УДК 517.948

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ УСЛОВИЙ КВАНТОВАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ТЕОРИИ МАСЛОВА

Б.Ю. Стернин (Москва)

Введение

1°. Метод Маслова построения асимптотических решений $1/h$ -псевдо - дифференциальных уравнений состоит в построении канонического оператора на специально подобранном квантованном лагранжевом многообразии с мерой.

Квантованность многообразия является его важнейшей характеристикой, и поэтому представляет интерес задача о нахождении достаточно простых критериев квантованности.

В вещественной ситуации, как следует из работ [1], [3], условия квантования носят, по существу, топологический характер и не зависят от меры на многообразии. Действительно, В.И.Арнольд [1], [7] вычислил характеристический класс универсальной модели (лагранжева грассманиана) и, таким образом, полностью решил вопрос о топологической инвариантности условий квантования и указал универсальный источник препятствия к построению инвариантной теории канонического оператора.

Метод получения асимптотических решений уравнений с комплексным гамильтонианом был предложен первоначально В.П. Масловым [4, 5]. Идеи Маслова в комплексной теории получили свое дальнейшее развитие в работах [2], [6], [8]. В частности, в книге [8] была предложена конструкция комплексного канонического оператора Маслова, опирающаяся на аппарат так называемых комплексных S -аналитических лагранжевых многообразий (см. ниже). Детальное исследование топологии комплексных лагранжевых много - образий, проведенное в этой книге, позволило не только найти соответствующий характеристический класс, но и обнаружить, что в комплексной ситуации условия квантования зависят как от самого многообразия, так и от меры, определенной на нем. Отсюда следует, что в комплексном случае следует говорить о квантованности пары (M, μ) - многообразие, мера,- и, таким образом, в комплексной квазиклассической теории условия квантования являются характеристикой не только классического объекта - многообразия Лагранжа, но также и квазиклассического - инвариантного объема (якобиана).

Как уже было замечено, вычисление характеристического класса пары (M, μ) в книге [8] опиралось на использование универсальной модели и, следовательно, потребовало привлечения таких довольно тонких понятий в S-аналитической теории, как касательное расслоение, классифицирующее отображение и т.п. Отметим в связи с этим, что детальное исследование топологии комплексного лагранжева грассманиана было проведено А.С.Мищенко [8].

В действительности, однако, имеется прямой способ вычисления класса когомологий, тривиальность которого гарантирует выполнение условий квантования, и цель данной статьи состоит в вычислении такого класса. Кроме того, здесь же мы выясняем связь (комплексного) индекса Маслова с индексом некоторого эллиптического оператора, определенного на замкнутых кривых лагранжева многообразия, а также выясняем, почему в вещественной ситуации условия квантования не зависят от меры.

2°. Сформулируем основные положения комплексной теории канонического оператора Маслова [8].

Определение 1. Назовем S-аналитическим гладкое многообразие M, $\dim R$ вместе с таким атласом $\{U_j, \alpha_j\}, \alpha_j : U_j \to \mathbb{C}^n$, что в $U_i \cap U_j$

$$\partial\alpha_i / \partial\alpha_j = 0 \quad (\mathrm{mod}\, {}^sI(M, \rho_M)).$$

Здесь ρ_M (весовая функция) - неотрицательная функция на M, $\rho_M^2 \in C^\infty(M)$, ${}^sI(M, \rho_M)$ - множество функций, для которых $|D^\gamma f| \leq c\rho^{s-|\gamma|}$, и все рассмотрения проводятся в некоторой окрестности множества

$$\Omega = \{\alpha \in M \mid \rho(\alpha) = 0\}.$$

Вводятся понятия S-аналитических функций, вложений, форм и векторных полей на M (см. [8]).

Пусть $\Phi = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}_n$ - $2n$-мерное S-аналитическое гамильтоново (симплектическое) пространство с координатами $(z^1, \ldots, z^n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (z, \zeta)$, весовой функцией $\rho_\Phi = \{|Im z|^2 + |Im \zeta|^2\}^{1/2}$ и структурной формой

$$dz \wedge d\zeta = dz^1 \wedge d\zeta_1 + \ldots + dz^n \wedge d\zeta_n.$$

Определение 2. Считаем $S+1$-аналитическое вложение $i : (M, \rho_M) \to (\Phi, \rho_\Phi)$ лагранжевым, если $i^*(dz \wedge d\zeta) = 0 \;(\mathrm{mod}\, {}^sI(M, \rho_M))$.

