УДК 517.946

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ЯДРА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В. П. Глушко, Э. Д. Гулянский (Воронеж)

В работе рассматривается вопрос о конечномерности ядра (нуль-пространства) оператора, порожденного общей граничной задачей для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка в полосе $E_n^d=\{(x,t):\ 0<t<d,\ x\in E_{n-1}\}$ пространства E_n. Конечномерность нуль-пространства соответствующей задачи в ограниченной области пространства E_n установлена в [1]. Для неограниченных областей (типа указанной выше полосы E_n^d) условия конечномерности ядра, по-видимому, не были известны. Здесь мы показываем, что при определенных условиях на коэффициенты рассматриваемых дифференциальных операторов размерность нуль-пространства конечна. Попутно устанавливается ряд новых априорных оценок решений вырождающихся эллиптических уравнений в пространствах "с весом".

Аналогичные вопросы для невырождающихся эллиптических уравнений детально изучались в работах [2, 3] и др. При доказательстве наших утверждений мы существенно опираемся на результаты работ [1, 4, 5].

В полосе E_n^d пространства E_n задан дифференциальный оператор второго порядка

$$A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)=(\alpha(t,x)\partial_t)^2+p(t,x,\mathcal{D}_x)\partial_t-$$
$$-c(t,x,\mathcal{D}_x)+c_n(t,x)\alpha(t,x)\partial_t+i\sum_{k=1}^{n-1}c_k(t,x)\mathcal{D}_{x_k}+c_0(t,x),$$

где

$$p(t,x,\xi)=a_n(t,x)+i\sum_{k=1}^{n-1}a_k(t,x)\xi_k\alpha(t,x);\quad c(t,x,\xi)=\sum_{k,\ell=1}^{n-1}a_{k\ell}(t,x)\xi_k\xi_\ell;$$

$$\mathcal{D}_x=(\mathcal{D}_{x_1},\mathcal{D}_{x_2},\dots,\mathcal{D}_{x_{n-1}});\quad \mathcal{D}_{x_k}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k};\quad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t};\ \alpha(t,x),\ a_k(t,x)\ (1\le k\le n),$$

$$a_{k\ell}(t,x)\ (1\le k,\ \ell\le n-1),\ c_k(t,x)\ (0\le k\le n)$$

– действительные достаточно гладкие функции в $\bar{E}_n^d$; $\alpha(+0,x)=0\quad (x\in E_{n-1})$.

Наряду с оператором $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ мы будем рассматривать оператор

$$A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x,\nu)=(\alpha(t)\partial_t)^2+p(t,\mathcal{D}_x)\partial_t-c(t,\mathcal{D}_x)+$$
$$+c_n(t)\alpha(t)\partial_t+i\sum_{k=1}^{n-1}c_k(t)\mathcal{D}_{x_k}+c_0(t)-\nu,$$

коэффициенты которого являются пределами при $|x|\to\infty$ соответствующих коэффициентов оператора $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$:

$$\alpha(t)=\lim_{|x|\to\infty}\alpha(t,x);\quad p(t,\xi)=\lim_{|x|\to\infty}p(t,x,\xi)=a_n(t)+i\sum_{k=1}^{n-1}a_k(t)\xi_k\alpha(t);$$

$$c(t,\xi)=\lim_{|x|\to\infty}c(t,x,\xi)=\sum_{k,\ell=1}^{n-1}a_{k\ell}(t)\xi_k\xi_\ell;$$

$c_k(t)=\lim\limits_{|x|\to\infty}c_k(t,x)$ $(0\le k\le n)$, ν–параметр.

Условие 1. При всех $x\in E_{n-1}$

$$\lim_{t\to+0}\alpha(t,x)\alpha^{-1}(t)=1$$

и для всех $(t,x)\in E_n^d$, $(\eta,\xi)\in E_n$ выполняется оценка

$$\eta^2+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(t,x)\xi_k\eta+c(t,x,\xi)\ge\varkappa_0(\eta^2+|\xi|^2) \tag{1}$$

с постоянной $\varkappa_0>0$, не зависящей от η,ξ,t,x.

