УДК 517.392

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С УЗЛАМИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ РЕШЕТКЕ

Ц.Б. Шойнжуров (Улан-Удэ)

В работе С.Л. Соболева [1] исследовались кубатурные формулы с узлами в точках правильных решеток. В данной статье исследуются асимптотически оптимальные кубатурные формулы с узлами в криволинейной решетке в пространстве $W_2^{(m)}(E_n)$, а также асимптотически оптимальные формулы в $W_p^{(m)}(E_n)$.

Обозначения: Ω – ограниченная область в E_n с кусочно-гладкой границей $\Gamma(\Omega)$; $|\Omega|$ – объем области Ω; $\varepsilon_\Omega(x)$ – характеристическая функция области Ω; H – квадратная матрица порядка $n\times n$; Ω_0 – фундаментальная область для матрицы H; γ – целочисленные векторы в E_n; $\Delta=\{x:(x_1,x_2,\dots,x_n), 0<x_i<1, i=1,2,\dots,n\}$ – единичный куб; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ – мультииндекс; $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$;

$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_n!$; $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$; $\frac{|\Omega|}{N}=h^n$; $\rho(hH\gamma,\Gamma(\Omega))$ – расстояние между точкой $hH\gamma$ и границей $\Gamma(\Omega)$; $\Omega_{h\gamma}=\{x: x\in E_n,\ x=hHy+hH\gamma,\ y\in\Delta\}$;

$$\Omega_\gamma^h=\Omega_{h\gamma}\cap\bar{\Omega};$$

$$\mathcal{D}^\alpha\varphi=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n);$$

$C_\Omega^{(m+1)}$ – класс функций $\varphi(x)$, непрерывных на $\bar{\Omega}$ вместе со своими частными производными до порядка $(m+1)$ включительно; $x=x(t)=\{x_i=x_i(t_1,t_2,\dots,t_n), i=1,2,\dots,n\}$ и $t=t(x)=\{t_i=t_i(x_1,x_2,\dots,x_n), i=1,2,\dots,n\}$ – взаимно-однозначное и взаимно-гладкое преобразование областей Ω и Ω_1 друг на друга;

$$\mathcal{D}\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{\mathcal{D}(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\mathcal{D}(t_1,t_2,\dots,t_n)} \quad \text{и} \quad \mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)=\frac{\mathcal{D}(t_1,t_2,\dots,t_n)}{\mathcal{D}(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

– якобианы преобразований $x=x(t)$ и $t=t(x)$; $\left[\mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)\right]=\left[\frac{\partial t_i(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_j}\right]_{(n)}$ – квадратная матрица порядка $n\times n$.

Будем рассматривать кубатурные формулы вида:

$$\int_\Omega\varphi(x)dx\approx\sum_{k=1}^N C_k\varphi(x_k) \qquad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\left(\ell_{\Omega}^{N}(x), \varphi(x)\right) = \int_{\Omega} \varphi(x)dx - \sum_{K=1}^{N} C_K \varphi(x_K) \qquad (2)$$

в пространстве С.Л.Соболева $W_2^{(m)}(E_n)$ $(2m>n)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m)}(E_n)} = \left[\int_{E_n} \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left(\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (3)$$

Введем криволинейные координаты соотношениями:

$$t = t(x) = \{t_i = t_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n\}. \qquad (4)$$

При этом точка $x_0 \in \Omega$ отображается в точку $t_0 \in \Omega_1$. Зафиксируем $t = t_0$. Меняя параметр t_0, получим семейство координатных линий: $t_0 = t(x)$ в E_n.

Пусть узлы $x_\beta \in \bar{\Omega}$ кубатурной формулы (1) определяются формулами:

$$x_\beta = x(h\beta), \qquad (5)$$

где $\beta^* = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\frac{|\Omega_1|}{N} = h^n$ и $h\beta \in \Omega$.