На $S+1$-аналитическом лагранжевом многообразии существует атлас $\{U_I\}$-канонических карт с координатами

$$(z^I, \zeta_{\bar I}) = (z^{i_1},\dots,z^{i_k}, \zeta_{i_{k+1}},\dots,\zeta_{i_n}), \{i_1,\dots,i_k\}\in I,$$
$$\{i_{k+1},\dots,i_n\}\in \bar I, \ I\cap \bar I = \varnothing, \ I\cup\bar I = \{1,2,\dots,n\}.$$

Определение 3. Назовем $S+1$ -аналитическое лагранжево многообразие с $S+1$ -аналитической невырожденной мерой μ правильным квантованным, если

А. Существует такая $S+1$ -аналитическая коцепь $\{S_I\}$ и вещественная коцепь $\{\arg m_I\}$ канонического покрытия $\{U_I\}$, что

1) $dS_I \equiv i^* (\zeta_I dz^I - z^I d\zeta_{\bar I})(\mathrm{mod}\, {}^sI(M,\rho_M))$ в U_I,

$S_J - S_I \equiv i^*(z^{I_3}\zeta_{I_3} - z^{I_2}\zeta_{I_2})(\mathrm{mod}\, {}^sI(M,\rho_M))$ в $U_I\cap V_J$;

2) $\arg m_I$ - одно из значений аргумента функций $m_I = \dfrac{\partial\mu}{\partial(z^I,\zeta_{\bar I})}$

и

$$\arg\mu_I - \arg\mu_J = \sum \arg\lambda_k + |I_2|\pi. \tag{2}$$

Здесь $I_2 = I\setminus\{I\cap J\}$, $I_3 = J\setminus\{I\cap J\}$, λ_k - собственные значения матрицы

$$Hess_{z^{I_2},\zeta_{I_3}}(-S_I(\alpha)),\ \alpha\in\Omega,$$
$$-\tfrac{3}{2}\pi < \arg\lambda_k \le \tfrac{\pi}{2}.$$

Б. В каждой канонической карте U_I имеют место неравенства:

$$C_1\rho^2(x^I,p_{\bar I}) \le \mathrm{Im}\, S_I(x^I,p_{\bar I}) \le C_2\rho^2(x^I,p_{\bar I});\ C_1, C_2 > 0.$$

Можно показать, что условия А, Б не зависят от выбора канонического атласа карт.

§ 1. Стандартная мера на комплексном многообразии Лагранжа

1°. Невырожденность стандартной меры. Пусть $i: (M,\rho_M)\hookrightarrow(\Phi,\rho_\Phi)$ - лагранжево $S+1$ -аналитическое вложение. Рассмотрим на вложении i меру

$$\sigma = d(i^*z^1 - i^*\zeta_1)\wedge\dots\wedge d(i^*z^n - i^*\zeta_n). \tag{1.1}$$

Для сокращения записи в (1.1) значки i^*, $\wedge$ мы будем опускать и писать просто $\sigma = d(z - i\zeta)$.

Лемма 1.1. σ - S -аналитическая невырожденная мера.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что утверждение леммы 1.1 достаточно проверить в каждой канонической карте.

Пусть U_I - произвольная карта с координатами $(z^I, \zeta_{\bar I})$. Плотность σ_I меры σ в карте U_I есть функция

$$\sigma_I = \det \frac{\partial(z - i\xi)}{\partial(z^I, \xi_{\bar I})} = \det \begin{pmatrix} E - i\dfrac{\partial \xi_I}{\partial z^I} & -i\dfrac{\partial \xi_I}{\partial \xi_{\bar I}} \\ \dfrac{\partial z^{\bar I}}{\partial z^I} & \dfrac{\partial z^{\bar I}}{\partial \xi_{\bar I}} - iE \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

и, следовательно, S -аналитична.

Докажем невырожденность меры σ. Функция (1.2) является детерминантом матрицы

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - iC_1 & -iC_2 \\ -iC_3 & E - iC_4 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где
$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_I}{\partial z^I} & \dfrac{\partial \xi_I}{\partial \xi_{\bar I}} \\ -\dfrac{\partial z^{\bar I}}{\partial z^I} & -\dfrac{\partial z^{\bar I}}{\partial \xi_{\bar I}} \end{pmatrix}.$$

В силу правильности многообразия (M, ρ_M)

$$\operatorname{Im} \operatorname{Hess}_{z^I, \xi_{\bar I}} S(\alpha) \geq 0, \quad \alpha \in \Omega,$$

и, следовательно, на множестве Ω для любого собственного значения μ матрицы

$$\begin{pmatrix} E - iC_1 & -iC_2 \\ -iC_3 & E - iC_4 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

справедливо неравенство $\operatorname{Re}\mu \geq 1$. Последнее неравенство влечет невырожденность матрицы (1.3). Лемма 1.1. доказана.

2°. Основная теорема 1.1. <u>Правильное лагранжево $S+1$ -аналитическое вложение с мерой σ квантовано.</u>

Доказательство. Используя представление (1.3), определим $\arg \sigma_I$ в канонической карте U_I, полагая

1) $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$;

2) $-\frac{3}{2}\pi < \arg \mu_k \leq \frac{\pi}{2}$, $k = 1, \dots, n$,

где $\mu_1, \dots, \mu_n$ - собственные значения матрицы (1.4)

3) $$\arg \sigma_I = |\bar I| \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \arg \mu_k, \tag{1.5}$$

где $|\bar{I}|$ - число элементов множества $\bar{I}$.

Требуется показать, что на множестве Ω выполнено соотношение

$$\arg \sigma_I - \arg \sigma_J = \sum \arg \lambda_k + |I_2|\pi, \tag{1.6}$$

где $\{\lambda_k\}$ - собственные значения матрицы,

$$\frac{\partial(-\xi_{I_2}, z^{I_3})}{\partial(z^{I_2}, \xi_{I_3})}(\alpha), \quad \alpha \in \Omega,$$

и

$$-\frac{3}{2}\pi \leq \arg \lambda_k \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1.7}$$

Изложим основную идею доказательства.

