УДК 517.948

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Р. П о р т н о в (Новосибирск)

В в е д е н и е

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с существованием решений у нелинейных операторных уравнений, и рассматриваются приложения полученных результатов к некоторым задачам теории дифференциальных уравнений.

§ 1 посвящен изучению операторного уравнения

$$G(u)=0 \tag{0.1}$$

с оператором G, отображающим некоторое подмножество Φ банахова пространства X в сопряженное банахово пространство X^*. В настоящее время известен довольно обширный класс уравнений вида (0.1), разрешимость которых может быть доказана по схеме Галёркина. Суть её состоит в том, что, во-первых, для уравнения (0.1) устанавливается существование ограниченной последовательности Галёркина (определение 1.1) и, во-вторых, доказывается, что тот элемент, к которому в некотором смысле (обычно слабо) сходится эта последовательность (или какая-то её подпоследовательность), является искомым решением уравнения (0.1). Применяя схему Галёркина, мы постулируем возможность предельного перехода в галёркинских уравнениях (определение 1.2)*) и основное внимание сосредоточиваем на условиях существования для уравнения (0.1) ограниченной последовательности Галёркина. Класс операторов, удовлетворяющих этим услови -

*) Рассматриваемые в §§ 3,5 задачи теории дифференциальных уравнений приводят к операторам, псевдомонотонным на рефлексивном банаховом пространстве X или на некоторых его слабо замкнутых подмножествах, поэтому для них предельный переход в галёркинских уравнениях осуществим.

ям (они приведены в теоремах 1.2–1.4), значительно шире, чем класс так называемых коэрцитивных операторов*), интенсивно изучавшихся, начиная с Ф. Браудера, в работах многих математиков (см. [1] и имеющуюся там библиографию). Это расширение достигнуто за счет следующих двух основных моментов. Во-первых, если при выполнении условия коэрцитивности векторное поле $G_\mu : \mu \to \mu$ **) галёркинского уравнения $G_\mu(u) = 0$ на линейном конечномерном подпространстве $\mu \subset X$ с гильбертовой структурой сравнивается с тождественным векторным полем на границе $\partial\mathcal{D}_\mu$ некоторой области $\mathcal{D}_\mu \subset \mu$, то в условиях, приведенных в теоремах § 1 данной работы, тождественное векторное поле заменено на произвольное невырожденное на $\partial\mathcal{D}_\mu$ векторное поле A, имеющее на $\partial\mathcal{D}_\mu$ ненулевое вращение. Во-вторых, если максимальный угол, на который условие коэрцитивности позволяет векторному полю G_μ отклоняться на $\partial\mathcal{D}_\mu$ от тождественного векторного поля, равен $\frac{\pi}{2}$, то максимальный угол, на который разрешается отклоняться на $\partial\mathcal{D}_\mu$ векторному полю оператора G_μ от векторного поля A при выполнении условий теорем § 1, сколь угодно близок к π. Идея сравнения на $\partial\mathcal{D}_\mu$ векторного поля G_μ, порожденного исследуемым операторным уравнением (0.1), с заданным векторным полем A, о котором заранее известно, что невырожденно на $\partial\mathcal{D}_\mu$ и имеет на $\partial\mathcal{D}_\mu$ ненулевое вращение, является центральной идеей доказательства теорем § 1 о существовании ограниченной последовательности Галёркина для уравнения (0.1). При выполнении условий этих теорем векторные поля G_μ и A нигде на $\partial\mathcal{D}_\mu$ не направлены противоположно, и следовательно, в силу известной теоремы Пуанкаре-Боля в случае, когда поле G_μ невырожденно на $\partial\mathcal{D}_\mu$, имеют на $\partial\mathcal{D}_\mu$ одинаковые вращения, так что галёркинское уравнение $G_\mu(u) = 0$ обладает по крайней мере одним решением $u_\mu \in \mathcal{D}_\mu$. Это решение, зависящее от μ, в случае, когда μ пробегает некоторое направленное семейство $\mathcal{M}$ линейных конечномерных подпространств в X, частично упорядоченное по включению и такое, что множество $\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu$ плотно в X, образует искомую последовательность Га-

---

*) Другие классы нелинейных операторных уравнений с некоэрцитивными операторами исследовались в работах С.И. Похожаева [13, 14] (см. также работу автора [15]).

**) См. доказательство теоремы 1.2.

***) Условия, дающие увеличение возможного угла отклонения на $\partial\mathcal{D}_\mu$ векторного поля G_μ от векторного поля A в случае, когда поле A имеет некоторый специальный вид и его вращение на $\partial\mathcal{D}_\mu$ равно по модулю 1, приведены в работе автора [2]. Эти условия аналогичны условиям теоремы 1.2.

лёркина. Иногда той или иной задаче, возникающей в теории дифференциальных уравнений*), может быть естественным образом сопоставлено некоторое разложение пространства X в конечную прямую сумму линейных замкнутых подпространств

$$X = \sum_{K=1}^{\jmath} X_K . \tag{0.2}$$

При этом множество $\Phi \subset X$, в котором отыскивается решение соответствующего операторного уравнения (0.1), имеет смысл выбирать в виде алгебраической суммы множеств: $\Phi = \sum_{K=1}^{\jmath} \varphi^{(K)}$, $\varphi^{(K)} \subset X_K$, а векторное поле $A: \Phi \to X^*$ – в виде прямой суммы векторных полей $A^{(K)}: \varphi^{(K)} \to X_K$, $K=1,\dots,\jmath$. Условия существования ограниченной последовательности Галёркина для уравнения (0.1) в этой ситуации, которая в дальнейшем является основным объектом рассмотрения, приведены в теореме 1.4.

В § 2 вопрос о разрешимости уравнения (0.1) мы связываем с более удобным для исследования вопросом о коэрцитивности некоторого семейства вещественных функций, построенных по оператору G (определение 2.2, теоремы 2.1 и 2.3). В ряде случаев (примеры 2.1–2.6) коэрцитивность этого семейства может быть установлена сравнительно просто на основе теоремы 2.2 (см. также примеры 3.1–3.6).

В § 3 рассматривается операторное уравнение вида

$$S(u) + B(u) = 0, \tag{0.3}$$

где S – оператор, отображающий банахово пространство $\mathcal{R}$ в банахово пространство H, вообще говоря, необратимый, а B – оператор, отображающий некоторое множество $\Phi \subset \mathcal{R}$ в пространство H. Изучается вопрос о разрешимости этого уравнения в множестве Φ. При выполнении некоторых условий (условия 1-1У и тождество (3.13)) операторное уравнение (0.3) оказывается следствием операторного уравнения вида (0.1) с оператором G, отображающим множество Φ в пространство X^*, где X – некоторое линейное замкнутое подпространство в $\mathcal{R}$, содержащее множество Φ, так что условия разрешимости уравнения (0.1), сформулированные в § 1, являются также условиями разрешимости уравнения (0.3). В теоремах 3.5 и 3.6 о разрешимости уравнения (0.3) эти условия выписываются в терминах операторов S, B и билинейной формы $\{h,\sigma\}$, которая определена на множестве $H \times \operatorname{coker} S$ и задает область значений оператора S следующим образом: $S(\mathcal{R}) = \{h \in H \mid \{h,\sigma\} = 0 \ \ \forall \sigma \in \operatorname{coker} S\}$. Приводятся примеры задач теории дифференциальных уравнений, разрешимость которых может быть доказана при помощи общей теоремы 3.6 с учетом утверждений о коэрцитивности некоторых конкретных семейств функций, рассмотренных в § 2. При этом

*) См. § 3 (примеры 3.1–3.6) и § 5.

выявляются новые, ранее неизвестные факты и в случае обратимого оператора $\mathcal{S}$ (пример 3.1).

В § 4 выделяются два класса операторных уравнений вида

$$\mathcal{S}(u) + \mathcal{B}(u) = h, \tag{0.4}$$

где $\mathcal{S}$ и $\mathcal{B}$ - операторы, введенные в § 3. Первому классу принадлежат уравнения, в которых $\mathcal{S}$ - хаусдорфов (в частности, нётеров) оператор*) (такие операторы встречаются во многих разделах теории линейных дифференциальных и интегральных уравнений), а $\mathcal{B}$ - оператор, в некотором смысле подчиненный оператору $\mathcal{S}$. Исходя из хаусдорфова оператора, порожденного какой-нибудь линейной задачей, можно, путем добавления к нему различных нелинейных слагаемых, с помощью результатов, полученных в §§ 1-3, исследовать разрешимость полученного нелинейного операторного уравнения. Мы рассматриваем ряд примеров хаусдорфовых операторов и билинейных форм, задающих область их значений. В частности, подробно изучается линейный оператор задачи на отыскание периодических решений дифференциальных уравнений с частными производными. Операторные уравнения второго класса характеризуются тем, что в них $\mathcal{S}$ - нулевой оператор, $H = \mathcal{R}^*$, а в качестве билинейной формы, задающей область значений оператора $\mathcal{S}$, выбрана каноническая билинейная форма, приводящая в двойственность пространства $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}$. Такие операторные уравнения возникают при исследовании краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем уравнений дивергентного вида, которые естественным образом порождают некоторую полунорму и связанное с ней специальное разложение пространства X в прямую сумму линейных замкнутых подпространств, позволяющее при определенных условиях доказать разрешимость указанных краевых задач методами данной работы (в то же время в рамках теории коэрцитивных операторов она, как правило, доказана быть не может).

В заключение § 4 исследован один частный случай ситуации, описанной в §§ 1,3, а именно случай, когда в разложении (0.2) содержатся только два нетривиальных подпространства, причем для одного из этих подпространств векторное поле $A^{(k)}$ выбирается тождественным. Сформулированы соответствующие следствия теорем 3.5 и 3.6 о разрешимости операторного уравнения (0.4)**).

В § 5 приводятся примеры применения теорем § 4 к вопросу о разре-

---

*) См. определение 4.1.

**) Первый шаг в исследовании такого рода задач был сделан А. Лазером [3], доказавшим с помощью принципа Шаудера существование периодического решения у одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего в нелинейной механике.

шимости различных задач теории дифференциальных уравнений, приводящих к нелинейным операторным уравнениям вида (0.4).

§ 1. Об операторах, отображающих банахово пространство в сопряженное

Пусть X - банахово пространство над полем K вещественных или комплексных чисел. Под сопряженным к X пространством X^* мы будем понимать банахово пространство над K всех функционалов вида $\overline{f(u)}$, $u \in X$, где f - линейный непрерывный функционал на X. Пусть Φ - непустое подмножество в X. Рассмотрим уравнение

$$G(u) = 0, \tag{1.1}$$

где $G: \Phi \longrightarrow X^*$ - оператор, вообще говоря, нелинейный, а u - искомый элемент в множестве Φ, и изучим вопрос о разрешимости этого уравнения.

Определение 1.1. Обобщенная последовательность $\{u_\mu\} \subset \Phi$ называется последовательностью Галёркина для уравнения (1.1), если 1) $<G(u_\mu), u_\mu> = 0$ $\forall \mu$ и 2) множество тех $v \in X$, для которых существует индекс μ_0, зависящий от v, такой, что $< G(u_\mu), v> = 0$ $\forall \mu \geq \mu_0$, плотно в X. Класс операторов, отображающих множество Φ в пространство X^*, для которых соответствующее изменение (1.1) обладает ограниченной последовательностью Галёркина $\{u_\mu\} \subset \Phi$, обозначим через $\Gamma(X,\Phi)$ *). Положим ещё $\Gamma(X) = \Gamma(X, X)$.