Т е о р е м а 1. Пусть $x = x(t) \in C_{\Omega_1}^{(m+1)}$ и $t = t(x) \in C_{\Omega}^{(m+1)}$, якобианы $\mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)$ и $\mathcal{D}\left(\frac{x}{t}\right)$ положительны на $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}_1$,

$$|\mathcal{D}^{\alpha} x(t)| < K \quad \text{и} \quad |\mathcal{D}^{\alpha} t(x)| < K_1, \quad |\alpha| \leq m+1, \ K > 0 \ \text{и} \ K_1 > 0. \qquad (6)$$

При $h \to 0$ норма функционала погрешности вида:

$$\ell_{\Omega}^{h}(x) = \varepsilon_{\Omega}(x) - \sum_{x_\beta \in \bar{\Omega}} C_\beta h^n \frac{\delta(x - x_\beta)}{\mathcal{D}\left(\frac{t(x_\beta)}{x}\right)}, \qquad (7)$$

где $x_\beta = x(h\beta)$ и C_β – коэффициенты кубатурной формулы с регулярным пограничным слоем в смысле Соболева [1] для области Ω_1, удовлетворяет неравенству

$$\left\|\ell_{\Omega}^{h}(x)\right\|_{W_2^{(m)*}(E_n)} \leq \left[\int_{\Omega} \frac{dx}{\left|2\pi\left[\mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)\right]^* \beta\right|^{2m}}\right]^{\frac{1}{2}} h^m (1 + o(1)). \qquad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы основано на следующей лемме.

Л е м м а 1. Пусть $\ell(t)$ – локальный функционал погрешности: $supp\, \ell(t) \subset \{t \in E_n : |t| < 2L\}$, кроме того, $\|\ell(t)\|_{C^*} < A$ и $(\ell(t), x^{\alpha}) = 0$, $|\alpha| < S$ и $S = m-1, m$. Пусть $G_m(t) = F^{-1}\left[(1 + |2\pi\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}\right]$, $t_0 \in supp\, \ell(t)$, $\omega(\sigma) = \sup_{i,j=1,2,\dots,n} \omega_{ij}(\sigma)$ и

$$\omega_{ij}(\sigma) = \sup_{\substack{|t-\tau| < \sigma \\ t, \tau \in \Omega_1}} \left|\frac{\partial x_i(t)}{\partial t_j} - \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial t_j}\right|.$$

Тогда следующие выражения:

$$L_1(m,t) = \int_{E_n} G_m\left(|x(t) - x(\tau)|\right)\left[\mathcal{D}\left(\frac{x}{\tau}\right) - \mathcal{D}\left(\frac{x(t_0)}{\tau}\right)\right]\ell\left(\frac{\tau}{h}\right)d\tau$$

и

$$L_2(m,t)=\int_{E_n}\left[G_m(|x(t)-x(\tau)|)-G_m(|x'(t_0)(t-\tau)|)\right]\ell\left(\frac{\tau}{h}\right)d\tau$$

удовлетворяют неравенствам:

1. Если $|t|>2Lh$, то $|L_i(m,t)|<Kh^{m+s}\frac{e^{-|t|}}{|t|^{n-m+s}}\omega(\sigma)$, где $i=1,2$ и $\omega(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to 0$.

2. Если $|t|<2Lh$ и $m-n>0$, то $|L_i(m,t)|<Kh^m\omega(\sigma)$.

3. Если $|t|<2Lh$, $2m-n>0$ и $m-n\le 0$, то $\int_{\Omega_{h_0}}|L_i(m,t)|^2dt\le Kh^{2m+n}\omega(\sigma)$.

Лемма доказывается по следующей схеме. Сначала выписываем явное выражение $G_m'(|x(t)-x(\tau)|)$. Затем подынтегральную функцию в окрестности нуля представляем в виде ряда Тейлора и к полученному выражению применяем функционал $\ell(\frac{\tau}{h})$. Тогда пропадут многочлены степени $|\kappa|<S$ относительно τ, а дальнейшие оценки проводим так же, как в книге С.Л. Соболева [1] доказывались основные оценки при доказательстве леммы о свертках.