1) Из соотношения

$$\sigma_I = \sigma_J \det \frac{\partial(z^J, \xi_{\bar{J}})}{\partial(z^I, \xi_{\bar{I}})} \tag{1.8}$$

следует, что равенство (1.6) имеет место по $mod\, 2\pi$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что аргументы левой и правой частей равенства лежат, как комплексные числа, в одном и том же интервале и принадлежат одной и той же ветви. Это утверждение может быть проверено прямым подсчетом для скалярного случая и для случая, когда соответствующие матрицы диагональны. Естественно, поэтому используя гомотопическую технику, постараться привести эти матрицы к диагональному виду (с сохранением значений аргументов). Приступим к выполнению изложенной программы.

Если I_1, I_2, I_3, I_4 - множества, о которых шла речь во введении, то матрица $\hat{\sigma}_I$ имеет вид:

$$\hat{\sigma}_I = \begin{pmatrix} E - i\dfrac{\partial \xi_{I_1}}{\partial z^{I_1}} & -i\dfrac{\partial \xi_{I_1}}{\partial z^{I_2}} & -i\dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_{I_3}} & -i\dfrac{\partial \xi_{I_1}}{\partial \xi_{I_4}} \\ -i\dfrac{\partial \xi_{I_2}}{\partial z^{I_1}} & E - i\dfrac{\partial \xi_{I_2}}{\partial z^{I_2}} & -i\dfrac{\partial \xi_{I_2}}{\partial \xi_{I_3}} & -i\dfrac{\partial \xi_{I_2}}{\partial \xi_{I_4}} \\ \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial z^{I_1}} & \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial z^{I_2}} & \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial \xi_{I_3}} - iF & \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial \xi_{I_4}} \\ \dfrac{\partial z^{I_4}}{\partial z^{I_1}} & \dfrac{\partial z^{I_4}}{\partial z^{I_2}} & \dfrac{\partial z^{I_4}}{\partial \xi_{I_3}} & \dfrac{\partial z^{I_4}}{\partial \xi_{I_4}} - iE \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

или

$$\hat{\sigma}_I = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-iC_{11} & -iC_{12} & -iC_{13} & -iC_{14} \\ -iC_{21} & E-iC_{22} & -iC_{23} & -iC_{24} \\ -iC_{31} & -iC_{32} & E-iC_{33} & -iC_{34} \\ -iC_{41} & -iC_{42} & -iC_{43} & E-iC_{44} \end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

где элементы в (1.10) определяются из равенства матриц (1.5) и (1.10).

Матрица $\dfrac{\partial(z^J, \zeta_{\bar{J}})}{\partial(z^I, \zeta_{\bar{I}})}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial \zeta_{I_2}}{\partial z^{I_1}} & \dfrac{\partial \zeta_{I_2}}{\partial z^{I_2}} & \dfrac{\partial \zeta_{I_2}}{\partial z^{I_3}} & \dfrac{\partial \zeta_{I_2}}{\partial z^{I_4}} \\ \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial z^{I_1}} & \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial z^{I_2}} & \dfrac{\partial z^{\bar{I}_3}}{\partial \zeta_{\bar{I}_3}} & \dfrac{\partial z^{I_3}}{\partial \zeta_{I_4}} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

или, с использованием обозначений C_{ij},

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} & -C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Из (1.8) и обратимости матрицы $\dfrac{\partial(z^J, \zeta_{\bar{J}})}{\partial(z^I, \zeta_{\bar{I}})}$ (в $U_I \cap V_J$) следует, что имеет место равенство

$$\hat{\sigma}_I \cdot \left(\frac{\partial(z^J, \zeta_{\bar{J}})}{\partial(z^I, \zeta_{\bar{I}})}\right)^{-1} = \hat{\sigma}_J,$$

или, в обозначениях C_{ij},

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-iC_{11} & -iC_{12} & -iC_{13} & -iC_{14} \\ -iC_{21} & E-iC_{22} & -iC_{23} & -iC_{24} \\ -iC_{31} & -iC_{32} & E-iC_{33} & -iC_{34} \\ -iC_{41} & -iC_{42} & -iC_{43} & E-iC_{44} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -C_{21} & -C_{22} & -C_{23} & -C_{24} \\ -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} & -C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{-1} =$$

$$
=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E-iC'_{11} & -iC'_{12} & -iC'_{13} & -iC'_{14} \\ -iC'_{21} & E-iC'_{22} & -iC'_{23} & -iC'_{24} \\ -iC'_{31} & -iC'_{32} & E-iC'_{33} & -iC'_{34} \\ -iC'_{41} & -iC'_{42} & -iC'_{43} & E-iC'_{44} \end{pmatrix}^{*)} . \tag{1.11}
$$