В настоящей работе мы будем интересоваться лишь принадлежностью оператора G классу $\Gamma(X,\Phi)$ или классу $\Gamma(X)$, при этом возможность предельного перехода в галеркинских уравнениях будет априори предполагаться. В связи с этим удобно дать такое

Определение 1.2. Скажем, что оператор G принадлежит классу $\mathfrak{A}(X,\Phi)$, если имеет место импликация $G \in \Gamma(X,\Phi) \Rightarrow 0 \in G(\Phi)$. Через $\mathfrak{A}_0(X,\Phi)$ обозначим совокупность всех таких операторов $G \in \mathfrak{A}(X,\Phi)$, которые обладают следующим свойством: для любого линейного конечномерного подпространства $Y \subset X$ и любого $v \in Y$ функционал $u \longrightarrow <G(u), v>$ непрерывен на Y. (Например, если X - рефлексивное пространство, а Φ - слабо замкнутое подмножество в X, то всякий оператор, псевдомонотонный на Φ**)

---

*) Оператор класса $\Gamma(X,\Phi)$ может быть определен, конечно, на более широком, чем Φ, подмножестве в X. Это же замечание относится и к операторам классов $\mathfrak{A}(X,\Phi)$ и $\mathfrak{A}_0(X,\Phi)$, введенных в определении 1.2.

**) Псевдомонотонность на Φ определяется по аналогии с "обычной" псевдомонотонностью (на X) (см. [1, стр. 190, 191]).

и непрерывный из X (с сильной топологией) в X^* (со слабой топологией), принадлежит классу $\mathfrak{A}_0(X,\Phi)$ (см. [1, стр. 191, теорема 2.7]). Положим

$$\mathfrak{A}_0(X) = \mathfrak{A}_0(X,X).$$

Следующее утверждение есть очевидное следствие определений 1.1 и 1.2.

Т е о р е м а 1.1. Если оператор $G \in \Gamma(X,\Phi) \cap \mathfrak{A}(X,\Phi)$, то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \Phi$.

З а м е ч а н и е (об оценке снизу числа решений операторных уравнений). Следующее утверждение удобно применять в тех случаях, когда требуется иметь информацию о мощности множества всех решений операторного уравнения. Это утверждение легко получается с помощью теоремы 1.1. Пусть заданы: множества $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ произвольной природы, отображение $\mathcal{G}: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и элемент $y \in \mathcal{Y}$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{G}(x) = y$. Пусть, далее, $\mathcal{B} = \{\varphi\}$ - семейство попарно непересекающихся между собой подмножеств в $\mathcal{X}$ (зависящее от y). Предположим, что каждому множеству $\varphi \in \mathcal{B}$ сопоставлены: банахово пространство X, замкнутое подмножество Φ в X, а также отображения: $\chi: \Phi \to \varphi$ и $\pi: (\mathcal{G}\circ\chi)(\Phi) \to X^*$, обладающие такими свойствами:
1) $\{z \in (\mathcal{G}\circ\chi)(\Phi), \pi(z)=0\} \Rightarrow z = y$ и 2) $\pi\circ\mathcal{G}\circ\chi \in \Gamma(X,\Phi) \cap \mathfrak{A}(X,\Phi)$ $\forall \varphi \in \mathcal{B}$.
Тогда мощность множества всех решений уравнения $\mathcal{G}(x) = y$ не меньше мощности семейства $\mathcal{B}$.

Для формулировки следующей теоремы и для дальнейшего нам понадобится такое

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть задана четверка объектов $(\Phi,\Sigma,A,\mathcal{M})$ где Φ - подмножество в X; $\Sigma = \{X_j\}_{j\in J}$ - совокупность линейных подпространств в X такая, что $X_i \cap X_j = \{0\}$ $\forall i,j \in J$, $i \neq j$, и подпространство $X^{(0)} = \sum_{j\in J} X_j$ плотно в X *); $A: X^{(0)} \cap \Phi \to X^{(0)}$ - оператор (не обязательно линейный); $\mathcal{M}$ - частично упорядоченное по включению направленное семейство линейных конечномерных подпространств μ в X вида: $\mu = \sum_{j\in J} \mu_j$, где μ_j - линейное подпространство в X_j, при этом если $\dim X < \infty$, то $\mathcal{M} = \{X\}$. Скажем, что $(\Phi,\Sigma,A,\mathcal{M}) \in \mathcal{O}(X)$, если множество Φ ограничено и замкнуто в X и, кроме того, каково бы ни было подпространство $\mu \in \mathcal{M}$, множество $\operatorname{int}(\mu \cap \Phi) \neq \emptyset$, причем у него существует связная компонента $\mathcal{F}_\mu$, обладающая таким свойством: $A(\overline{\mathcal{F}}_\mu) \subset \mu$, векторное поле A непрерывно на $\overline{\mathcal{F}}_\mu$, не вырождено на $\partial\mathcal{F}_\mu$ и имеет на $\partial\mathcal{F}_\mu$ ненулевое вращение. Через $\Pi_j: X^{(0)} \xrightarrow{\text{на}} X_j$ обозначим линейный проекционный оператор, у которого $\ker \Pi_j = \sum_{i\neq j} X_i$.

Т е о р е м а 1.2. Пусть $(\Phi,\Sigma,A,\mathcal{M}) \in \mathcal{O}(X)$ и пусть существуют такие функционалы $\lambda_j: X^{(0)} \cap \partial\Phi \to [0,\infty)$, $j \in J$ (не обязательно непрерывные), что $\sum_{j\in J} \lambda_j(u)\Pi_j A(u) \neq 0$ $\forall u \in \partial\mathcal{F}_\mu$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$. Пусть, далее, $G: \Phi \to X^*$ - такой

*) Символом $\sum_{j\in J} X_j$ обозначается, как обычно, совокупность всевозможных конечных сумм элементов из подпространств X_j.

оператор, что $\forall u \in \partial \mathcal{F}_\mu$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$ комплексное число $< G(u), \sum_{j\in J} \lambda_j(u) \Pi_j A(u) >$ не лежит на отрицательной вещественной полуоси $(-\infty, 0)$ и $\forall v \in \mu$, $\forall \mu \in \mathcal{M}$ функционал $u \longrightarrow < G(u), v >$ непрерывен на $\overline{\mathcal{F}}_\mu$. Тогда $G \in \Gamma(X, \Phi)$. При этом если еще $G \in \mathfrak{A}(X, \Phi)$, то, в силу теоремы 1.1, уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \Phi$.

Доказательство. Нам нужно установить, что оператор G обладает последовательностью Галёркина, расположенной в множестве Φ. Пусть μ - линейное подпространство из $\mathcal{M}$. Оно, по определению, конечномерно и представимо в виде: $\mu = \sum_{j\in J} \mu_j$, где μ_j - линейное подпространство в X_j. Будем рассматривать его как евклидово пространство с таким скалярным произведением (w, v), относительно которого подпространства μ_j попарно ортогональны. Введем оператор $G_\mu : \mu \longrightarrow \mu$, определяемый с помощью тождества: $< G(u), v > = (G_\mu(u), v)$ $\forall v \in \mu$. Если нам удастся доказать, что уравнение

$$G_\mu(u) = 0 \qquad (1.2)$$

имеет решение $u_\mu \in \overline{\mathcal{F}}_\mu$ $\forall \mu \in \mathcal{M}$, то последовательность $\{u_\mu\}$ и будет искомой последовательностью Галёркина для оператора G. Будем доказывать существование решения $u_\mu \in \overline{\mathcal{F}}_\mu$ у уравнения (1.2). Возможны два случая: 1) существует элемент $u_\mu \in \partial \mathcal{F}_\mu$ такой, что $G_\mu(u_\mu) = 0$, и 2) $G_\mu(u) \neq 0$ $\forall u \in \partial \mathcal{F}_\mu$. В первом случае элемент u_μ - искомый.

Пусть имеет место второй случай. Тогда мы покажем, что уравнение (1.2) обладает решением $u_\mu \in \underline{\mathcal{F}}_\mu$. Действительно, по условию теоремы, векторное поле G_μ непрерывно на $\overline{\mathcal{F}}_\mu$; кроме того, по предположению, оно невырожденно на $\partial \mathcal{F}_\mu$. Сравним его с непрерывным на $\overline{\mathcal{F}}_\mu$ и невырожденным на $\partial \mathcal{F}_\mu$ векторным полем A. Оба эти поля нигде на $\partial \mathcal{F}_\mu$ не направлены противоположно, иначе нашлись бы такой элемент $u^* \in \partial \mathcal{F}_\mu$ и такое положительное число γ, что $G_\mu(u^*) = -\gamma A(u^*)$ и, следовательно,

$$< G(u^*), \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) \Pi_j A(u^*) > = \left(G_\mu(u^*), \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) \Pi_j A(u^*)\right) =$$
$$= -\gamma\left(A(u^*), \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) \Pi_j A(u^*)\right) = -\gamma \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) \left(\Pi_j A(u^*), \Pi_j A(u^*)\right),$$

и, таким образом, из двух равных друг другу комплексных чисел $< G(u^*), \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) \Pi_j A(u^*) >$ и $-\gamma \sum_{j\in J} \lambda_j(u^*) (\Pi_j A(u^*), \Pi_j A(u^*))$ первое, по условию теоремы, оказалось бы не лежащим на отрицательной вещественной полуоси $(-\infty, 0)$, а второе - лежащим на этой полуоси.

Невырожденные на $\partial \mathcal{F}_\mu$ векторные поля G_μ и A, нигде на $\partial \mathcal{F}_\mu$ не направленные противоположно, в силу известной теоремы Пуанкаре-Боля, имеют на $\partial \mathcal{F}_\mu$ одинаковые вращения. Поскольку вращение векторного поля A на $\partial \mathcal{F}_\mu$ отлично от нуля, то этим же свойством обладает вра -

шение векторного поля G_μ, и, следовательно, уравнение (1.2) имеет в области $\mathcal{F}_\mu$ по крайней мере одно решение. Теорема доказана.

Часто оказывается полезной следующая эквивалентная формулировка теоремы 1.2.

Т е о р е м а 1.3. Пусть $(\Phi, \Sigma, \Lambda, \mathcal{M}) \in \mathcal{O}(X)$ и пусть задано некоторое покрытие множества $X^{(0)} \cap \partial\Phi$ следующего вида: $X^{(0)} \cap \partial\Phi = \bigcup_{\kappa \in \mathfrak{X}} \psi^{(\kappa)}$ ($\mathfrak{X}$ - множество индексов). Пусть, далее, каждому $\kappa \in \mathfrak{X}$ сопоставлен оператор $A^{(\kappa)}: \psi^{(\kappa)} \to X^{(0)}$, действующий по формуле: $A^{(\kappa)}(u) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \lambda_j^{(\kappa)}(u) \Pi_j A(u)$, в которой $\lambda_j^{(\kappa)}: \psi^{(\kappa)} \to [0, \infty)$ $\forall j \in \mathcal{J}, \forall \kappa \in \mathfrak{X}$, причем $A^{(\kappa)}(u) \neq 0$ $\forall u \in \psi^{(\kappa)} \cap \partial\mathcal{F}_\mu$, $\forall \mu \in \mathcal{N}$, $\forall \kappa \in \mathfrak{X}$. Пусть, наконец, $G: \Phi \to X^*$ - оператор такой, что $< G(u), A^{(\kappa)}(u) > \overline{\in} (-\infty, 0)$ $\forall u \in \psi^{(\kappa)} \cap \partial\mathcal{F}_\mu, \forall \mu \in \mathcal{M}, \forall \kappa \in \mathfrak{X}$ и функционал $u \to < G(u), v >$ непрерывен на $\overline{\mathcal{F}}_\mu$ $\forall v \in \mu, \forall \mu \in \mathcal{M}$. Тогда $G \in \Gamma(X, \Phi)$. При этом, если еще $G \in \mathfrak{A}(X, \Phi)$, то в силу теоремы 1.1 уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \Phi$.