По определению нормы функционала $\ell_\Omega^h(x)$ в $W_2^{(m)}(E_n)$ имеем

$$\left\|\ell_\Omega^h(x)\right\|_{W_2^{(m)*}(E_n)}=\int_\Omega\left|\overset{\circ}{G}_m(x)*\ell_\Omega^h(x)\right|^2dx+\int_{\Omega^*}\left|\overset{\circ}{G}_m(x)*\ell_\Omega^h(x)\right|^2dx, \qquad (9)$$

где $\Omega^*=E_n\setminus\Omega$ и $\overset{\circ}{G}_m(x)=F^{-1}\left[\left(\sum_{\alpha=0}^m|2\pi\xi|^{2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$.

Применяя лемму 1 и учитывая представления функционала погрешности с регулярным пограничным слоем в виде $\ell_{\Omega_1}^h(t)=\ell_0(\frac{t}{h})-\ell_{\Omega_1^*}^h(t)$, где $\ell_0\left(\frac{t}{h}\right)$ – периодический функционал с периодом $h\beta$, получим

$$\int_\Omega\left|\overset{\circ}{G}_m(x)*\ell_\Omega^h(x)\right|^2dx=\int_{\Omega_1}\left|\int_{E_n}\overset{\circ}{G}_m(|x(t)-x(\tau)|)\ell_{\Omega_1}^h(\tau)\mathcal{D}\left(\frac{x}{\tau}\right)d\tau\right|^2\mathcal{D}\left(\frac{x}{t}\right)dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{\kappa}\mathcal{D}\left(\frac{x(t_j)}{t}\right)^3\int_{\Omega_j}\left|\int_{E_n}\overset{\circ}{G}_m(|x'(t_j)(t-\tau)|)\ell_0\left(\frac{\tau}{h}\right)d\tau\right|^2dt\,(1+o(1))=$$

$$=\sum_{j=1}^{\kappa}\mathcal{D}\left(\frac{x(t_j)}{t}\right)mes\,\Omega_j^h\sum_{\beta\ne 0}\frac{h^{2m}}{\left|2\pi\left[\mathcal{D}\left(\frac{t(x_j)}{x}\right)\right]^*\beta\right|^{2m}}(1+o(1)), \qquad (10)$$

где $\Omega_1=\bigcup_{j=1}^{\kappa}\Omega_j'$, $mes(\Omega_i'\cap\Omega_j')=0$, $i\ne j$, $t_j\in\Omega_j'$ и $x_j\in\Omega_j$.

Из леммы 1 и условия $K|t-\tau|<|x(t)-x(\tau)|<K_1|t-\tau|$, где $K>0$ и $K_1>0$, имеем

$$\int_{\Omega^*}\left|\overset{\circ}{G}_m(x)*\ell_\Omega^h(x)\right|^2dx=h^{2m}o(1). \qquad (11)$$

Из (10) и (11) следует теорема 1.

Теорема 2. Пусть $x=x(t)\in C_{\Omega_1}^{(m+1)}$, $t=t(x)\in C_\Omega^{(m+1)}$, $\mathcal{D}\left(\frac{x}{t}\right)$ и $\mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)$ положительны на $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}$, $|\mathcal{D}^\alpha x(t)|=O(1)$, $|\alpha|=1$, $|\mathcal{D}^\alpha x(t)|=O(h^{-(|\alpha|-2+g)})$, $0<g<1$ и $2\le|\alpha|\le m+1$.