Построим гомотопию $1 \geq t \geq 0$ левой части последнего равенства

$$
\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iE & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E-iC_{11} & -itC_{12} & -itC_{13} & -itC_{14} \\ -itC_{21} & E-iC_{22} & -itC_{23} & -itC_{24} \\ -itC_{31} & -itC_{32} & E-iC_{33} & -itC_{34} \\ -itC_{41} & -itC_{42} & -itC_{43} & E-iC_{44} \end{pmatrix} \times
$$

$$
\times \left\{\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -tC_{21} & -C_{22} & -tC_{23} & -tC_{24} \\ -tC_{31} & -tC_{32} & -C_{33} & -tC_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}\right\}^{-1} . \tag{1.12}
$$

Отметим, что гомотопия (1.12) проводится в нужном классе. Действительно, матрица

$$
C_t = \begin{pmatrix} C_{11} & tC_{12} & tC_{13} & tC_{14} \\ tC_{21} & C_{22} & tC_{23} & tC_{24} \\ tC_{31} & tC_{32} & C_{33} & tC_{34} \\ tC_{41} & tC_{42} & tC_{43} & C_{44} \end{pmatrix}
$$

допускает представление

$$
C_t = tC + (1-t)\,diag\,(C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}).
$$

Поскольку

$$
\operatorname{Im} C \geq 0 , \tag{1.13}
$$

то и $\operatorname{Im} diag\,(C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}) \geq 0$. Отсюда, в силу выпуклости условия $\operatorname{Im} C \geq 0$, получаем, что $\operatorname{Im} C_t \geq 0$. Аналогично доказывается, что

$$
\operatorname{Im} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -tC_{21} & C_{22} & -tC_{23} & -tC_{24} \\ -tC_{31} & -tC_{32} & C_{33} & -tC_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \geq 0 .
$$

---

*) Здесь C'_{ij} определяются в системе координат $(z^J, \zeta_{\bar J})$ так же, как C_{ij} в системе координат $(z^I, \zeta_{\bar I})$.

Гомотопию правой части мы построим, перемножая матрицы (1.12) и вынося левым множителем матрицу

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix}.$$

При этом гомотопия правой части будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iE & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-i\left(C'_{11}+tQ_{11}\right) & -itQ_{12} & -itQ_{13} & -itQ_{14} \\ -itQ_{21} & E-i\left(C'_{22}+tQ_{22}\right) & -itQ_{23} & -itQ_{24} \\ -itQ_{31} & -itQ_{32} & E-i\left(C'_{33}+tQ_{33}\right) & -itQ_{34} \\ -itQ_{41} & -itQ_{42} & -itQ_{43} & E-i\left(C'_{44}+tQ_{44}\right) \end{pmatrix},$$

где Q_{ij} , $i,j = 1,2,3,4,$ – некоторые матрицы.

Используя лемму 2.25 из книги [8, ч. 1] , получаем, что мнимая часть матрицы

$$\begin{pmatrix} C'_{11}+tQ_{11} & -itQ_{12} & -itQ_{13} & -itQ_{14} \\ -itQ_{21} & C'_{22}+tQ_{22} & -itQ_{23} & -itQ_{24} \\ -itQ_{31} & -itQ_{32} & C'_{33}+tQ_{33} & -itQ_{34} \\ -itQ_{41} & -itQ_{42} & -itQ_{43} & C'_{44}+tQ_{44} \end{pmatrix}$$

неотрицательна. Полагая теперь $t=0$, получаем равенство

$$\begin{pmatrix} E & & & 0 \\ & E & & \\ & & -iE & \\ 0 & & & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-iC_{11} & & & 0 \\ & E-iC_{22} & & \\ & & E-iC_{33} & \\ 0 & & & E-iC_{44} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \left[\begin{pmatrix} E & & & 0 \\ & -E & & \\ & & E & \\ 0 & & & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & & & 0 \\ & -C_{22} & & \\ & & -C_{33} & \\ 0 & & & E \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & & & 0 \\ & -iE & & \\ & & E & \\ 0 & & & -iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-iC'_{11} & & & 0 \\ & E-iC'_{22} & & \\ & & E-iC'_{33} & \\ 0 & & & E-iC'_{44} \end{pmatrix}. \qquad (1.14)$$

Малым изменением матриц [*] C_{ii}, $i=1,2,3,4$, можно добиться того, чтобы их собственные значения были некратны. При этом существуют преобразования A_{ii}, $i=1,2,3,4$, приводящие матрицы C_{ii} к диагональному виду. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & A_{33} & \\ 0 & & & A_{44} \end{pmatrix}$$

приводит к диагональному виду одновременно все матрицы, входящие в равенство (3.9). В итоге получаем следующее равенство:

$$diag\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{I_1},\ \underbrace{-1,\ldots,-1}_{I_2},\ \underbrace{-i,\ldots,-i}_{I_3},\ \underbrace{-i,\ldots,-i}_{I_4})\times$$

$$\times\, diag\,(\mu_1,\ldots,\mu_n)\cdot diag\,\{1,\ldots,1,\ \lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_s^{-1},\ \lambda_{s+1}^{-1},\ldots,\lambda_k^{-1},\ 1,\ldots,1\}=$$

$$=diag\,(1,\ldots,1,-i,\ldots,-i,\ 1,\ldots,1,-i,\ldots,-i)\times diag\,(\mu_1',\ldots,\mu_n').$$

Запишем полученные соотношения в виде:

а) Блок I_2 : $\lambda_k=(-1)\mu_k\,(-i)^{-1}(\mu_k')^{-1}$, $k\in I_2$.