Условие 2. Для некоторого целого $m\ge2$ коэффициенты $\alpha(t,x)$, $a_k(t,x)$, $a_{k\ell}(t,x)$ $(1\le k,\ell\le n-1)$ принадлежат $C^{m-1}(\bar E_n^d)$; коэффициенты $\alpha(t)$, $a_k(t)$, $a_{k\ell}(t)$ $(1\le k,\ell\le n-1)$ принадлежат $C^{m-1}[0,d]$; остальные коэффициенты операторов $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ принадлежат пространству $C^{m-2}(\bar E_n^d)$. Кроме того, $a_n(t,x)\le-a_0<0$ при всех $(t,x)\in E_n^d$.

На гиперплоскости $t=0$ рассматривается граничный оператор

$$B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)=\sum_{2s+|\tau|\le m^*}b_{s\tau}(x)\partial_t^s\mathcal{D}_x^\tau,$$

коэффициенты которого $b_{s\tau}(x)$ – комплекснозначные функции $x\in E_{n-1}$.

Условие 3. При целом $m\ge2\left[\frac{m^*}{2}\right]+2$ коэффициенты $b_{s\tau}(x)$ оператора B принадлежат $C^{m-m^*}(E_{n-1})$ и существуют пределы $\lim\limits_{|x|\to\infty}b_{s\tau}(x)=b_{s\tau}$ при $2s+|\tau|\le m^*$. При любых $x\in E_{n-1}$, $\xi\in E_{n-1}$, $\xi\ne0$, однородный многочлен по ξ степени m^*

$$\vartheta(x,\xi)=\sum_{2s+|\tau|=m^*}b_{s\tau}(x)\xi^\tau\left(\frac{c(0,x,\xi)}{a_n(0,x)}\right)^s$$

не обращается в нуль; точнее, справедлива оценка

$$|\vartheta(x,\xi)|\ge\varkappa_1|\xi|^{m^*}, \tag{2}$$

причем постоянная $\varkappa_1>0$ не зависит от x и ξ.

Оператор

$$B_\infty(\partial_t,\mathcal{D}_x)=\sum_{2s+|\tau|\le m^*}b_{s\tau}\partial_t^s\mathcal{D}_x^\tau$$

подчинен более жесткому по сравнению с (2) условию.

Условие 4. При любых $\xi\in E_{n-1}$ справедлива оценка

$$|\vartheta_\infty(\xi)|^2=\left|\sum_{2s+|\tau|=m^*}b_{s\tau}\xi^\tau\left(\frac{1+c(0,\xi)}{a_n(0)}\right)^s\right|^2\ge\varkappa_2(1+|\xi|^2)^{m^*} \tag{3}$$

Введем функциональные пространства, в которых будут изучаться операторы $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$. Для норм в пространствах $\mathcal{L}_2$ с весом мы используем обозначения

$$\|v\|_q=\left\{\int_{E_n^d}|v(t,x)|^2\sigma^{2q}(x)\,dx\,dt\right\}^{1/2};$$

$$\ll g \gg_q = \left\{ \int_{E_{n-1}} |g(x)|^2 \sigma^{2q}(x)\,dx \right\}^{1/2},$$

где $\sigma(x) = (1+|x|^2)^{1/2}$.

Определение 1. Пространства $H^m_{\alpha,q}$ и $\mathcal{H}^m_\alpha$ ($m \geq 0$ – целое) состоят из всех функций $v(t,x)$, имеющих в E^d_n обобщенные производные до порядка m, для которых конечны соответственно нормы:

$$|v|_{m,\alpha,q} = \left\{ \sum_{j+2s+|\tau| \leq m} |(\alpha \partial_t)^j \partial_t^s \mathcal{D}_x^\tau v|_q^2 \right\}^{1/2};$$

$$\| v \|_{m,\alpha} = \left\{ \sum_{j+2s+|\tau| \leq m} |(\alpha \partial_t)^j \partial_t^s \mathcal{D}_x^\tau v|^2_{j+2s+|\tau|} \right\}^{1/2}.$$

Очевидно, что при $m=0$ пространство $\mathcal{H}^m_\alpha$ совпадает с пространством $\mathcal{L}_2(E^d_n)$.

Через $\check{H}^m_\alpha$ мы будем обозначать множество функций $v(t,x)$, которые принадлежат $\mathcal{H}^m_\alpha$ ($H^m_{\alpha,q}$) после умножения на любую функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(E_{n-1})$.