Какова бы ни была последовательность функционалов погрешностей кубатурных формул

$$\ell_{\Omega}(x)=\varepsilon_{\Omega}(x)-\sum_{x_\beta\in\bar{\Omega}} C_\beta\,\delta(x-x_\beta), \tag{12}$$

где $x_\beta=x(h\beta)$ и $h\beta\in\bar{\Omega}_1$, при $h\to 0$ справедливо неравенство

$$\left\|\ell_{\Omega}\right\|_{W_2^{(m)*}(E_n)}\geq\left[\int_{\Omega}\sum_{\beta\neq 0}\frac{dx}{\left|2\pi\left[\mathcal{D}\left(\frac{t}{x}\right)\right]^*\beta\right|^{2m}}\right]^{\frac{1}{2}} h^m(1+o(1)). \tag{13}$$

Чтобы доказать теорему, для любого $\varepsilon>0$ область Ω разбиваем на подобласти Ω_j: $\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}\Omega_j$ и $mes(\Omega_i\cap\Omega_j)=0$ при $i\neq j$ так, чтобы на каждой Ω_j, $j=1,2,\dots,k$, выполнялось $\omega(\sigma)\leq\varepsilon$.

Л е м м а 2. Существует последовательность функций $\varphi_h^j(x)\in W_2^{(m)}$ такая, что

а) $\varphi_h^j(x)\geq 0$ и $\varphi_h^j(x)=0$, при $x\bar{\in}\Omega_j$ или $x=x_\beta$, где $x_\beta=x(h\beta)$ и $h\beta\in\Omega_j'$.

б) При $h\to 0$

$$\int_{\Omega_j}\varphi_h^j(x)dx\geq h^{2m}\left[\sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{\left|2\pi\left[\mathcal{D}\left(\frac{t(x_j)}{x}\right)\right]^*\beta\right|^{2m}}\right]^{2m}\left|\mathcal{D}\left(\frac{t(x_j)}{x}\right)\right|^{2m} mes\,\Omega_j'(1+o(1)). \tag{14}$$

Построим функцию $\varphi_h^j(x)$, удовлетворяющую условиям а) и б). Для этого берем функцию $\varphi_h^j(x)=\varphi_h(x)\vartheta_0\left(\frac{t(x)}{h}\right)$, где $\varphi_h(x)$ – функция, построенная в работе С.Л.Соболева [1], и

$$\vartheta_0\left(\frac{t}{h}\right)=\sum_{\beta\neq 0}\frac{1-e^{2\pi i\beta^* h^{-1}t}}{\left(1+\sum_{\alpha=0}^{m}\left|2\pi\left[\mathcal{D}\left(\frac{t(x_j)}{x}\right)\right]^* h^{-1}\beta\right|^{2\alpha}\right)}. \tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что функция $\varphi_h^j(x)$ обладает нужным нам свойством.

Составим теперь функцию

$$\varphi_h(x)=\sum_{j=1}^{k}\varphi_h^j(x). \tag{16}$$

Из леммы 2 и неравенства

$$\int\varphi_h(x)dx-\int\varphi_h(x)\ell_{\Omega}(x)dx\leq\left\|\ell_{\Omega}\right\|_{W_2^{(m)*}(E_n)}\left\|\varphi\right\|_{W_2^{(m)}(E_n)} \tag{17}$$

следует теорема.

С л е д с т в и е. Если выполняются условия теоремы 1, то функционал погрешности вида (7) с узлами $x_\beta=x(h\beta)$ является асимптотически оптимальным в $W_2^{(m)}(E_n)$.

Теперь несколько уточним определение функционала с регулярным пограничным слоем для пространства $W_p^{(m)}(E_n)$.

Положим $\mu(\xi)=(1+|2\pi\xi|^2)^{\frac{m}{2}}$. Тогда норма оптимального периодического функционала

$$\tilde{\ell}_0\left(\frac{x}{h}\right)=1-\sum_{\beta} C_0^h h^n \delta(x-hH\beta) \qquad (18)$$

в пространстве $\tilde{W}_p^{(m)}(\Omega_0)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{W}_p^{(m)}(\Omega_0)}=\left\{\int_{\Omega_0}\left|F^{-1}[\mu(\xi)\hat{\varphi}(\xi)]\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (19)$$

равна

$$\left\|\tilde{\ell}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\tilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}=\left[\int_{\Omega_0}\left|(1-C_0^h)-C_0^h\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}, \qquad (20)$$