б) Блок $\lambda_k=-i\mu_k\,(\mu_k')^{-1}$.

Докажем теперь, что $\arg\lambda_k$, определенный соотношением

$$\arg\lambda_k=-\pi+\arg\mu_k-\arg(-i)-\arg\mu_k', \tag{1.15}$$

лежит в нужных пределах. Имеем:

$$\begin{gathered} -\frac{\pi}{2}\le\arg\mu_k\le+\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}\le-\arg\mu_k'\le+\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}=-\arg(-i)=+\frac{\pi}{2},\\ -\pi=-\pi=-\pi. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Складывая теперь почленно неравенства (1.16), получаем

$$-\frac{3}{2}\pi\le\arg\lambda_k\le\frac{\pi}{2},$$

---

[*] При этом матрицы C_{22} и C_{33} надо изменить так, чтобы мнимые части их собственных значений остались неотрицательными.

что совпадает с соотношением (1.7). Аналогично проверяется блок I_3. Проверка для блоков I_1, I_4 тривиальна.

Суммируя теперь соотношения:

$$\arg \mu_k - \arg \mu_k' = 0, \quad k \in I_1;$$
$$\arg \mu_k - \arg \mu_k' - \arg(-i) = \arg \lambda_k + \pi, \; k \in I_2;$$
$$\arg \mu_k - \arg \mu_k' + \arg(-i) = \arg \lambda_k, \quad k \in I_3;$$
$$\arg \mu_k - \arg(-i) - \arg \mu_k' - \arg(-i) = 0, \; k \in I_4,$$

получаем

$$\Big(\sum_{k\in[n]} \arg \mu_k + |I| \arg(-i)\Big) - \Big(\sum_{k\in[n]} \arg \mu_k' + |J| \arg(-i)\Big) = \sum_{k\in|I_2+I_3|} \arg \lambda_k + |I_2|\pi.$$

Согласно (1.5) последнее равенство означает

$$\arg \sigma_I - \arg \sigma_J = \sum_{k\in|I_2+I_3|} \arg \lambda_k + |I_2|\pi.$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. Обобщения, замечания, следствия

1°. Условие квантования для произвольной меры.

Теорема 2.1. <u>Правильное лагранжево многообразие с невырожденной $\mathfrak{s}$-аналитической мерой μ квантовано, если и только если отображение</u>

$$f = \frac{\mu}{\sigma} : \; M \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} \tag{2.1}$$

<u>гомотопно постоянному.</u>

Доказательство. Условие (2) для меры μ выполнено в том и только в том случае, когда функция f распадается на однозначные функции, т.е. когда отображение (2.1) гомотопно постоянному. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.2. <u>Условие квантованности пары не зависит от выбора канонического атласа.</u>

2°. Формулировки условия квантования в когомологических терминах. Функция f, определенная формулой (2.1), определяет одномерный класс когомологий де Рама

$$\frac{1}{2\pi i} d \ln \frac{f}{|f|} \in H^1(M, \mathbb{Z}). \tag{2.2}$$

Теорема 2.1 может быть переформулирована следующим образом.

Т е о р е м а 2.1'. Правильное лагранжево многообразие с мерой квантовано тогда и только тогда, когда класс (2.2) когомологичен нулю.

Это условие может быть сформулировано также в терминах когомологий Чеха. Определим для этого 1-коцепь канонического покрытия $\{U_I\}$, полагая в $U_I \cap V_J$:

$$c_{IJ} = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \mu_I - \arg \mu_J - \sum \arg \lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi\right]. \tag{2.3}$$

Здесь $\arg \mu_I$ - некоторое значение (многозначной) функции $\operatorname{Arg} \mu_I$.

Т е о р е м а 2.1''. Справедливы следующие утверждения: 1) коцепь $\{c_{IJ}\}$ целочисленна; 2) коцепь $\{c_{IJ}\}$ - коцикл; 3) условия (2) выполнены, если и только если коцикл $\{c_{IJ}\}$ когомологичен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Из определения функции μ_I следует, что в пересечении $U_I \cap U_J$ справедливо равенство

$$\mu_I = \mu_J \det \frac{\partial(-\xi_{I_2}, z^{I_3})}{\partial(z^{I_2}, \xi_{I_3})}(-1)^{|I_2|} = \mu_J \prod_{k=1}^{|I_2+I_3|} \lambda_{k,IJ}(-1)^{|I_2|},$$

из которого следует, что аргументы левой и правой частей совпадают с точностью до 2π, т.е.

$$\arg \mu_I - \arg \mu_J - \sum_k \arg \lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Последнее сравнение и доказывает утверждение 1).