Определение 2. Пространства V^m_q и W^m состоят из всех функций $g(x)$, имеющих в E_{n-1} обобщенные производные до порядка m, для которых конечны соответственно нормы:

$$\ll g \gg_{m,q} = \left\{ \sum_{|\tau| \leq m} \ll \mathcal{D}_x^\tau g \gg_q^2 \right\}^{1/2};$$

$$\lll g \ggg_m = \left\{ \sum_{|\tau| \leq m} \ll \mathcal{D}_x^\tau g \gg_{|\tau|}^2 \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим в E^d_n задачу:

$$A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x) v = f(t,x), \quad B_\infty(\partial_t,\mathcal{D}_x) v\big|_{t=0} = g(x), \quad v\big|_{t=d} = 0. \qquad (4)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть целое число $m_1 \geq 2\left[\frac{m^*}{2}\right] + 2$ и выполнены условия 1 и 4. Если для $m \geq m_1$, коэффициенты оператора $A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ удовлетворяют условию 2, то существует $\nu_1 > 0$ такое, что при $\nu \geq \nu_1$ и $q > 0$ решение задачи (4) $v(t,x) \in H^{m_1}_{\alpha,q}$ при любых $f(t,x) \in H^{m-2}_{\alpha,q}$ и $g(x) \in V_q^{m-m^*-1}$, принадлежит пространству $H^m_{\alpha,q}$ и справедлива оценка

$$|v|_{m,\alpha,q} \leq C_1 \left\{ |f|_{m-2,\alpha,q} + \ll g \gg_{m-m^*-1,q} \right\},$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от v, f и g.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $\nu \geq \nu_1$ существует единственное решение $v(t,x) \in H^m_{\alpha,q}$ задачи (4).

Перейдем к рассмотрению граничной задачи

$$A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x) v = f(t,x), \quad B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x) v\big|_{t=0} = g(x), \quad v\big|_{t=d} = 0. \qquad (5)$$

Относительно операторов $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ потребуем дополнительно, чтобы выполнялось

У с л о в и е 5. При некотором $\nu \geq \nu_1$ (см. теорему 1) операторы $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ представимы в виде

$$A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x) = A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x,\nu) + \sum_{j+2s+|\tau|\leq 2} a_{js\tau}(t,x)(\varkappa\partial_t)^j \partial_t^s \mathcal{D}_x^\tau ;$$

$$B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x) = B_\infty(\partial_t,\mathcal{D}_x) + \sum_{2s+|\tau|\leq m^*} d_{s\tau}(x)\partial_t^s \mathcal{D}_x^\tau , \qquad (6)$$

причем выполняются оценки: если $j_1+2s_1+|\tau_1|\leq 2$ и $j_2+2s_2+|\tau_2|\leq m-2$, то

$$\limsup_{|x|\to\infty} [\sigma(x)]^{m-j_1-2s_1-|\tau_1|+j_2+2s_2+|\tau_2|} \max_{t\in[0,d]} |(\varkappa\partial_t)^{j_2}\partial_t^{s_2}\mathcal{D}_x^{\tau_2} a_{j_1 s_1 \tau_1}(t,x)| < \delta ;$$

если $2s_1+|\tau_1|\leq m^*$ и $|\tau_2|\leq m-m^*-1$, то

$$\limsup_{|x|\to\infty} \sigma^{m-2s_1-|\tau_1|+|\tau_2|}(x)\, |\mathcal{D}_x^{\tau_2} d_{s_1\tau_1}(x)| < \delta ,$$

где $\delta>0$ – достаточно малое число и $m \geq 2\left[\frac{m^*}{2}\right]+2$.

З а м е ч а н и е. Величина $\delta>0$ в условии 5 определяется величиной и гладкостью коэффициентов (и их производных) дифференциальных операторов $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$, $B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ в шаре $|x|\leq R_0$, а также величиной постоянных $\varkappa_0$; $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в условиях (1), (2) и (3).

Т е о р е м а 2. Пусть целое число $m \geq 2\left[\frac{m^*}{2}\right]+2$ и выполнены условия 1–5. Если функция $v(t,x)\in \mathcal{L}_2(E_n^d)$ принадлежит множеству $\overset{\vee}{H}{}_\alpha^m$ и является решением задачи (5) при $f(t,x)\in H_{\alpha,m}^{m-2}$ и $g(x)\in V_m^m$, то $v(t,x)$ принадлежит $\mathcal{H}_\alpha^m$ и справедлива оценка

$$\|v\|_{m,\alpha} \leq c_2 \left\{ \|f\|_{m-2,\alpha,m} + \langle\!\langle g \rangle\!\rangle_{m-m^*-1,m} + |v|_0 \right\}$$

с постоянной $c_2>0$, не зависящей от v, f и g.