В заключение параграфа мы приведем одно удобное в приложениях следствие теоремы 1.3, в котором множество Φ и оператор A имеют специальный вид.

Т е о р е м а 1.4. Пусть пространство X разложено в конечную прямую сумму линейных замкнутых подпространств

$$X = \sum_{\kappa=1}^{s} X_\kappa, \tag{1.3}$$

так что каждый элемент $u \in X$ однозначно записывается в виде суммы

$$u = \sum_{\kappa=1}^{s} u_\kappa, \quad u_\kappa \in X_\kappa. \tag{1.4}$$

Пусть, далее, задано множество $\Phi \subset X$ вида $\Phi = \sum_{\kappa=1}^{s} \varphi^{(\kappa)}$, где $\varphi^{(\kappa)} \subset X_\kappa$ $\forall \kappa = 1, \ldots, s$. Сопоставим каждому $\kappa = 1, \ldots, s$ оператор $A^{(\kappa)}: \varphi^{(\kappa)} \to X_\kappa$ и семейство $\mathcal{M}^{(\kappa)}$ линейных конечномерных подпространств в X_κ такое, что множество $X_\kappa^{(0)} = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^{(\kappa)}} \mu$ плотно в X_κ. Предположим, что $(\varphi^{(\kappa)}, \{X_\kappa^{(0)}\}, A^{(\kappa)}, \mathcal{M}^{(\kappa)}) \in \mathcal{O}(X_\kappa)$ $\forall \kappa = 1, \ldots, s$. Пусть оператор $G \in \mathfrak{A}_0(X, \Phi)$. Тогда если

$$< G(u), A^{(\kappa)}(u_\kappa) > \overline{\in} (-\infty, 0) \quad \forall u \in \partial\varphi^{(\kappa)} + \sum_{\nu \neq \kappa} \varphi^{(\nu)} \quad \forall \kappa = 1, \ldots, s,$$

то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \Phi$ *).

§ 2. Коэрцитивные семейства функций

В приложениях часто оказывается удобным множество Φ, содержащее последовательность Галёркина оператора G, отыскивать среди семей-

*) По поводу оценки снизу числа решений уравнения (1.1) в пространстве X в случае, когда оператор G задан на всем X, см. замечание к теореме 1.1.

ства множеств $\{\Phi_t\}_{t\in T}$, зависящих от некоторого параметра t.

Введем соответствующие обозначения. Пусть фиксировано некоторое натуральное число s и пусть при каждом $k=1,\dots,s$ задано непустое множество параметров T_k, элементы которого будем обозначать через t_k. Положим $T=T_1\times\dots\times T_s$, $t=(t_1,\dots,t_s)$. Сопоставим каждому $t\in T$ четверку $(\Phi_t,\Sigma_t,A_t,M_t)\in\mathcal{O}(X)$ и некоторые непустые подмножества $\psi_t^{(1)},\dots,\psi_t^{(s)}$ множества $X_t^{(0)}\cap\partial\Phi_t$ такие, что $X_t^{(0)}\cap\partial\Phi_t=\bigcup_{1\le k\le s}\psi_t^{(k)}$. Пусть еще заданы операторы $A_t^{(k)}:\psi_t^{(k)}\to X_t^{(0)}$, $k=1,\dots,s$, действующие по формуле $A_t^{(k)}(u)=\sum_{j\in J_t}\lambda_{j,t}^{(k)}(u)\Pi_{j,t}A_t(u)$, где $\lambda_{j,t}^{(k)}:\psi_t^{(k)}\to[0,\infty)$, $\forall j\in J_t$, $\forall t\in T$, $\forall k=1,\dots,s$, причем $A_t^{(k)}(u)\ne 0$ $\forall u\in\psi_t^{(k)}$, $\forall t\in T$, $\forall k=1,\dots,s$ *).

Определение 2.1. Функцию $Re^*:C\Rightarrow R$ назовем обобщенной вещественной частью, если $\{z\in C$ и $Re\,z<0\}\Longrightarrow Re^*z<0$.

Рассмотрим следующее семейство из s функций

$$\{\inf_{u\in\psi_t^{(k)}} Re^*_{k,u}<G(u),A_t^{(k)}(u)>\},\ t\in T,\ k=1,\dots,s, \tag{2.1}$$

где $Re^*_{k,u}$ при фиксированных $k=1,\dots,s$ и $u\in\psi_t^{(k)}$ - обобщенная вещественная часть на C.

Определение 2.2. Семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $t\in T$, $k=1,\dots,s$ со значениями из расширенной области вещественных чисел называется коэрцитивным на множестве T, если для некоторого $t^{(0)}\in T$ справедливы неравенства $\omega_k(t^{(0)})\ge 0$ $\forall k=1,\dots,s$.

Следующее утверждение есть следствие теоремы 1.3.

Теорема 2.1. <u>Пусть оператор</u> $G:\bigcup_{t\in T}\Phi_t\to X^*\in\mathcal{O}l_0(X,\Phi_t)$ $\forall t\in T$, <u>причем семейство функций (2.1) коэрцитивно на множестве</u> T. <u>Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение</u> $u\in\bigcup_{t\in T}\Phi_t$.

В следующей теореме содержатся достаточные условия коэрцитивности семейства функций. Для сокращения обозначений положим $T_s'=T_1\times\dots\times T_{s-1}$, $t_s'=(t_1,\dots,t_{s-1})$.

Теорема 2.2. <u>Пусть задано семейство функций</u> $\{\omega_k(t)\}$, $t\in T$, $k=1,\dots,s$, $s>1$, <u>со значениями из расширенной области вещественных чисел. Пусть, далее, существует такая функция</u> $f:T_s'\to T_s$, <u>что имеет место неравенство</u> $\omega_s(t_s,f(t_s'))\ge 0$ $\forall t_s'\in T_s'$, <u>причем семейство</u> $\{\omega_k(t_s',f(t_s'))\}$, $t_s'\in T_s'$, $k=1,\dots,s-1$, <u>коэрцитивно на</u> T_s'. <u>Тогда семейство функций</u> $\{\omega_k(t)\}$, $t\in T$, $k=1,\dots,s$, <u>коэрцитивно на</u> T.

Доказательство этой теоремы очевидно. Заметим, что в некоторых случаях ее последовательное применение сводит исследование коэрцитив-

---

*) Имеется в виду, что $\Sigma_t=\{X_{j,t}\}_{j\in J_t}$, $X_t^{(0)}=\sum_{j\in J_t}X_{j,t}$ и $\Pi_{j,t}:X_t^{(0)}\xrightarrow{\text{на}}X_{j,t}$ - линейный проекционный оператор, у которого $\ker\Pi_{j,k}=\sum_{i\in J_t,i\ne j}X_{j,t}$.

ности некоторого семейства, содержащего больше одной функции, к исследованию коэрцитивности семейства, состоящего из одной функции. Коэрцитивность же семейства, состоящего из одной функции $\omega_1(t_1), t_1 \in T_1$, проверяется обычно довольно просто, поскольку требуется установить лишь существование элемента $t_1^{(0)} \in T_1$ такого, что $\omega_1(t_1^{(0)}) \geq 0$.

Сформулируем теперь одно удобное в приложениях следствие из теоремы 2.1, в котором множества Φ_t, $t \in T$, имеют специальный вид. Предварительно введем некоторые обозначения. Пусть пространство X разложено в конечную прямую сумму (1.3) линейных замкнутых подпространств, так что каждый элемент $u \in X$ однозначно представим в виде суммы (1.4). Пусть, далее, каждому $t_\kappa \in T_\kappa$, $\kappa = 1, \ldots, s$, сопоставлены: ограниченная замкнутая область*) $\varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)}$ в X_κ; непрерывный оператор $A_{t_\kappa}^{(\kappa)} : \varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)} \to X_\kappa$; частично упорядоченное по включению семейство $\mathcal{M}_{t_\kappa}^{(\kappa)}$ линейных конечномерных подпространств в X_κ такое, что подпространство $X_{t_\kappa}^{(0,\kappa)} = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{t_\kappa}^{(\kappa)}} \mu$ плотно в X_κ, $\operatorname{int}(\varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)} \cap \mu) \neq \varnothing$ $\forall \mu \in \mathcal{M}_{t_\kappa}^{(\kappa)}$, $A_{t_\kappa}^{(\kappa)} : \varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)} \cap \mu \to \mu$, причем для некоторой связной компоненты $\mathcal{D}_{t_\kappa, \mu}$ множества $\operatorname{int}(\varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)} \cap \mu)$ векторное поле $A_{t_\kappa}^{(\kappa)}$ невырожденно на $\partial \mathcal{D}_{t_\kappa, \mu}$ и имеет на $\partial \mathcal{D}_{t_\kappa, \mu}$ ненулевое вращение. В случае, когда $\dim X_\kappa < \infty$, будем считать, что $\mathcal{M}_{t_\kappa}^{(\kappa)} = \{X_\kappa\}$ $\forall t_\kappa \in T_\kappa$. Ясно, что четверка $(\Phi_t, \Sigma_t, A_t, M_t)$, где $\Phi_t = \varphi_{t_1}^{(1)} + \ldots + \varphi_{t_s}^{(s)}$, $\Sigma_t = \{X_{t_\kappa}^{(0,\kappa)}\}_{\kappa = 1, \ldots, s}$**), $A_t : \Phi_t \to X$ – непрерывный оператор, действующий по формуле $A_t(u) = \sum_{\kappa=1}^{s} A_{t_\kappa}^{(\kappa)}(u_\kappa)$, $\mathcal{M}_t$ – частично упорядоченное по включению семейство линейных конечномерных подпространств в X вида $\mu = \sum_{\kappa=1}^{s} \mu_\kappa$, $\mu_\kappa \in \mathcal{M}_{t_\kappa}^{(\kappa)}$, принадлежит множеству $\mathcal{O}(X)$. Введем следующее обозначение: $\psi_t^{(\kappa)} = \partial \varphi_{t_\kappa}^{(\kappa)} + \sum_{\nu \neq \kappa} \varphi_{t_\nu}^{(\nu)}$ $\forall t \in T$, $\forall \kappa = 1, \ldots, s$***). Теперь может быть сформулирована интересующая нас

Т е о р е м а 2.3. <u>Пусть оператор $G : \bigcup_{t \in T} \Phi_t \to X^* \in \mathcal{O}_0(X, \Phi_t)$ $\forall t \in T$ и пусть семейство функций</u>

$$\{\inf_{u \in \psi_t^{(\kappa)}} Re < G(u), A_{t_\kappa}^{(\kappa)}(u_\kappa) >\}, \quad t \in T, \quad \kappa = 1, \ldots, s,$$

<u>коэрцитивно на множестве T. Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \bigcup_{t \in T} \Phi_t$</u>****).

*) Замкнутой областью в банаховом пространстве X мы будем называть здесь и в дальнейшем замыкание непустого открытого связного множества в X.

**) В данном случае $\mathcal{I}_t = \{1, \ldots, s\}$ $\forall t \in T$.

***) При $s = 1$ имеется в виду, что $\psi_t^{(1)} = \partial \Phi_t$ $\forall t \in T$.

****) В теореме 2.3, как и во всех дальнейших аналогичных утверждениях, для простоты формулировок вместо обобщенной вещественной части мы будем брать обычную вещественную часть Re.