2) Достаточно доказать, что коцепь $\{c_{IJ}\}$ является коциклом в пространстве $C^1(M, \mathbb{R}(M))$ - I-коцепей с коэффициентами в пучке ростков вещественнозначных функций, т.е. что $\{c_{IJ}\} \in H^1(M, \mathbb{R}(M))$. Последнее утверждение очевидно, поскольку $\arg \mu_I - \arg \mu_J$ есть кограница в $C^1(M, \mathbb{R}(M))$ и

$$\sum \arg \lambda_{k,IJ} + |I_2|\pi = \arg \sigma_I - \arg \sigma_J$$

есть также кограница. Отсюда вытекает, что коцепь $\{c_{IJ}\}$ есть кограница в $C^1(M, \mathbb{R}(M))$, а следовательно, есть коцикл: $\{c_{IJ}\} \in H^1(M, \mathbb{R}(M))$, и поскольку $\{c_{IJ}\}$ - целочисленная коцепь, то $\{c_{IJ}\}$ - целочисленный коцикл.

3) Действительно, докажем вначале необходимость. Пусть коцикл $\{c_{IJ}\} \in H^1(M, \mathbb{Z})$ когомологичен нулю. В этом случае существуют такие целые числа $\{n_I\}$, $n_J \in \mathbb{Z}$, что

$$c_{IJ} = n_J - n_I. \tag{2.4}$$

Для доказательства условия (2) мы выберем в карте U_I аргумент $\arg \mu_I$, полагая $\arg\mu_I = \arg\mu_I - n_I 2\pi$. Прямая проверка убеждает нас, что при таком выборе аргументов условие (2) выполнено:

$$\arg\mu_I - \arg\mu_J - \sum\arg\lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi =$$
$$= \arg\mu_I + n_I 2\pi - \arg\mu_J - n_J 2\pi - \sum\arg\lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi =$$
$$= (\text{в силу } (2.3))\ 2\pi(C_{IJ} + n_I - n_J) = (\text{в силу } (2.4)) = 0.$$

Обратно, пусть выполнено условие (2). Это означает, что существуют такие функции $\arg\mu_I$, что в пересечении $U_I \cap U_J$ выполнено равенство

$$\arg\mu_I - \arg\mu_J - \sum\arg\lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi = 0. \tag{2.5}$$

Покажем, что существуют такие целые числа $\{n_I\} \in \mathbb{Z}$, что выполнено равенство (2.4). Определим числа $\{n_I\}$, полагая

$$n_I = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\mu_I - \arg\mu_I\right]. \tag{2.6}$$

Очевидно, $n_I \in \mathbb{Z}$. Далее,

$$C_{IJ} = (\text{в силу}(2.3)) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\mu_I - \arg\mu_J - \sum\arg\lambda_{k,IJ} - \right.$$
$$\left. - |I_2|\pi\right] = (\text{в силу } (2.6)) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\mu_I - n_I 2\pi - \arg\mu_J + \right.$$
$$\left. + n_J 2\pi - \sum\arg\lambda_{k,IJ} - |I_2|\pi\right] = (\text{в силу } (2.5)) = n_J - n_I.$$

Теорема доказана.

Определим теперь индекс ind Маслова цикла $\gamma \in H_1(M)$, полагая

$$ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\ln\frac{f}{|f|} = \operatorname{Var}\arg\frac{f}{|f|}. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что операция ind определяет отображение

$$ind : \pi_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

и теорема 2.1 может быть теперь переформулирована следующим образом.

Правильное S-аналитическое лагранжево многообразие квантовано, если и только если индекс Маслова для любой образующей фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия равен нулю или, что то же, отображение (2.8) тривиально.

3°. В е щ е с т в е н н ы й с л у ч а й. Вещественные лагранжевы вложения [3], [7] являются частным случаем комплексных. Действительно, если задано вещественное лагранжево вложение $M_{\mathbb{R}} \subset \Phi_{\mathbb{R}}$ с вещественной мерой $\mu_{\mathbb{R}}$, то соответствующее комплексное вложение $(M, \rho_M) \hookrightarrow (\Phi, \rho_\Phi)$ мы построим следующим образом:

1) Множеством Ω будем считать многообразие $M_{\mathbb{R}}$.

2) S-аналитическое лагранжево многообразие M мы построим как

" S -аналитическое продолжение" многообразия $M_{\mathbb{R}}$. Именно, пусть (U_k, a_k) - атлас на многообразии $M_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{U}'_k$ - такое открытое покрытие, что $\bar{U}_k \subset U_k$. Рассмотрим многообразия $V_k = U_k \times \mathbb{R}^n$. Координаты в многообразии V_k будем обозначать $(a_k, b_k) = (a_k^1, \dots, a_k^n, b_k^1, \dots, b_k^n)$.
Пусть $U_{kj} = U_k \cap U_j$, $U'_{kj} = U'_k \cap U'_j$; φ_{kj} - функции перехода от координат a_k к координатам a_j: $a_j = \varphi_{kj}(a_k)$ на U_{kj}. Пусть $V_{kj} = U_{kj} \times \mathbb{R}^n \subset V_k$, $V_{kj} - U_{kj} \times \mathbb{R}^n$. Формула

$$a_j + ib_j = {}^s\varphi_{kj}(a_k + ib_k) = \sum_{\ell=0}^{s} \frac{1}{k!}\left(ib_k \frac{\partial}{\partial a^k}\right)^{\ell} \varphi_{kj}(a)$$

определяет отображение [*] $\tilde{\varphi}_{kj}: V_{kj} \to V_{jk}$, которое обладает следующими свойствами:

1) $\tilde{\varphi}_{kj}\big|_{b_k=0} = \varphi_{kj}$;

2) $\tilde{\varphi}_{kj}$ S - аналитичны относительно весовой функции $\rho_k = \sqrt{(b_k)^2}$;

3) $\tilde{\varphi}_{kk} = id_{V_{k,k}}$, $\tilde{\varphi}_{kj} \circ \tilde{\varphi}_{j\ell} = \tilde{\varphi}_{k\ell} \pmod{{}^s I(V_{kj\ell}, \rho_k)}$,

где $V_{kj\ell} = (U_k \cap U_j \cap U_\ell) \times \mathbb{R}^n$.

