ и $(\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma^{-1}\circ r},\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma\circ r})$ -эллиптическая.

3. Задача Дирихле

Доказательство существования и единственности решения задачи Дирихле для оператора (2.1), которую сформулируем ниже, основано на следующем обобщении теоремы Лакса–Мильграма (см. [1]):

3.1. Т е о р е м а. Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $B(u_1,u_2)$ – билинейная форма на $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$, которая непрерывна и $(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$-эллиптическая. Пусть f – функционал над пространством $\mathcal{H}_1$. Тогда существует один и только один элемент $u_2\in\mathcal{H}_2$ такой, что

$$B(u_1,u_2)=f(u_1) \tag{3.1}$$

для всех $u_1\in\mathcal{H}_1$, и существует $C>0$, не зависящее от f, u_2 такое, что имеет место оценка

$$\|u_2\|_{\mathcal{H}_2}\le C\|f\|_{\mathcal{H}_1'}. \tag{3.2}$$

3.2. О б о з н а ч е н и е. Пространство линейных непрерывных функционалов над пространством $\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ будем обозначать

$$W^{-k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega). \tag{3.3}$$

Для $f\in W^{-k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)$ и $u\in\overset{\circ}{W}{}^k_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ будем писать

$$f(u)=(u,f).$$

3.3. Л е м м а. Пусть выполнены условия теоремы 1.10 или теоремы 1.11 (для σ^{-1} вместо σ), k – натуральное, i – мультииндексы, $|i|\le k$, $g_i\in L_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$. Пусть

$$f=(-1)^{|i|}D^i g_i \tag{3.4}$$

(с производными в смысле Соболева). Тогда $f\in W^{-k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ и существует $C>0$ такое, что

$$\|f\|_{W^{-k}_{2,\sigma\circ r}} \leq c \sum_{|i|\leq k} \|g_i\|_{L_{2,\sigma\circ r}} . \qquad (3.5)$$

Доказательство. В силу предположений о функции σ^{-1} имеет место теорема об эквивалентности норм в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}$. Отсюда и из неравенства Гёльдера имеем для $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ и

$$f(v) = (v,f) = \int_\Omega D^i v\, \bar{g}_i\, dx$$

оценку

$$|(v,f)| = \left|\int_\Omega D^i v\,(\sigma\circ r)^{-\frac{1}{2}}\cdot \bar{g}_i\,(\sigma\circ r)^{\frac{1}{2}} dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega |D^i v|^2 (\sigma\circ r)^{-1} dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_\Omega |g_i|^2 (\sigma\circ r) dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|v\|_{W^{k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}} \cdot \sum_{|i|\leq k} \|g_i\|_{L_{2,\sigma\circ r}} \leq$$

$$\leq c\,\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}} \cdot \sum_{|i|\leq k} \|g_i\|_{L_{2,\sigma\circ r}} .$$

В силу плотности множества $\mathcal{D}(\Omega)$ эта оценка верна также для $v\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}$, и лемма доказана.

3.4. Определение. Пусть A – оператор $2k$-го порядка из (2.1) и $B(u,v)$ – соответствующая форма из (2.2). Пусть $f\in W^{-k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ и $u_0\in W^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$. Скажем, что функция $u\in W^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ является слабым решением задачи Дирихле $Au=f$ на Ω; $D^j u = D^j u_0$ на $\partial\Omega$, $|j|\leq k-1$, если

(i) $B(v,u) = (v,f)$ для всех $v\in\mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) $u-u_0\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$.

3.5. Теорема. Пусть выполнены условия теоремы 2.16. Пусть $\alpha\in I\cap M\cap M'$, $\sigma=\omega^\alpha$, $u_0\in W^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ и $f\in W^{-k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$. Тогда существует одно и только одно слабое решение $u\in W^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ задачи Дирихле и существует $C>0$ такое, что

$$\|u\|_{W^{k}_{2,\sigma\circ r}} \leq c\left[\|u_0\|_{W^{k}_{2,\sigma\circ r}} + \|f\|_{W^{-k}_{2,\sigma\circ r}}\right] . \qquad (3.6)$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{H}_1 = \overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma^{-1}\circ r}(\Omega)$, $\mathcal{H}_2 = \overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$, $g = f - (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u_0)$. Из леммы 3.3 следует, что

$$g\in W^{-k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega) = \mathcal{H}_1'.$$