где C_0^h определяется из уравнения

$$\int_{\Omega_0}\left|1-C_0^h-C_0^h\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{p'}dx=\int_{\Omega_0}\left|1-C_0^h-C_0^h\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}\left(1-C_0^h-C_0^h\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right)dx. \qquad (21)$$

О п р е д е л е н и е. Пусть функционалы погрешности кубатурной формулы могут быть представлены в виде:

$$\ell_\Omega^h(x)=\sum_{\gamma\in B_1\cup B_2}\ell_\gamma\left(\frac{x}{h}\right)=\sum_{\gamma\in B_1}\ell_\gamma\left(\frac{x}{h}\right)+\sum_{\gamma\in B_2}\ell_\gamma\left(\frac{x}{h}\right),\ \gamma\in R,$$

здесь $\ell_\gamma\left(\frac{x}{h}\right)=\varepsilon_{\Omega_\gamma^h}(x)-\sum_{\gamma'\in B_0}h^n C_{\gamma'}^{\gamma}\,\delta(x-hH(\gamma+\gamma'))$,

где, в свою очередь, B_0 – ограниченное подмножество R, удовлетворяют условиям:

1. $\|\ell_\gamma(x)\|_{C^*}<A$;
2. $\operatorname{supp}\ell_\gamma(x)\subset\{x\in E_n : |x-H\gamma|<2L\}$;
3. $(\ell_\gamma(x),x^\alpha)=0,\quad |\alpha|<m \quad \forall\gamma\in B_1=\{\gamma:\rho(hH\gamma,\Gamma(\Omega))\le 2Lh\}$;
4. $\ell_\gamma(x)=\ell(x-H\gamma) \quad \forall\gamma\in B_2=\{\gamma\in R:\rho(hH\gamma,\Gamma(\Omega))>2Lh$ и $hH\gamma\in\Omega\}$;

где $\ell(x)=\varepsilon_{\Omega_0}(x)-\sum_{\gamma'\in B_0}C_{\gamma'}\delta(x-H\gamma')$, $(\ell(x),x^\alpha)=0,\ 0<|\alpha|\le m$;

5. $(\ell(x-H\gamma),1)=\int_{\Omega_0}dx-\sum_{\gamma'\in B_0}C_{\gamma'}=(1-C_0^h) \quad \forall\gamma\in B_2$,

где C_0^h удовлетворяет уравнению (21).

Такие функционалы, следуя С.Л.Соболеву, будем называть функционалами с регулярным пограничным слоем.

Л е м м а 3. <u>Какова бы ни была последовательность функционалов погрешностей кубатурных формул с узлами в точках решеток, соответствующих матрице</u>

H и $\det H=1$,

$$\ell_{\Omega}(x)=\varepsilon_{\Omega}(x)-\sum_{hH\gamma\in\bar{\Omega}} h^{n}C_{\gamma}\delta(x-hH\gamma), \tag{22}$$

в пространстве $W_p^{(m)}(E_n)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{(m)}(E_n)}=\left\{\int_{E_n}\left|F^{-1}[\mu(\xi)\hat{\varphi}(\xi)]\right|^{p}dx\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{23}$$

при $h\to 0$ имеет место оценка

$$\|\ell_{\Omega}(x)\|_{W_p^{(m)*}(E_n)}\geq|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}\left\|\tilde{\ell}_0\left(\frac{x}{h}\right)\right\|_{\tilde{W}_p^{(m)*}(\Omega_0)}(1+O(h)). \tag{24}$$

Доказательство теоремы. Положим $\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)=\tilde{u}_0\left(\frac{x}{h}\right)-u_0(0)$, где $\tilde{u}_0\left(\frac{x}{h}\right)$ – периодическая экстремальная функция оптимального функционала $\tilde{\ell}_0\left(\frac{x}{h}\right)$ в $\tilde{W}_p^{(m)}(\Omega)$. Она имеет вид

$$\tilde{u}_0\left(\frac{x}{h}\right)=\sum_{\gamma}C_{\gamma}e^{2\pi i\gamma^{*}h^{-1}H^{-1}x}, \tag{25}$$