В заключение этого параграфа приведем несколько примеров коэрцитивных семейств функций.*)

Пример 2.1. Рассмотрим семейство функций $\{\omega_\kappa(t)\}$, $t\in T$, $\kappa=1,\dots,s$. Предположим, что при каждом фиксированном κ множество T_κ есть либо натуральный ряд, либо интервал $(0,\infty)$, причем функция $\omega_\kappa(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_\kappa(t)\geq \xi_\kappa(t)\left(\frac{\varepsilon_\kappa t_\kappa^{\gamma_\kappa}}{1+\prod\limits_{j=1}^{s} t_j^{\gamma_{\kappa j}}}-a_\kappa\prod_{j=1}^{s} t_j^{\sigma_{\kappa j}}-c_\kappa\right),$$

где $\xi_\kappa: T\to[0,\infty)$, $\varepsilon_\kappa>0$, $a_\kappa\geq 0$, $c_\kappa\geq 0$, $\sigma_{\kappa j}\geq 0$, $\gamma_{\kappa j}\geq 0$, $\gamma_\kappa>\gamma_{\kappa\kappa}+\sigma_{\kappa\kappa}$.
Положим $\tau_\kappa=\gamma_\kappa-\gamma_{\kappa\kappa}-\sigma_{\kappa\kappa}$, $\ell_{\kappa j}=\sigma_{\kappa j}+\gamma_{\kappa j}$. С помощью теоремы 2.2 легко проверяется, что достаточным условием коэрцитивности на T семейства функций $\{\omega_\kappa(t)\}$, при $s=2$ является неравенство $\frac{\ell_{12}\ell_{21}}{\tau_1\tau_2}<1$, а при $s=3$ – неравенство

$$\frac{\ell_{12}\ell_{21}}{\tau_1\tau_2}+\frac{\ell_{13}\ell_{31}}{\tau_1\tau_3}+\frac{\ell_{23}\ell_{32}}{\tau_2\tau_3}+\frac{\ell_{12}\ell_{23}\ell_{31}}{\tau_1\tau_2\tau_3}+\frac{\ell_{21}\ell_{13}\ell_{32}}{\tau_1\tau_2\tau_3}<1.$$

По-видимому, в общем случае достаточным условием коэрцитивности на T этого семейства функций является неравенство

$$\sum_{\nu=2}^{s}\left(\sum{}'\left(\frac{1}{\tau_{i_1}\tau_{i_2}\dots\tau_{i_\nu}}\sum{}''\ell_{j_1j_2}\ell_{j_2j_3}\dots\ell_{j_{\nu-1}j_\nu}\ell_{j_\nu j_1}\right)\right)<1,$$

в котором сумма $\sum'$ распространяется на всевозможные наборы, состоящие из ν различных натуральных чисел $i_1,i_2,\dots,i_\nu$, не превосходящих s, а сумма $\sum''$ – на всевозможные перестановки $j_1,\dots,j_\nu$ набора $i_1,\dots,i_\nu$.

Пример 2.2. Пусть семейство функций $\{\omega_\kappa(t)\}$, $t\in T$, $\kappa=1,\dots,s$, задано на множестве T из примера 2.1 и пусть каждая функция $\omega_\kappa(t)$ этого семейства удовлетворяет неравенству

$$\omega_\kappa(t)\geq\xi_\kappa(t)\left(\varepsilon_\kappa t_\kappa^{\gamma_{\kappa\kappa}}-\sum_{\nu\neq\kappa}a_{\kappa\nu}t_\nu^{\gamma_{\kappa\nu}}-c_\kappa\right),$$

где $\xi_\kappa: T\to[0,\infty)$, $\varepsilon_\kappa>0$, $\gamma_{\kappa\kappa}>0$, $a_{\kappa\nu}\geq 0$, $c_\kappa\geq 0$. Положим $\gamma_{\kappa\nu}^{(1)}=\gamma_{\kappa\nu}$ $\forall\kappa,\nu=1,\dots,s$. Далее, если задан набор чисел $\gamma_{\kappa\nu}^{(\sigma)}$, $\kappa,\nu=1,\dots,\sigma$; $1<\sigma\leq s$, то набор чисел $\gamma_{\kappa\nu}^{(\sigma-1)}$, $\kappa,\nu=1,\dots,\sigma-1$, определим следующим образом:

$$\gamma_{\kappa\nu}^{(\sigma-1)}=\max\left(\gamma_{\kappa\nu}^{(\sigma)},\ \frac{\gamma_{\kappa\sigma}^{(\sigma)}\gamma_{\sigma\nu}^{(\sigma)}}{\gamma_{\sigma\sigma}^{(\sigma)}}\right);$$

так что, исходя из набора чисел $\gamma_{\kappa\nu}^{(s)}$, $\kappa,\nu=1,\dots,s$, мы построим все наборы

---

*) Все функции в примерах этого параграфа считаются вещественными.

$\gamma_{k\nu}^{(\sigma)}$, $k,\nu=1,\dots,\sigma$; $\sigma=s,s-1,\dots,1$. Предположим, что $\gamma_{kk}^{(\sigma)}\gamma_{\sigma\sigma}^{(\sigma)}>\gamma_{k\sigma}^{(\sigma)}\gamma_{\sigma k}^{(\sigma)}$ $\forall k=1,\dots$ $\dots,\sigma-1$, $\forall\sigma=s,\dots,2$. Тогда семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $t\in T$, $k=1,\dots,s$, коэрцитивно на множестве T. Чтобы в этом убедиться, достаточно последовательно $s-1$ раз применить теорему 2.2.

Замечание. С помощью теоремы 2.2 может быть изучена также коэрцитивность на множестве T из примеров 2.1 и 2.2 семейства функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1,\dots,s$, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega_k(t)\ge\sum_{\nu=1}^{m_k}\xi_{\nu k}(t)\Big(\varepsilon_{\nu k}t_k^{\gamma_{\nu k}}-\sum_{i=1}^{\ell_{\nu k}}b_{i\nu k}\prod_{\lambda=1}^{s}(1+t_\lambda)^{\delta_{\lambda i\nu k}}\Big),$$

где $\xi_{\nu k}:T\to[0,\infty)$, $\varepsilon_{\nu k}>0$, m_k, $\ell_{\nu k}$ – натуральные числа, $b_{i\nu k}\ge0$, $\delta_{\lambda i\nu k}\ge0$, $\gamma_{\nu k}>0$, при определенных соотношениях между $\delta_{\lambda i\nu k}$ и $\gamma_{\nu k}$.

Пример 2.3. Рассмотрим семейство, состоящее из двух функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1,2$, определенных на множестве $T=(0,\infty)\times(0,\infty)$ и удовлетворяющих неравенствам:

$$\omega_k(t)\ge\xi_k(t)\big(\varepsilon_k t_k^{\gamma_k}-a_k t_1^{\sigma_{k1}}t_2^{\sigma_{k2}}-c_k\big),$$

где $\xi_k:T\to[0,\infty)$, $\varepsilon_k>0$, $\gamma_k>0$, $\sigma_{kj}\in R$, $a_k\ge0$, $c_k\ge0$. Положим $\alpha_k=\gamma_k-\sigma_{kk}$. Коэрцитивность семейства функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1,2$, на множестве T имеет место в каждой из следующих ситуаций: 1) $\alpha_1>0$, $\alpha_1\alpha_2>\sigma_{12}\sigma_{21}$; 2) $\alpha_1>0$, $\sigma_{22}>\gamma_2$, $\sigma_{21}>0$, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_1; 3) $\alpha_1>0$, $\sigma_{22}>\gamma_2$, $\sigma_{21}=0$, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля; 4) $\alpha_1>0$, $\sigma_{22}>\gamma_2$, $\sigma_{21}<0$; 5) $\alpha_1>0$, $\alpha_1\alpha_2<\sigma_{12}\sigma_{21}$, c_1 и c_2 достаточно малые; 6) $\alpha_1>0$, $\alpha_1\alpha_2=$ $=\sigma_{12}\sigma_{21}$, a_2 достаточно мало, c_1 и c_2 лежат в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от a_2; 7) $\alpha_1>0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, $\sigma_{21}>0$, a_2 достаточно мало, c_1 и c_2 лежат в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от a_2; 8) $\alpha_1>0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, $\sigma_{21}=0$, a_2 достаточно мало, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от a_2; 9) $\alpha_1>0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, $\sigma_{21}<0$; 10) $\alpha_1<0$, $\alpha_1\alpha_2>\sigma_{12}\sigma_{21}$, c_1 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_2; 11) $\alpha_1<0$, $\alpha_1\alpha_2<\sigma_{12}\sigma_{21}$, c_2 достаточно мало, c_1 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_2; 12) $\alpha_1<0$, $\alpha_1\alpha_2=\sigma_{12}\sigma_{21}$, a_2 достаточно мало, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от a_2, c_1 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от a_2 и c_2; 13) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}=0$, $\gamma_2>\sigma_{22}$; 14) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}=0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, a_2 и c_1 достаточно малы; 15) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}=0$, $\gamma_2<\sigma_{22}$, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_1; 16) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}>0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, c_1 и a_2 достаточно малы, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_1 и a_2; 17) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}>0$, $\gamma_2<\sigma_{22}$, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от c_1; 18) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}<0$, $\gamma_2=\sigma_{22}$, c_1 и a_2 достаточно малы; 19) $\alpha_1=0$, $\sigma_{12}<0$, $\gamma_2>\sigma_{22}$; 20) $\sigma_{12}>0$, $\sigma_{22}>\gamma_2$, c_2 лежит в достаточно малой окрестности нуля, зависящей от C_1. Аналогично изучается случай, когда $\gamma_K \geq 0$.

Пример 2.4. Рассмотрим семейство, состоящее из трех функций $\{\omega_K(t)\}, K=1,2,3$, заданных на множестве $T=(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ и удовлетворяющих неравенствам:

$$\omega_K(t) \geq \xi_K(t)\left(\varepsilon_K t_K^{\gamma_K} - a_K t_1^{\sigma_{K1}} t_2^{\sigma_{K2}} t_3^{\sigma_{K3}} - C_K\right),$$

где $\xi_K : T \to [0,\infty), \varepsilon_K>0, \gamma_K>0, \sigma_{Kj}\geq 0, a_K\geq 0, C_K\geq 0$. Пусть $a_3>0$ и $\sigma_{33}>\gamma_3$. Введем функцию

$$\varphi(t_1,t_2) = \left(\frac{\varepsilon_3-\tilde{\varepsilon}_3}{a_3} t_1^{-\sigma_{31}} t_2^{-\sigma_{32}}\right)^{\frac{1}{\sigma_{33}-\gamma_3}},$$

где $0<\tilde{\varepsilon}_3<\varepsilon_3$, и рассмотрим еще семейство, состоящее из двух функций

$$\tilde{\omega}_K(t_1,t_2) = \omega_K(t_1,t_2,\varphi(t_1,t_2)), \quad K=1,2.$$

Предположим, что это семейство коэрцитивно на множестве $(0,\infty)\times(0,\infty)$ (см. пример 2.3). Это означает, что существуют такие положительные числа $t_1^{(0)}$ и $t_2^{(0)}$, что $\tilde{\omega}_1(t_1^{(0)},t_2^{(0)})\geq 0$ и $\tilde{\omega}_2(t_1^{(0)},t_2^{(0)})\geq 0$. Таким образом, если

$$C_3 \leq \tilde{\varepsilon}_3\left(\frac{\varepsilon_3-\tilde{\varepsilon}_3}{a_3} t_1^{(0)^{-\sigma_{31}}} t_2^{(0)^{-\sigma_{32}}}\right)^{\frac{\gamma_3}{\sigma_{33}-\gamma_3}},$$

то семейство функций $\{\omega_K(t)\}, K=1,2,3$, коэрцитивно на T.