Из теоремы 2.16 следует, что форма $B(u,v)$ непрерывна и $(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$-эллиптическая. Поэтому, в силу теоремы 3.1, существует одна и только одна функция $w\in\mathcal{H}_2$ такая, что для всех $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ имеет место

$$B(v,w) = (v,g)$$

и

$$\|w\|_{\mathcal{H}_2} \leq c_1 \|g\|_{\mathcal{H}_1'} . \qquad (3.7)$$

Если положить $u=u_0+w$, то $u-u_0\in \overset{\circ}{W}{}^{k}_{2,\sigma\circ r}(\Omega)$ и для $v\in\mathcal{D}(\Omega)$ имеем

$$B(v,u) = B(v,u_0) + B(v,w) =$$

$$= (v, (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u_0)) +$$

$$+ (v, f-(-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u_0)) = (v,f).$$

Но это значит, что функция u является слабым решением задачи Дирихле и что она определяется однозначно. Оценка (3.6) следует из (3.5) и (3.7), и теорема доказана.

4. Примеры

Будем рассматривать плоские области Ω, и оператор А будет оператором Лапласа:

$$Au = -\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

Результаты приведем без доказательства; заметим, что, используя специальную форму областей Ω и оператора А, в этих примерах получаем оценки и результаты, обобщающие результаты, которые вытекают из общей теории § 2.

Пусть

$$\Omega = \{[x,y] \in R^2;\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \infty\},$$
$$Q = \{[x,0];\ 0 < x < 1\},$$
$$\sigma(t) = e^{\beta t},\ \beta \in R.$$

Тогда $r(x,y) = y$ и

$$\rho(x,y) = (\sigma \circ r)(x,y) = e^{\beta y}. \tag{4.1}$$

Задача Дирихле для оператора $-\Delta$ имеет одно и только одно слабое решение в пространстве $W^1_{2,\rho}(\Omega)$ с весовой функцией ρ из (4.1) для всех β таких, что

$$|\beta| < 2\pi. \tag{4.2}$$

Пусть

$$\Omega = \{[x,y] \in R^2,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\},$$
$$Q = \{[x,0];\ 0 < x < 1\},$$
$$\sigma(t) = t^\beta \lg^\gamma \frac{R}{t} \quad (t, \gamma \in R^1),$$

($R > 1$ фиксировано). Тогда $r(x,y) = y$ и

$$\rho(x,y) = (\sigma \circ r)(x,y) = y^\beta \lg^\gamma \frac{R}{y}. \tag{4.3}$$

Задача Дирихле для оператора $-\Delta$ имеет одно и только одно слабое решение в пространстве $W^1_{2,\rho}(\Omega)$ с весовой функцией ρ из (4.3) для всех пар β, γ, удовлетворяющих одному из следующих условий:

$$0 \le \gamma < \frac{1}{3C_0};\quad -\gamma C_0 \le \beta < \frac{1}{3}, \tag{4.4}$$

$$0 \le \gamma < \frac{2}{3C_0};\quad \max\left(0, -\tfrac{1}{3} + \gamma C_0\right) < \beta < \min\left(\tfrac{1}{3}, \gamma C_0\right),\ \text{или}\ \beta = 0, \tag{4.5}$$

$$-\frac{1}{3C_0} < \gamma \le 0;\quad 0 \le \beta < \frac{1}{3} + \gamma C_0, \tag{4.6}$$

$$-\frac{2}{3C_0} < \gamma \le 0;\quad \max\left(\gamma C_0, -\tfrac{1}{3}\right) < \beta < \min\left(0, \tfrac{1}{3} + \gamma C_0\right),\ \text{или}\ \beta = 0, \tag{4.7}$$

$$-\frac{1}{3C_0} < \gamma \le 0;\quad -\frac{1}{3} < \beta \le \gamma C_0, \tag{4.8}$$

$$0 \leq \gamma < \frac{1}{3c_0}; \quad -\frac{1}{3} + \gamma c_0 < \beta \leq 0 \tag{4.9}$$

(здесь $c_0 = (\lg R)^{-1}$).

Литература

1. N e č a s J. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine á la variationelle. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, 16, 4 (1962), p.305-326.
2. K u f n e r A. Lösungen des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen in Räumen mit Belegungsfunktionen. Czech. Math.J. 15 (90), 1965, 621-633.
3. G e y m o n a t G., G r i s v a r d P. Problemi ai limiti lineari ellittici negli spazi di Sobolev con peso. Le Matematiche, 22 2,(1967),1-38.
4. K a d l e c J., K u f n e r A. On the solution of the mixed problem.Comment. Math. Univ.Carolinae 7, 1 (1966), 75-84.
5. N e č a s J. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques . Praha, Academia, 1967.
6. K u f n e r A. Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces. Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa, ser.3,23,3 (1969), 373-386.
7. O p i c B. Über die äquivalenten Normen in den Sobolevschen Räumen mit Belegungsfunktion. Comm.Math.Univ.Carolinae.