Покажем, что существуют функции $\bar{\varphi}_{kj}: V'_{kj} \to V'_{jk}$, отличающиеся от $\tilde{\varphi}_{kj}$ на элемент из идеала ${}^s I(V_{kj}, \rho_k)$ и удовлетворяющие условиям 1)-3), причем условие 3) для $\bar{\varphi}_{kj}$ выполнено точно. Доказательство будет проведено аналогично доказательству леммы 1.4.4. книги [8]. Проведем индукцию по $\tau = \min(k, j)$. Определим сначала $\bar{\varphi}_{1j} = \tilde{\varphi}_{1j}$; $\bar{\varphi}_{j,1} = \varphi_{1,j}^{-1}$. Условия 1) - 3) при этом выполнены тривиально. Пусть теперь определены $\bar{\varphi}_{kj}$ для всех $\min(k, j < \tau)$. Рассмотрим множество $V_{\tau+1,j}$ для некоторого j и обозначим через $V_{\tau+1,j,m}$ подмножество

$$V_{\tau+1,j\cdot m} = (U_{\tau+1} \cap U_j \cap U_m) \times \mathbb{R}^n \subset V_{\tau+1\cdot j}.$$

Мы можем считать при этом $j > \tau+1$, $m \leq \tau$. Тогда равенство $\bar{\varphi}_{m,\tau+1} \circ \bar{\varphi}_{\tau+1,j} = \varphi_{m,j}$ определяет функцию $\bar{\varphi}_{\tau+1,j}$ на множестве $V_{\tau+1,j,m}$ формулой

$$\bar{\varphi}_{\tau+1,j} = \bar{\varphi}_{m,\tau+1}^{-1} \circ \bar{\varphi}_{m,j} = \bar{\varphi}_{\tau+1,m} \circ \bar{\varphi}_{m,j}.$$

Заметим, что последнее определение согласовано относительно выбора m, так как

$$\bar{\varphi}_{m,\tau+1}^{-1} \circ \bar{\varphi}_{m,j} = (\bar{\varphi}_{m,m'} \circ \bar{\varphi}_{m',\tau+1})^{-1} \circ \bar{\varphi}_{m,j} =$$

---

[*] Строго говоря, образ отображения $\tilde{\varphi}_{kj}$ может быть шире множества V_{jk}. Поэтому нужно рассматривать отображения $\tilde{\varphi}_{kj}$ на некоторой области $\tilde{V}_{jk} \Subset V_{jk}$. При этом $\tilde{V}_{jk} \subset \{(x,y): x \in U_{jk}, |y| < \delta\}$. Для того чтобы не загромождать изложения, мы всюду ниже будем считать $\tilde{V}_{jk} = V_{jk}$.

$$= \overline{\varphi}^{-1}_{m', r+1} \circ \overline{\varphi}_{m', m} \circ \overline{\varphi}_{m, j} = \overline{\varphi}^{-1}_{m', r+1} \circ \overline{\varphi}_{m', j}$$

в силу предположения индукции. Таким образом, функция $\overline{\varphi}_{r+1, j}$ определена на объединении всех $V_{r+1, j, m}$. Согласно лемме 1.2.7 книги [8] можно продолжить эту функцию на все $V_{r+1, j}$, сохранив ее значения на $V'_{r+1, j, m}$. Эту функцию мы и обозначим через $\overline{\varphi}_{r+1, j}$.

Аналогично определяются функции $\overline{\varphi}_{j, r+1}$ для $j > r+1$. Требуемое утверждение доказано.

Рассмотрим теперь (несвязное) объединение множеств V_k и введем на нем отношение $\sim$, полагая $\alpha \sim \beta$, $\alpha \in V_k$, $\beta \in V_j$, если и только если $\overline{\varphi}_{kj}(\alpha) = \beta$. В силу свойств $\overline{\varphi}_{kj}$ определенное отношение есть отношение эквивалентности. Фактор по этому отношению и есть M. Все требуемые утверждения проверяются теперь тривиально. Весовая функция ρ вводится на M равенством

$$\rho^2 = \sum_k \ell_k (a_k) (b_k)^2,$$

где $\{\ell_k\}$ - разбиение единицы, подчиненное покрытию U_k.

Пусть теперь $i : M_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \Phi_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}_n$ - лагранжево вложение. Тогда существует лагранжево S-аналитическое вложение $\overline{i} : M \subset \Phi = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}_n$, совпадающее с i на $M_{\mathbb{R}}$.