Во всех приведенных примерах исследуемые на коэрцитивность семейства функций содержат некоторые параметры. Разумеется, сам факт коэрцитивности зависит от значений этих параметров. Поэтому представляет интерес отыскание таких множеств значений параметров, которые просто описываются (например, с помощью алгебраических неравенств) и для всех элементов которых данное семейство функций коэрцитивно. В следующих примерах указывается одно из таких множеств.

Пример 2.5. Пусть на множестве $T=\underbrace{(0,\infty)\times\ldots\times(0,\infty)}_{s}$ задано семейство функций $\{\omega_K(t)\}, K=1,\ldots,s$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\omega_K(t) \geq \xi_K(t)\left(\varepsilon_K t_K^{\gamma_K} - a_K t_1^{\lambda_K\sigma_1} t_2^{\lambda_K\sigma_2} \ldots t_{s-1}^{\lambda_K\sigma_{s-1}} t_s^{\delta_K} - C_K\right),$$

где $\xi_K : T \to [0,\infty), \varepsilon_K>0, a_K>0, C_K>0, \gamma_K>0, \lambda_K>0, \sigma_K\geq 0, \delta_K>0, \lambda_s=1, \gamma_s=\delta_s$. Зафиксируем некоторое ε, $0<\varepsilon<1$, положим $t_s=\left(\frac{C_s}{\varepsilon\varepsilon_s}\right)^{\frac{1}{\gamma_s}}$ и рассмотрим множество U_ε таких наборов положительных чисел $t_1,\ldots,t_{s-1}$, которые удовлетворяют неравенству $a_s t_1^{\sigma_1}\ldots t_{s-1}^{\sigma_{s-1}} \leq (1-\varepsilon)\varepsilon_s$. Ясно, что при выбранном значении t_s и при $(t_1,\ldots,t_{s-1})\in U_\varepsilon$ будем иметь: $\omega_s(t)\geq 0$. Далее, если положить

$$t_k = \left(\frac{a_k}{\varepsilon_k} \left(\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon_s}{a_s} \right)^{\lambda_k} \left(\frac{c_k}{\varepsilon \varepsilon_s} \right)^{\frac{\delta_k}{\gamma_s}} + \frac{c_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{\gamma_k}}$$

и по-прежнему считать, что $(t_1, \ldots, t_{s-1}) \in U_\varepsilon$, то будем иметь, очевидно, $\omega_k(t) \geq 0$ $\forall k = 1, \ldots, s-1$. Таким образом, если

$$\frac{a_s}{(1-\varepsilon)\varepsilon_s} \prod_{k=1}^{s-1} \left(\frac{a_k}{\varepsilon_k} \left(\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon_s}{a_s} \right)^{\lambda_k} \left(\frac{c_s}{\varepsilon \varepsilon_s} \right)^{\frac{\delta_k}{\gamma_s}} + \frac{c_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{\gamma_k}} \leq 1, \tag{2.2}$$

то семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $k = 1, \ldots, s$, коэрцитивно на T.

Этот результат можно усилить следующим образом. Выберем в качестве ε такое число, при котором функция от ε, стоящая в левой части неравенства (2.2), достигает минимума на интервале $(0,1)$, и которое, конечно, зависит от $\varepsilon_k, a_k, c_k, \gamma_k, \lambda_k$ и δ_k. Обозначим это число через ε_0. (В ряде случаев оно легко может быть подсчитано.) Тогда если справедливо неравенство (2.2) при $\varepsilon = \varepsilon_0$, то семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1, \ldots, s$, коэрцитивно на T.

Пример 2.6. Пусть на множестве $T = \underbrace{(0,\infty) \times \ldots \times (0,\infty)}_{s}$ задано семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1, \ldots, s$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\omega_k(t) \geq \xi_k(t) \left(\varepsilon_k t_k^{\gamma_k} - a_k t_1^{\lambda_k \sigma_1} \ldots t_s^{\lambda_k \sigma_s} - c_k \right), \tag{2.3}$$

где $\xi_k : T \to [0,\infty)$, $\varepsilon_k > 0$, $\gamma_k > 0$, $a_k > 0$, $c_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $\sigma_k > 0$.

Предположим, что неравенство

$$\prod_{k=1}^{s} \left(\frac{c_k + a_k \theta^{\lambda_k}}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{\sigma_k}{\gamma_k}} \leq \theta \tag{2.4}$$

имеет по крайней мере одно решение $\theta_0 > 0$. Тогда семейство функций $\{\omega_k(t)\}$, $k=1, \ldots, s$, коэрцитивно на T. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $t_k^{(0)} = \left(\frac{c_k + a_k \theta_0^{\lambda_k}}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{\gamma_k}}$. Легко проверить, что $\omega_k(t_1^{(0)}, \ldots, t_s^{(0)}) \geq 0$ $\forall k=1, \ldots, s$, при этом удобно воспользоваться неравенством $t_1^{(0)\sigma_1} \ldots t_s^{(0)\sigma_s} \leq \theta_0$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Пусть $s = 3$, $\lambda_k = 1$, $\sigma_k = \gamma_k$. Введем обозначения

$$\alpha_0 = \frac{c_1 c_2 c_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}, \quad \alpha_1 = 1 - \frac{a_1 c_2 c_3 + a_2 c_1 c_3 + a_3 c_1 c_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3},$$

$$\alpha_2 = \frac{a_1 a_2 c_3 + a_1 a_3 c_2 + a_2 a_3 c_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}, \quad \alpha_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}.$$

Предположим, что $\alpha_1 > 0$ и

$$\alpha_0 + \alpha_2 \theta_0^2 + \alpha_3 \theta_0^3 \leq \alpha_1 \theta_0,$$

где $\theta_0 = \frac{\sqrt{\alpha_2^2 + 3\alpha_1 \alpha_3} - \alpha_2}{3\alpha_3}$. Тогда θ_0 является искомым решением неравенства (2.4), и, значит, семейство функций (2.3) коэрцитивно на T .

2) Пусть $\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{\lambda_k \sigma_k}{\gamma_k} < 1$. Тогда неравенство (2.4) имеет положительное решение $\forall \varepsilon_k > 0$, $\forall a_k > 0$, $\forall c_k > 0$, и, значит, семейство функций (2.3) коэрцитивно на T $\forall \varepsilon_k > 0$, $\forall a_k > 0$, $\forall c_k > 0$.

3) Пусть $\frac{\lambda_k \sigma_k}{\gamma_k} > 1$ $\forall k = 1, \ldots, s$. Тогда, каково бы ни было $M > 0$, найдется такое $\delta > 0$, зависящее от M , что при $\frac{c_k}{\varepsilon_k} \leq M$, $\frac{a_k}{\varepsilon_k} \leq M$ и $\left(\frac{c_1}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{\sigma_1}{\gamma_1}} \left(\frac{c_2}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{\sigma_2}{\gamma_2}} \ldots \left(\frac{c_s}{\varepsilon_s}\right)^{\frac{\sigma_s}{\gamma_s}} \leq \delta$ семейство функций (2.3) коэрцитивно на T .

4) Пусть $\frac{\lambda_k \sigma_k}{\gamma_k} \geq 1$ $\forall k = 1, \ldots, s$ и пусть $\mathfrak{M} = \left\{ k \,\middle|\, \frac{\lambda_k \sigma_k}{\gamma_k} = 1 \right\}$. Тогда, каково бы ни было $M > 0$, найдутся такие $\delta > 0$ и δ_0, $0 < \delta_0 < 1$, зависящие от M , что при

$$\frac{c_k}{\varepsilon_k} \leq M, \frac{a_k}{\varepsilon_k} \leq M, \ 2^{\sum\limits_{k \in \mathfrak{M}} \tau_k} \sum_{k \in \mathfrak{M}} \left(\frac{c_1}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{\sigma_1}{\gamma_1}} \ldots \left(\frac{c_{k-1}}{\varepsilon_{k-1}}\right)^{\frac{\sigma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}} \left(\frac{a_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{\sigma_k}{\gamma_k}} \left(\frac{c_{k+1}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{\frac{\sigma_{k+1}}{\gamma_{k+1}}} \ldots \left(\frac{c_s}{\varepsilon_s}\right)^{\frac{\sigma_s}{\gamma_s}} \leq 1 - \delta_0 \text{ и } \prod_{k=1}^{s} \left(\frac{c_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{\sigma_k}{\gamma_k}} \leq \delta,$$

где $\tau_k = \begin{cases} \frac{\sigma_k}{\gamma_k} - 1 & \text{, если } \frac{\sigma_k}{\gamma_k} \geq 1, \\ 0 & \text{, если } \frac{\sigma_k}{\gamma_k} < 1, \end{cases}$ семейство функций (2.3) коэрцитивно на T .

§ 3. Преобразование операторных уравнений*)

До сих пор мы рассматривали операторные уравнения вида (1.1), в которых оператор G отображает некоторое подмножество Φ банахова пространства X над полем K вещественных или комплексных чисел в сопряженное пространство X^* . Для этих уравнений были указаны условия их разрешимости (теоремы 1.1 - 1.4, 2.1 и 2.3). Однако существует довольно обширный класс нелинейных операторных уравнений, каждое из которых является следствием некоторого уравнения вида (1.1)**), так что достаточные условия разрешимости уравнения вида (1.1), приведенные в §§ 1 и 2, будут служить достаточными условиями разрешимости уравнений этого класса, к описанию которого мы сейчас переходим.

Пусть $\mathcal{R}$ и H - банаховы пространства над полем K , Φ - непустое подмножество в $\mathcal{R}$, $S: \mathcal{R} \to H$ и $B: \Phi \to H$ - операторы, вообще говоря, нелинейные. Рассмотрим операторное уравнение

$$S(u) + B(u) = 0 \qquad (3.1)$$

и изучим вопрос о его разрешимости в множестве Φ .

Пусть заданы: 1) линейное замкнутое подпространство X в $\mathcal{R}$ та-

---

*) В этом параграфе получают дальнейшее развитие результаты автора, опубликованные без доказательств в заметке [9] .

**) Но, вообще говоря, не эквивалентно ему.

кое, что $\Phi\subset X$; 2) разложение подпространства X в прямую сумму линейных замкнутых подпространств: $X=Z\oplus\Lambda$, где $\Lambda\subset\ker S$; 3) некоторое отображение $\theta: Z\to X^*$; 4) линейное пространство $\operatorname{coker} S$; 5) билинейная форма $\{h,\sigma\}$ на $H\times\operatorname{coker} S$ *); 6) линейный оператор $\mathcal{E}:\Lambda\to\operatorname{coker} S$.

Обозначим через $\Pi: X\xrightarrow{\text{на}}Z$ линейный проекционный оператор, у которого $\ker\Pi=\Lambda$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $S(\mathcal{R})=\{h\in H\mid\{h,\sigma\}=0 \quad \forall\sigma\in\operatorname{coker}S\}$.

П) $\ker\Pi^*\theta=\{0\}$.

Ш) Существует такой оператор $S^{-1}: S(\mathcal{R})\to Z$, что $SS^{-1}(h)=h \quad \forall h\in S(\mathcal{R})$.