где
$$C_{\gamma}=\frac{1}{h^{n}}\int_{\Omega_{h_0}}\left|1-C_0^{h}-C_0^{h}\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^{*}h^{-1}H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sgn}\left(1-C_0^{h}-C_0^{h}\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{2\pi i\beta^{*}h^{-1}H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right)dx. \tag{26}$$

Пусть $\Omega_h'=\{x\in E_n,\ \rho(x,\Omega)<Lh\}$,

$$\Omega_h=\{x\in\Omega:\rho(x,E_n\setminus\bar{\Omega})>Lh\}\quad \text{и}\quad \operatorname{mes}(\Omega_h'\setminus\Omega_h)=O(h). \tag{27}$$

Введем следующую функцию: $\varphi_h(x)=\psi_h(x)\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)$. Отметим, что функция $\psi_h(x)$ равна единице, когда $x\in\Omega_{3h}$; $|\psi_h(x)|<1$, когда $x\in\Omega_{2h}$, в остальных точках $x\in E_n$ она равна нулю и $\tilde{\vartheta}_0(H\gamma)=0$ $\forall\gamma\in R$. Из условия (27) и свойства функции $\psi_h(x)$ имеем

$$\int\varphi_h(x)dx=\int\psi_h(x)\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)dx-\int_{\Omega_{3h}}\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)dx\,(1+O(h)). \tag{28}$$

Учитывая свойство функции $\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)$, получим

$$\int_{\Omega_{3h}} \tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)dx = \sum_{hH\gamma\in\Omega_{3h}} \int_{\Omega_{h\gamma}} \tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)dx =$$

$$= mes\,\Omega_{3h} \int_{\Omega_0} \left|(1-C_0^h) - C_0^h \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{p'} dx. \qquad (29)$$

Пусть m - четное число. Тогда

$$(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \varphi_h(x) = \begin{cases} (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right) & \text{, если } x\in\Omega_{3h}, \\ 0 & \text{, если } x\bar{\in}\Omega_{2h}, \\ (1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \varphi_h(x)\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right) & \text{, если } x\in\Omega_{2h}\setminus\Omega_{3h}. \end{cases} \qquad (30)$$

В полосе $\Omega_{2h}\setminus\Omega_{3h}$ производные функции $\psi_h(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|\mathcal{D}^{\alpha}\psi_h(x)| < Kh^{-|\alpha|}, \quad K>0. \qquad (31)$$

В силу равенства (21) и условий (27), (30) и (31) находим норму функции $\varphi_h(x)$ в $W_p^{(m)}(E_n)$

$$\|\varphi_h\|^p_{W_p^{(m)}(E_n)} = \int_{E_n} |(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \varphi_h(x)|^p dx = \int_{\Omega_{3h}} |(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)|^p dx +$$

$$+ \int_{\Omega_{2h}\setminus\Omega_{3h}} |(1-\Delta)^{\frac{m}{2}} \varphi_h(x)\tilde{\vartheta}_0\left(\frac{x}{h}\right)|^p dx = |\Omega| \int_{\Omega_0} \left|1 - C_0^h - C_0^h \sum_{\beta\neq 0} \frac{e^{2\pi i\beta^* H^{-1}x}}{\mu(h^{-1}H^{-1*}\beta)}\right|^{p'} dx\,(1+O(h)). \qquad (32)$$

Из (17), (28) и (31) при четном m следует лемма 3. Аналогично доказывается лемма 3 при любом m.

Т е о р е м а 3. Последовательность кубатурных формул с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимальна в $W_p^{(m)}(E_n)$.

Теорема вытекает из леммы 3 и из оценки сверху выражения вида:

$$\left[\int_{E_n} \left| G_m^{l}(x) * \ell_{\Omega}^{h}(x) \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}},$$

при этом условие 5 новых трудностей не создает, так как ℓ_0^h удовлетворяет условию (21).

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул, М., "Наука", 1974, 808 с.