Действительно, пусть (U_k, a_k) определены, как и ранее, функции $\alpha(a_k), \beta(a_k)$ реализуют вложение i. Тогда $\overline{i}$ задается формулами

$$z = \sum_k {}^s\ell_k \cdot {}^s\alpha, \quad \zeta = \sum_k {}^s\ell_k \cdot {}^s\beta,$$

где ℓ_k - разбиение единицы, подчиненное U_k. Нетрудно видеть, что написанные формулы определяют S-аналитическое вложение многообразия M в пространство Φ, в частности, $i^*\rho_\Phi \leq C\rho_M$.

3) Мера μ определяется с помощью S-аналитического продолжения [8] меры $\mu_{\mathbb{R}} : \mu = {}^s\mu_{\mathbb{R}}$.

Т е о р е м а 2.2. <u>Условия квантования вещественного лагранжева вложения не зависят от меры.</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для некоторой вещественной меры $\mu_{\mathbb{R}}$ на вложении $M_{\mathbb{R}} \subset \Phi_{\mathbb{R}}$ отображение

$$f = \frac{{}^s\mu_{\mathbb{R}}}{\sigma} : M \to \mathbb{C}^*$$

гомотопно постоянному. Тогда если $\mu'_{\mathbb{R}}$ - другая вещественная мера, то $\mu'_{\mathbb{R}} = g\mu_{\mathbb{R}}$ и, следовательно,

$${}^s\mu'_{\mathbb{R}} = {}^sg \, {}^s\mu_{\mathbb{R}},$$

где g - не обращающаяся в нуль (для определенности положительная) функция на $M_{\mathbb{R}}$. В этом случае отображение

$$\frac{{}^s\mu'_{\mathbb{R}}}{\sigma} = \frac{{}^s\mu_{\mathbb{R}}}{\sigma} \cdot {}^s g : M \to \mathbb{C}^*$$

гомотопно постоянному в силу стягиваемости открытой полуоси.*)

4°. Индекс Маслова как индекс эллиптического оператора. Рассмотрим на правильном S-аналитическом лагранжевом многообразии (M, ρ) с мерой μ произвольный замкнутый цикл γ и определим следующий сингулярный интегральный оператор

$$S_\gamma \varphi(t) = (\sigma+\mu)\varphi(t) + \frac{\sigma-\mu}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \qquad (2.9)$$

действующий из пространства $L_2(\gamma, \mathbb{C})$ в пространство $L_2(\gamma, \Lambda^n(\gamma))$, где $\Lambda^n(\gamma)$ - расслоение объемов на кривой γ. Этот оператор имеет символ $(\sigma+\mu)+(\sigma-\mu)\,\mathrm{sgn}\,\xi$, $\xi \in T^*(\gamma)$ и, в силу невырожденности мер, эллиптичен. Поэтому оператор (2.9) имеет конечный индекс $\mathrm{ind}\, S_\gamma$ (см., например, [9]) и справедлива следующая

Теорема 2.3. $\mathrm{ind}\, S_\gamma = \mathrm{ind}\, \gamma$.

Доказательство. В силу формулы Нётера-Мусхелишвили [9] $\mathrm{ind}\, S_\gamma = \mathrm{Var}\arg \frac{\mu}{\sigma}$, что по (2.7) совпадает с индексом Маслова цикла γ.

Далее, в силу гомотопической устойчивости индекса эллиптического оператора $\mathrm{ind}\, S_\gamma$ определяет отображение

$$\mathrm{ind}\, S : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}, \qquad (2.10)$$

и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4. Отображения (2.8) и (2.10) совпадают. Отсюда, в частности, следует, что правильное S-аналитическое многообразие квантовано, если и только если индекс эллиптического оператора (2.9) на любой образующей фундаментальной группы равен нулю или, что то же, отображение (2.10) тривиально.

Пользуюсь случаем выразить свою глубокую признательность А. С. Мищенко и В. Е. Шаталову за ценное обсуждение настоящей работы.

---

*) В этом случае отображения f, g достаточно рассматривать на $M_{\mathbb{R}}$, поскольку $M_{\mathbb{R}} = \Omega(M, \rho_M)$ - многообразие и $M_{\mathbb{R}}$ является ретрактом многообразия M.

Литература

1. Арнольд В.И. О характеристическом классе, входящем в условие квантования, - "Функциональный анализ", 1967, т. 1, вып. 1, 1-14.
2. Кучеренко В.В. Асимптотические решения уравнений с комплексными характеристиками. - "Матем. сб.", 1974. т. 95, вып. 2,
3. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд-во МГУ, 1965.
4. Маслов В.П. Канонический оператор на лагранжевом многообразии с комплексным ростком и регуляризатор для псевдодифференциальных операторов и разностных схем. -"Докл. АН СССР", 1970, т. 195, № 3, 551-554.
5. **Maslov V. The characteristics of pseudo-differential operators and differences schemes, Congres intern. Math., 1970, 2.**
6. Маслов В.П. Операторные методы, М., "Наука", 1973.
7. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю. Метод канонического оператора в прикладной математике. Изд-во МИЭМ, 1974.
8. Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. Канонический оператор Маслова, Комплексная теория. Изд-во МИЭМ, 1974.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.