1У) Пространства $\operatorname{coker} S$ и H могут быть разложены в алгебраические суммы линейных подпространств: $\operatorname{coker} S=\mathcal{E}(\Lambda)+Q$, $H=S(\mathcal{R})\oplus V\oplus W$, обладающих свойствами: $\{h,\sigma\}=0 \quad \forall h\in W,\ \forall\sigma\in\mathcal{E}(\Lambda)$, $\{h,\sigma\}=0 \quad \forall h\in V,\ \forall\sigma\in Q$, причем $\{h,\mathcal{E}\sigma\}\le C\|h\|\|\sigma\| \quad \forall h\in V,\ \forall\sigma\in\Lambda$ $(C\in\mathbb{R})$.

Введем линейные проекционные операторы $P_1: H\xrightarrow{\text{на}}S(\mathcal{R})$, $\ker P_1=V\oplus W$, $P_2: H\xrightarrow{\text{на}}V$, $\ker P_2=S(\mathcal{R})\oplus W$, $P_3: H\xrightarrow{\text{на}}W$, $\ker P_3=S(\mathcal{R})\oplus V$, линейный оператор $F: V\to X^*$, определяемый с помощью тождества $\langle Fh,\sigma\rangle=\{h,\mathcal{E}(\sigma-\Pi\sigma)\}$ $\forall\sigma\in X$, и оператор $G:\Phi\to X^*$, действующий по формуле:

$$G(u)=\Pi^*\theta\Pi u-\Pi^*\theta S^{-1}P_1(-B(u))+FP_2B(u).$$

Т е о р е м а 3.1. <u>При выполнении условий 1-1У уравнение (3.1) является на множестве Φ следствием такой системы операторных уравнений</u>

$$\begin{cases} P_3B(u)=0, & (3.2)\\ G(u)=0. & (3.3)\end{cases}$$

<u>Если, кроме того, справедливо равенство</u> $S^{-1}S(\sigma)=\sigma \quad \forall\sigma\in Z$ <u>(для этого необходимо, чтобы</u> $\Lambda=\ker S$), <u>то уравнение (3.1) и система (3.2), (3.3) эквивалентны на</u> Φ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что система (3.2), (3.3) эквивалентна такой системе операторных уравнений:

$$P_3B(u)=0,$$
$$P_2B(u)=0, \qquad (3.4)$$
$$\Pi^*\theta\Pi u=\Pi^*\theta S^{-1}P_1(B(u)), \qquad (3.5)$$

при этом в доказательстве нуждается лишь справедливость импликации (3.3) $\Longrightarrow$ (3.4). Итак, пусть элемент $u\in\Phi$ удовлетворяет уравнению (3.3).

---

*) Форма $\{\cdot,\cdot\}: H\times\operatorname{coker}S\to K$ называется билинейной, если она линейна на H по первому аргументу и выполняется тождество:
$\{h,\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_2\}=\bar\lambda_1\{h,\sigma_1\}+\bar\lambda_2\{h,\sigma_2\} \quad \forall h\in H,\ \forall\lambda_1,\lambda_2\in K,\ \forall\sigma_1,\sigma_2\in\operatorname{coker}S.$

Положим $h = P_2 B(u)$. Так как $\Pi^*(X^*) = (\ker \Pi)^{\perp} = Q$, то из (3.3) следует, что $Fh \in Q$. Пусть v - произвольный элемент из $\operatorname{coker} S$. По условию IУ, найдутся такие элементы $y \in \Lambda$ и $w \in Q$, зависящие от v, что $v = by + w$. Имеем

$$\{h, v\} = \{h, by + w\} = \{h, by\} = \{h, b(y - \Pi y)\} = < Fh, y > = 0.$$

Мы воспользовались тем, что $h \in V$, $w \in Q$, $\Pi y = 0$ и $Fh \in Q$.

Таким образом, $\{h, v\} = 0 \quad \forall v \in \operatorname{coker} S$, так что, в силу условия 1, $h \in S(\mathcal{R})$. Но, с другой стороны, $h \in V$ и $S(\mathcal{R}) \cap V = \{0\}$, следовательно, $h = P_2 B(u) = 0$. Тем самым эквивалентность систем (3.2), (3.3) и (3.2), (3.4), (3.5) доказана.

Докажем теперь, что уравнение (3.1) есть следствие системы (3.2), (3.4), (3.5). Из равенства (3.5), в силу условия II, имеем:

$$\Pi u = S^{-1} P_1 (B(u)).$$

Воспользовавшись условием Ш и включением $\Lambda \subset \ker S$, получим отсюда

$$S(u) + P_1 B(u) = 0.$$

Складывая это равенство с равенствами (3.2) и (3.4), будем иметь равенство (3.1), поскольку $P_1 + P_2 + P_3$ - тождественный оператор на H.

Для завершения доказательства теоремы установим справедливость импликации (3.1) $\Longrightarrow$ (3.2), (3.4), (3.5) при условии, что $S^{-1} S(v) = v \quad \forall v \in Z$. Пусть элемент $u \in \Phi$ удовлетворяет уравнению (3.1). Тогда, очевидно, справедливы равенства (3.2), (3.4) и

$$S(u) = P_1(-B(u)), \tag{3.6}$$

Воспользовавшись включением $\Lambda \subset \ker S$ и соотношением $S^{-1} S(v) = v \quad \forall v \in Z$, получим такое следствие равенства (3.6):

$$\Pi u = S^{-1} P_1 (-B(u)),$$

откуда и следует равенство (3.5).

Таким образом, справедливость импликации (3.1) $\Longrightarrow$ (3.2), (3.4), (3.5) установлена. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.2. <u>При выполнении условий 1 и 1У соотношение (3.2) эквивалентно соотношению</u>

$$\{B(u), v\} = 0 \quad \forall v \in Q. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала выполнено (3.2) и пусть v - произвольный элемент из Q. Тогда (см. условие 1У)

$$\{B(u), v\} = \{P_1 B(u), v\} + \{P_2 B(u), v\} + \{P_3 B(u), v\} = 0,$$

поскольку $\{P_1 B(u), v\} = 0$ в силу того, что $P_1 B(u) \in S(\mathcal{R})$, а $v \in \operatorname{coker} S$, $\{P_2 B(u), v\} = 0$ в силу того, что $P_2 B(u) \in V$, а $v \in Q$, и, наконец, $\{P_3 B(u), v\} = 0$ в силу (3.2).

Таким образом, доказана справедливость импликации (3.2) $\Longrightarrow$ (3.7).

Покажем теперь, что (3.7) $\Longrightarrow$ (3.2). Пусть u - элемент из Φ, удовлетворяющий соотношению (3.7). Поскольку $\{P_1 B(u), \sigma\}=0 \quad \forall \sigma \in \operatorname{coker} S$, $\{P_2 B(u), \sigma\}=0 \quad \forall \sigma \in Q$, то соотношение (3.7) можно переписать так

$$\{P_3 B(u), \sigma\}=0 \quad \forall \sigma \in Q. \tag{3.8}$$

В силу условия 1У ($\{h, \sigma\}=0 \quad \forall h \in W, \forall \sigma \in \mathscr{E}(\Lambda)$ и $\mathscr{E}(\Lambda)+Q=\operatorname{coker} S$) получим из (3.8): $\{P_3 B(u), \sigma\}=0 \quad \forall \sigma \in \operatorname{coker} S$,

так что $P_3 B(u) \in S(\mathscr{R})$. Поскольку $S(\mathscr{R}) \cap W=\{0\}$ и $P_3 B(u) \in W$, то $P_3 B(u)=0$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.3. Справедливо равенство

$$\langle G(u), \sigma\rangle=\langle \theta \Pi u, \Pi \sigma\rangle-\langle \theta S^{-1} P_1(-B(u)), \sigma\rangle \quad \forall u \in \Phi, \ \forall \sigma \in Z. \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (3.9) эквивалентно такому равенству $\langle F P_2 B(u), \sigma\rangle=0 \quad \forall u \in \Phi, \forall \sigma \in Z$, которое, в свою очередь, следует из соотношения

$$\langle F h, \sigma\rangle=0 \quad \forall h \in V, \quad \forall \sigma \in Z. \tag{3.10}$$

Для доказательства (3.10) достаточно заметить, что, по определению оператора F, $\langle F h, \sigma\rangle=\{h, \mathscr{E}(\sigma-\Pi \sigma)\} \quad \forall h \in V, \ \forall \sigma \in X$ и что $\sigma-\Pi \sigma=0 \quad \forall \sigma \in Z$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.4. При выполнении условий 1 и 1У имеет место равенство

$$\langle G(u), \sigma\rangle=\{B(u), \mathscr{E}\sigma\} \quad \forall u \in \Phi, \forall \sigma \in \Lambda. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\forall u \in \Phi, \forall \sigma \in \Lambda$, учитывая, что $\Pi \sigma=0$:

$$\langle G(u), \sigma\rangle=\langle F P_2 B(u), \sigma\rangle=\{P_2 B(u), \mathscr{E}(\sigma-\Pi \sigma)\}=\{P_2 B(u), \mathscr{E}\sigma\}. \tag{3.12}$$

Далее, так как $\{P_1 B(u), \mathscr{E}\sigma\}=0 \quad \forall u \in \Phi, \ \forall \sigma \in \Lambda$ в силу того, что $P_1 B(u) \in S(\mathscr{R})$ и $\mathscr{E}\sigma \in \operatorname{coker} S$ (условие 1), и $\{P_3 B(u), \mathscr{E}\sigma\}=0 \quad \forall u \in \Phi, \ \forall \sigma \in \Lambda$, в силу того, что $P_3 B(u) \in W$ и $\{h, \sigma\}=0 \quad \forall h \in W, \ \forall \sigma \in \mathscr{E}(\Lambda)$ (условие 1У), то, учитывая равенство $P_1+P_2+P_3=I$, получим из (3.12) соотношение (3.11).

Теорема доказана.

Заметим, что непрерывность операторов Π, P_1, P_2 эквивалентна замкнутости таких пар линейных подпространств: Z и Λ, $S(\mathscr{R})$ и $V \oplus W$, V и $S(\mathscr{R}) \oplus W$.

Если наряду с условиями 1-1У предполагать еще выполнение включения $B(\Phi) \subset S(\mathscr{R}) \oplus V$ или, что то же самое, выполнение тождества

$$\{B(u), \sigma\}=0 \quad \forall u \in \Phi, \ \forall \sigma \in Q \tag{3.13}$$

(см. теорему 3.2), то, в силу теоремы 3.1, уравнение (3.1) будет следствием уравнения (3.3). Таким образом, вопрос о разрешимости уравнения (3.1) сведен к вопросу о разрешимости уравнения (3.3) с оператором G, отображающим подмножество Φ банахова пространства X в сопряженное пространство X^*, а здесь уже могут быть использованы теоремы 1.1 - 1.4, 2.1 и 2.3 о разрешимости таких уравнений. Применяя эти теоремы в сочетании с теоремами 3.1 - 3.4, можно сформулировать следующую пару утверждений (теоремы 3.5 и 3.6) о разрешимости уравнения(3.1).