Теорема 2 позволяет установить конечномерность ядра оператора $L=(A,B)$, порожденного задачей (5).

О п р е д е л е н и е 3. Нуль-пространством (ядром) оператора L будем называть множество функций $N(L)$ таких, что $v(t,x)\in \overset{\vee}{H}{}_\alpha^m \cap \mathcal{L}_2(E_n^d)$; $Av=0$; $Bv|_{t=0}=0$; $v|_{t=d}=0$.

Т е о р е м а 3. Пусть при четном $m \geq 2\left[\frac{m^*}{2}\right]+2$ операторы $A(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $B(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда размерность ядра $N(L)$ оператора L конечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 опирается на следующую лемму.

Л е м м а. Пусть $m\geq 2$ – четное число. Тогда множество K функций $v(t,x)\in \mathcal{H}_\alpha^m$, обращающихся в нуль при $|x|>R$ и таких, что нормы в $\mathcal{H}_\alpha^m$ равномерно ограничены: $\|v\|_{m,\alpha}\leq C$ $(\forall v\in K)$, компактно в пространстве $\mathcal{H}_\alpha^{m-1}$.

В дополнение к теореме 3 может быть доказано утверждение, гарантирующее определенную "устойчивость" размерности $N(L)$.

Т е о р е м а 4. Пусть оператор $L=(A,B)$, порожденный задачей (5), удовлетворяет условиям теоремы 2. Рассмотрим оператор $L'(A',B')$, где операторы $A'(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ и $B'(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)$ представимы в виде

$$A'(t,x,\partial_t,\mathcal{D}_x)=A_\infty(t,\partial_t,\mathcal{D}_x,\nu)+\sum_{j+2s+|\tau|\le 2} a'_{js\tau}(t,x)(\alpha\partial_t)^j\partial_t^s\mathcal{D}_x^\tau,$$

$$B'(x,\partial_t,\mathcal{D}_x)=B_\infty(\partial_t,\mathcal{D}_x)+\sum_{2s+|\tau|\le m^*} d'_{s\tau}(x)\partial_t^s\mathcal{D}_x^\tau,$$

причем операторы A_∞ и B_∞ совпадают с соответствующими операторами в представлении (6). Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что из условий

$$\sup_{\substack{(t,x)\in E_n^d\\ j_1+2s_1+|\tau_1|\le 2\\ j_2+2s_2+|\tau_2|\le m-2}} \sigma^{m-j_1-2s_1-|\tau_1|+j_2+2s_2+|\tau_2|}\left|(\alpha\partial_t)^{j_2}\partial_t^{s_2}\mathcal{D}_x^{\tau_2}a''_{j_1s_1\tau_1}(t,x)\right|<\varepsilon;$$

$$\sup_{\substack{x\in E_{n-1}\\ 2s_1+|\tau_1|\le m^*\\ |\tau_2|\le m-m^*-1}} \sigma^{m-2s_1-|\tau_1|+|\tau_2|}(x)\left|\mathcal{D}_x^{\tau_2}d''_{s_1\tau_1}(x)\right|<\varepsilon,$$

где $a''_{js\tau}(t,x)=a_{js\tau}(t,x)-a'_{js\tau}(t,x)$, $d''_{s\tau}(x)=d_{s\tau}(x)-d'_{s\tau}(x)$,

вытекает $\dim N(L')\le\dim N(L)$.

Л и т е р а т у р а

1. Г л у ш к о В.П. Оценки в $\mathcal{L}_2$ и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. – "Труды Моск.мат. о-ва", 1970, т.23, с.113–178.
2. Р а б и н о в и ч В.С. Псевдодифференциальные уравнения в неограниченных областях с конической структурой на бесконечности. – "Мат.сб.", 1969, т.80, № 1, с.77–96.
3. Б а г и р о в Л.А., Ф е й г и н В.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений в области с неограниченной границей. – "Докл. АН СССР". 1973, т.211, № 1, с.23–26.
4. Г л у ш к о В.П. О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка с вырождением. – "Докл. АН СССР", 1972, т.207, № 2, с. 266–269.
5. Б у л а в и н В.Г., Г л у ш к о В.П. О существовании смешанной задачи для вырождающегося дифференциального уравнения, описывающего диффузионный процесс. – "Труды математического факультета ВГУ", 1972, вып. 7, с.29–39.