Т е о р е м а 3.5. Пусть выполнены условия 1-1У и тождество (3.13). Пусть подпространства Z и Λ разложены в конечные прямые суммы линейных замкнутых подпространств: $Z=X_1\oplus\ldots\oplus X_{s_0}$ и $\Lambda=X_{s_0+1}\oplus\ldots\oplus X_s$ *), так что имеют место равенства (1.3) и (1.4). Пусть, далее, множество Φ представимо в виде: $\Phi=\sum\limits_{k=1}^{s}\varphi^{(k)}$, где $\varphi^{(k)}\subset X_k$ $\forall k=1,\ldots,s$. Сопоставим каждому $k=1,\ldots,s$ оператор $A^{(k)}:\varphi^{(k)}\to X_k$ и семейство $\mathcal{M}^{(k)}$ линейных конечномерных подпространств в X_k такое, что множество $X_k^{(0)}=\bigcup\limits_{\mu\in\mathcal{M}^{(k)}}\mu$ плотно в X_k. Предположим, что $(\varphi^{(k)}, A^{(k)}, \{X_k^{(0)}\}, \mathcal{M}^{(k)})\in\mathcal{O}(X_k)$ **) и оператор $G\in\mathcal{O}\!\ell_0(X,\Phi)$. Тогда если

$$<\theta\Pi u, A^{(k)}(u_k)>-<\theta S^{-1}P_1(-B(u)), A^{(k)}(u_k)>\bar{\in}(-\infty,0)\quad\forall u\in\partial\varphi^{(k)}+\sum_{\nu\neq k}\varphi^{(\nu)},\ \forall k=1,\ldots,s_0$$

и

$$\{B(u), \ell A^{(k)}(u_k)\}\bar{\in}(-\infty,0)\quad\forall u\in\partial\varphi^{(k)}+\sum_{\nu\neq k}\varphi^{(\nu)},\quad\forall k=s_0+1,\ldots,s,$$

то уравнение (3.1) имеет по крайней мере одно решение $u\in\Phi$.

З а м е ч а н и е (об оценке снизу числа решений операторных уравнений). Следующее утверждение удобно применять в тех случаях, когда требуется иметь информацию о мощности множества всех решений операторного уравнения. Это утверждение легко получается с помощью теоремы 3.5. Пусть заданы множества $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ произвольной природы, отображение $\mathcal{G}:\mathfrak{X}\to\mathcal{Y}$ и элемент $y\in\mathcal{Y}$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{G}(x)=y$. Пусть, далее, $\mathcal{B}=\{\varphi\}$ - семейство попарно непересекающихся между собой подмножеств в $\mathfrak{X}$ (зависящее от y). Предположим, что каждому множеству $\varphi\in\mathcal{B}$ сопоставлены все те объекты (операторы, пространства и подпространства), которые были введены в этом параграфе (в том числе и в условии теоремы 3.5), а также - отображения $\chi:\Phi\to\varphi$ и π: $(\mathcal{G}\circ\chi)(\Phi)\to H$, обладающие такими свойствами: 1) $\{z\in(\mathcal{G}\circ\chi)(\Phi),\pi(z)=0\}\Rightarrow z=y$, и 2) $\pi\circ\mathcal{G}\circ\chi=S+B$ на Φ. Пусть еще при каждом фиксированном $\varphi\in\mathcal{B}$ выполнены условия теоремы 3.5. Тогда мощность множества всех решений уравнения $\mathcal{G}(x)=y$ не меньше мощности семейства $\mathcal{B}$.

При формулировке теоремы 3.6 мы используем обозначения, введенные в § 2 перед теоремой 2.3, при этом предполагается, что множество $\bigcup\limits_{t\in T}\Phi_t$ расположено в множестве Φ, на котором определен оператор B.

Т е о р е м а 3.6. Пусть выполнены условия 1-1У и тождество (3.13). Пусть, далее, подпространства Z и Λ разложены в конечные пря-

---

*) Нам удобно будет считать, что $0<s_0<s$, поэтому X_k при любом $k=1,\ldots,s$ может быть тривиальным подпространством.

**) См. определение 1.3. (Напомним, что $\mathcal{M}^{(k)}=\{X_k\}$ при $dim\,X_k<\infty$.)

мые суммы линейных замкнутых подпространств: $Z = X_1 \oplus \ldots \oplus X_{s_0}$ и $\Lambda = X_{s_0+1} \oplus \ldots \oplus X_s$, так что имеют место равенства (1.3) и (1.4). Предположим, что оператор $G \in \mathcal{A}_0(X, \Phi_t)$ $\forall t \in T$ и семейство из s функций

$$\{\inf_{u \in \varphi_t^{(\kappa)}} Re(<\theta \Pi u, A_{t_\kappa}^{(\kappa)}(u_\kappa)> - <\theta S^{-1} P_1(-B(u)), A_{t_\kappa}^{(\kappa)}(u_\kappa)>)\}_{\kappa=1,\ldots,s_0},$$

$$\{\inf_{u \in \varphi_t^{(\kappa)}} Re\{B(u), \mathcal{E} A_{t_\kappa}^{(\kappa)}(u_\kappa)\}\}_{\kappa=s_0+1,\ldots,s},$$

коэрцитивно на множестве T. Тогда уравнение (3.1) имеет по крайней мере одно решение $u \in \bigcup_{t \in T} \Phi_t$.

Замечание (о выборе оператора θ). Укажем вид оператора θ в следующих трех наиболее распространенных ситуациях.

1. $H = \mathcal{R}^*$, S, S^{-1}, Π и P_1 – нулевые операторы, $X = \Lambda$, $Z = \{0\}$, $coker\, S = \mathcal{R} = \Lambda \oplus Q$, $V = Q^\perp$, $W = \Lambda^\perp$, $\{h, v\} = <h, v>$ $\forall h \in \mathcal{R}^*$, $\forall v \in \mathcal{R}$, $\mathcal{E}$ – оператор вложения Λ в $\mathcal{R}$, $<Fh, v> = <h, v>$ $\forall h \in V$, $\forall v \in \Lambda$. В этом случае в качестве θ можно взять нулевой оператор, так что будем иметь равенство $G = B$.

2. Для широкого класса пространств X могут быть указаны такой непрерывный оператор $\theta: Z \to X^*$ и такое число $p \in (1, \infty)$, что $<\theta(u) - \theta(v), u - v> > 0$ $\forall u, v \in Z, u \neq v$, $\|\theta(u)\| = \|u\|^{p-1}$ и $<\theta(u), u> = \|u\|^p$ $\forall u \in Z$. Такими пространствами являются, например, все гильбертовы пространства, а также все линейные подпространства пространства С.Л.Соболева $W_p^m(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$ (здесь Ω – область в R^n). Заметим, что если $Z = \{0\}$, то нулевой оператор $\theta: Z \to X^*$ удовлетворяет всем перечисленным выше трем соотношениям при любом $p \in (1, \infty)$.

3. Пространство Z и пространство X разложены в прямые суммы замкнутых линейных подпространств: $Z = Z^{(1)} \oplus \ldots \oplus Z^{(N)}$ и $X = X^{(1)} \oplus \ldots \oplus X^{(N)}$, причем $Z^{(\kappa)} \subset X^{(\kappa)}$ $\forall \kappa = 1, \ldots, N$. Соответствующее разложение для элемента $u \in X$ будем записывать в виде $u = u_1 + \ldots + u_N$. Предположим, что при каждом фиксированном $\kappa = 1, \ldots, N$ найдется такой непрерывный оператор $\theta_\kappa: Z^{(\kappa)} \to X^{(\kappa)*}$ и такое число $p_\kappa \in (1, \infty)$, что $<\theta(u) - \theta(v), u - v> > 0$ $\forall u, v \in Z^{(\kappa)}$, $u \neq v$,

$$\|\theta_\kappa(u)\| = \|u\|^{p_\kappa - 1} \text{ и } <\theta_\kappa(u), u> = \|u\|^{p_\kappa} \quad \forall u \in Z^{(\kappa)}.$$

(Случай, когда $Z = \{0\}$ и θ_κ – нулевой оператор, не исключается.) Тогда оператор $\theta: Z \to X^*$ может быть определен следующим образом $\theta(u) = (\theta_1(u_1), \ldots, \theta_N(u_N))$.

В заключение этого параграфа приведем несколько простейших примеров на применение теоремы 3.6 с учетом утверждений о коэрцитивности некоторых конкретных семейств функций, сформулированных в § 2. В этих примерах рассматриваются различные системы дифференциальных уравнений, так что разложение пространства X в прямую сумму подпространств, о котором идет речь в теореме 3.6, порождается здесь естественным разложением неизвестной вектор-функции на отдельные компоненты*). Будем считать все встречающиеся ниже в этом параграфе функциональные пространства вещественными ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$), а теорему 3.6 будем применять в следующей ситуации: $\Phi = X = \mathcal{R}$; $T_k = (0, \infty)$ $\forall k = 1, \dots, s$; $\varphi^{(k)}_{t_k} = \{u_k \in X_k \mid \|u_k\| \le t_k\}$ $\forall t_k > 0$, $\forall k = 1, \dots, s$; $A^{(k)}_{t_k}$ – тождественный оператор $\forall t_k \in T_k$, $\forall k = 1, \dots, s$ и, наконец, $\mathcal{M}_k$ при $dim\, X_k = \infty$ – совокупность всех линейных конечномерных подпространств в X_k **). Заметим, далее, что во всех примерах этого параграфа пространство $\mathcal{R}$ рефлексивно, а оператор G, построенный выше по операторам S и B, псевдомонотонен. Оператор S в примере 3.1 обратим, а в примерах 3.2–3.5 он является нулевым; подпространство Q тривиально во всех примерах; подпространство Λ в примере 3.1 тривиально, а в примерах 3.2–3.5 совпадает с $\mathcal{R}$; в примере 3.6 нетривиальны оба подпространства Z и Λ; число нетривиальных подпространств разложения $X = \sum\limits_{k=1}^{s} X_k$ в примерах 3.1 и 3.3 равно 3, в примере 3.2 – 2, а в примере 3.6 – 4; пространство H в примерах 3.2 – 3.5 совпадает с пространством $\mathcal{R}^*$, а билинейная форма $\{h, v\}$ – с канонической билинейной формой, приводящей в двойственность пространства $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}$; пространство $coker\, S$ и билинейная форма $\{h, v\}$ в примере 3.6 выбираются в соответствии с общей теорией регулярных эллиптических краевых задач [8, стр. 165–178] (см. также § 4), и, наконец, оператор θ в примерах 3.2–3.5 нулевой, а в примерах 3.1 и 3.6 он выбирается согласно пунктам 2 и 3 сделанного в этом параграфе соответствующего замечания о выборе θ (см. выше).

П р и м е р 3.1. Задача Коши $u_k(t_0) = a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, для системы

$$\dot{u}_k = f_k(t, u_1, u_2, u_3), \quad k = 1, 2, 3,$$

где $f_k \in C(\mathbb{R}^4)$ и $|f_k| \le A_k(t)|u_1|^{\sigma_{k1}}|u_2|^{\sigma_{k2}}|u_3|^{\sigma_{k3}} + B_k(t)$, $A_k, B_k \in C(\mathbb{R})$, $\sigma_{kj} > 0$, разрешима в пространстве $W_2^1(\alpha,\beta) \times W_2^1(\alpha,\beta) \times W_2^1(\alpha,\beta)$ для любого интервала $(\alpha,\beta) \ni t_0$, если (см. пример 2.1) $\sigma_{kk} < 1$ и

$$\frac{\sigma_{12}\sigma_{21}}{(1-\sigma_{11})(1-\sigma_{22})} + \frac{\sigma_{13}\sigma_{31}}{(1-\sigma_{11})(1-\sigma_{33})} + \frac{\sigma_{23}\sigma_{32}}{(1-\sigma_{22})(1-\sigma_{33})} + \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{21}\sigma_{13}\sigma_{32}}{(1-\sigma_{11})(1-\sigma_{22})(1-\sigma_{33})} < 1.$$

Аналогичный результат справедлив для систем, содержащих производные более высоких порядков, а также для задач, отличных от задачи Коши (например, для задачи на отыскание периодических решений).

---

*) В примере 3.6, кроме того, пространство каждой компоненты неизвестной вектор-функции дополнительно раскладывается в прямую сумму еще двух линейных подпространств, связанных с поставленной для этой компоненты краевой задачей.

**) Напомним, что если $dim\, X_k < \infty$, то $\mathcal{M}_k = \{X_k\}$ (см. § 1).

П р и м е р 3.2. Рассмотрим в области $\Omega \subset R^{n}$ *) следующую систему дифференциальных уравнений дивергентного вида:

$$\sum_{|\alpha|=m_k} \mathcal{D}^\alpha \left(|\mathcal{D}^\alpha u_k|^{p_k-1} \operatorname{sgn} \mathcal{D}^\alpha u_k \right) + \mu_k(x,u_1,u_2) = f_k(x), \quad k=1,2, \tag{3.14}$$

где $p_k>1$, m_k - натуральное число, $p_k m_k > n$, $\mu_k(x,\xi_1,\xi_2)$ удовлетворяет условию Каратеодори и неравенству $|\mu_k(x,\xi_1,\xi_2)| \le A|\xi_1|^{\sigma_{k1}}|\xi_2|^{\sigma_{k2}}$, $\sigma_{k1}>0$, $\sigma_{k2}>0$, $\sigma_{22}>p_2-1$. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{m_1}_{p_1}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^{m_2}_{p_2}(\Omega)$ система (3.14) имеет по крайней мере одно обобщенное решение $\forall f_1 \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_1}_{p_1}(\Omega))^*$ и $\forall f_2 \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_2}_{p_2}(\Omega))^*$, $\|f_2\|<\delta$, где $\delta>0$ зависит от f_1 (см. пример 2.3, случай 20).

П р и м е р 3.3. Система

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=m_1} \mathcal{D}^\alpha (|\mathcal{D}^\alpha u_1|^2 \operatorname{sgn}\mathcal{D}^\alpha u_1) + a_1(x)u_2^4 + b_1(x)u_3^3 = f_1(x),\\
&\sum_{|\alpha|=m_2} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{D}^\alpha u_2)^3 + a_2(x)u_1 + b_2(x)u_3^2 = f_2(x),\\
&\sum_{|\alpha|=m_3} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{D}^\alpha u_3)^5 + a_3(x)u_1^3 + b_3(x)u_2^8 = f_3(x),
\end{aligned}$$

при $3m_1>n$, $4m_2>n$, $6m_3>n$, $a_k, b_k \in L_\infty(\Omega)$ разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{m_1}_3(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^{m_2}_4(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^{m_3}_6(\Omega)$ $\forall f_k \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{p_k}(\Omega))^*$, $\forall k=1,2,3$. **)

П р и м е р 3.4. Система

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=m_1} \mathcal{D}^\alpha (|\mathcal{D}^\alpha u_1|^{\gamma_1} \operatorname{sgn}\mathcal{D}^\alpha u_1) + a_1(x)|u_1|^{\sigma_{11}}|u_2|^{\sigma_{12}}|u_3|^{\sigma_{13}} = f_1(x),\\
&\sum_{|\alpha|=m_2} \mathcal{D}^\alpha (|\mathcal{D}^\alpha u_2|^{\gamma_2} \operatorname{sgn}\mathcal{D}^\alpha u_2) + a_2(x)|u_1|^{\sigma_{21}}|u_2|^{\sigma_{22}}|u_3|^{\sigma_{23}} = f_2(x),\\
&\sum_{|\alpha|=m_3} \mathcal{D}^\alpha (|\mathcal{D}^\alpha u_3|^{\gamma_3} \operatorname{sgn}\mathcal{D}^\alpha u_3) + a_3(x)|u_1|^{\sigma_{31}}|u_2|^{\sigma_{32}}|u_3|^{\sigma_{33}} = f_3(x)
\end{aligned}$$

при $(\gamma_k+1)m_k>n$, $a_k \in L_\infty(\Omega)$, $\gamma_k>0$, $\sigma_{kj}>0$, $\gamma_3<\sigma_{33}$, $\gamma_1>\sigma_{11}+\frac{\sigma_{31}\sigma_{13}}{\gamma_3-\sigma_{33}}$, $\sigma_{21}+\frac{\sigma_{23}\sigma_{31}}{\gamma_3-\sigma_{33}}<0$, $\gamma_2=\sigma_{22}+\frac{\sigma_{32}\sigma_{23}}{\gamma_3-\sigma_{33}}$ разрешима в пространстве $\prod_{k=1}^{3} \overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{\gamma_k+1}(\Omega)$ $\forall f_1 \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_1}_{\gamma_1+1}(\Omega))^*$ $\forall f_2 \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_2}_{\gamma_2+1}(\Omega))^*$ и $\forall f_3 \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_3}_{\gamma_3+1}(\Omega))^*$, $\|f_3\|<\delta$, где $\delta>0$ зависит от f_1 и f_2 (см. пример 2.4 и пример 2.3, случай 9).

П р и м е р 3.5. Рассмотрим систему

$$\sum_{|\alpha|=m_k} \mathcal{D}^\alpha (|\mathcal{D}^\alpha u_k|^{\gamma_k} \operatorname{sgn}\mathcal{D}^\alpha u_k) + A_k(x)|u_1|^{\lambda_k\sigma_1}\dots|u_s|^{\lambda_k\sigma_s} = f_k(x), \quad k=1,\dots,s, \tag{3.15}$$

где $(\gamma_k+1)m_k>n$, $A_k(x) \in L_\infty(\Omega)$, $f_k \in (\overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{\gamma_k+1}(\Omega))^*$, $\gamma_k>0$, $\lambda_k>0$, $\sigma_k>0$.

Ясно, что k-е уравнение системы (3.15) порождает оператор G_k: $\prod_{k=1}^{s} \overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{\gamma_k+1}(\Omega) \longrightarrow (\overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{\gamma_k+1}(\Omega))^*$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle G_k(u_1,\dots,u_s),u_k\rangle - \langle f,u_k\rangle \ge \xi_k(t)\left(\varepsilon_k t_k^{\gamma_k} - a_k t_1^{\lambda_k\sigma_1}\dots t_s^{\lambda_k\sigma_s} - c_k\right),$$

---

*) Здесь и во всех остальных примерах этого параграфа предполагается, что Ω - ограниченная область в R^n с достаточно гладкой $(n-1)$ - мерной границей $\partial\Omega$. Точки Ω обозначаются через x, точка $\partial\Omega$ - через x'.

**) См. пример 2.2.

в котором $\varepsilon_k > 0$, $a_k > 0$, $c_k = \|f_k\|$, $\xi_k(t) = t_k$, $t_1 = \|u_1\|, \dots, t_\lambda = \|u_\lambda\|$. Таким образом, в силу теоремы 3.6, для разрешимости системы (3.15) в пространстве $\prod_{k=1}^{\lambda} \overset{\circ}{W}{}^{m_k}_{\gamma_k+1}(\Omega)$ достаточно, чтобы было коэрцитивным семейство функций (2.3). (В примере 2.6 исследованы некоторые случаи коэрцитивности этого семейства.)

Пример 3.6. Рассмотрим следующую краевую задачу для системы, содержащей две неизвестные функции (см. сноску к примеру 3.2):

$$\sum_{|\alpha|\le 2m_i} a_\alpha^{(i)}(x)\mathcal{D}^\alpha u_i + \mu_i\left(x, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,i)}} u_i, \dots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_i,i)}} u_i, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,j)}} u_j, \dots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_j,j)}} u_j\right) = h_i(x) \text{ в } \Omega \ (i,j=1,2,\ i\ne j), \qquad (3.16)$$

$$\sum_{|\beta|\le m_j^{(i)}} b_{j\beta}^{(i)}(x')\mathcal{D}^\beta u_i = g_j^{(i)}(x') \quad \text{на } \partial\Omega \ (j=0,\dots,m^{(i)}-1;\ i=1,2), \qquad (3.17)$$

где $m_i, m_j^{(i)}, N_i$ – натуральные числа, $a_\alpha^{(i)}(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $b_{j\beta}^{(i)}(x') \in C^\infty(\partial\Omega)$, $\alpha^{(k,i)}$, $k=1,\dots,N_i$, – все мультииндексы, не превосходящие по модулю $2m_i-1$, $\mu_i : \Omega \times R^{N_1} \times R^{N_2} \to R$ – функции, удовлетворяющие условию Каратеодори и неравенствам: $|\mu_i(x, \xi^{(1)}, \xi^{(2)})| \le B_i(x) + C_i(1 + |\xi^{(i)}|^{\delta_i})(1+|\xi^{(j)}|^{\gamma_i})$, в которых $i,j=1,2$, $i\ne j$, $B_i \in L_{p_i}(\Omega)$, $1 < p_i < \infty$, $C_i \in R$, $0 < \delta_i < 1$, $\gamma_i > 0$.

Предположим, что при $\mu_i = 0$ $\forall i=1,2$ краевая задача (3.16), (3.17) распадается на две регулярные эллиптические задачи $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Пусть Λ_i – нетривиальное линейное подпространство в $\ker \mathfrak{M}_i$ и $b_i : \Lambda_i \xrightarrow{\text{на}} \ker \mathfrak{M}_i^*$. Пусть, далее, функция μ_i удовлетворяет соотношению

$$\mu_i(x, t\xi^{(i)}, \xi^{(j)}) = t^{\delta_i}\mu(x, \xi^{(i)}, \xi^{(j)}) \quad \forall t>0,\ \forall x\in\Omega,\ \forall \xi^{(i)}\in R^{N_i},\ \forall \xi^{(j)}\in R^{N_j}\ (i,j=1,2,\ i\ne j)$$

и неравенствам

$$\inf_{\substack{u_j \in W_{p_j}^{2m_j}(\Omega) \\ \xi\in\Lambda_i,\ \|\xi\|=1,\ i\ne j}} \int_\Omega \mu_i\left(x, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,j)}} u_j, \dots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_j,j)}} u_j, \mathcal{D}^{\alpha^{(1,i)}} \xi, \dots, \mathcal{D}^{\alpha^{(N_i,i)}} \xi\right) b_i \xi\, dx > 0,$$

$$|\mu_i(x, \xi^{(i)}, \xi^{(j)}) - \mu_i(x, \eta^{(i)}, \xi^{(j)})| \le \nabla_i(x)\left(1 + |\xi^{(j)}|^{\gamma_i}\right) \times$$
$$\times\ |\xi^{(i)} - \eta^{(i)}|^{\delta_i} \quad \forall x\in\Omega,\ \forall \xi^{(j)}\in R^{N_j},\ \forall \xi^{(i)}, \eta^{(i)} \in R^{N_i},$$

где $\nabla_i(x) \in L_{p_i}(\Omega)$.

Предположим ещё, что $\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\delta_1\delta_2}\,\dfrac{1+\delta_1}{1-\delta_1}\,\dfrac{1+\delta_2}{1-\delta_2} < 1$. Тогда из теоремы 3.6 следует, что краевая задача (3.16), (3.17) разрешима в пространстве – $W_{p_1}^{2m_1}(\Omega) \times W_{p_2}^{2m}(\Omega)$ $\forall h_i \in L_{p_i}(\Omega)$, $\forall g_j^{(i)} \in W_{p_i}^{2m_i - m_j^{(i)} - \frac{1}{p_i}}(\partial\Omega)$ $(j=0,\dots,m_i-1;\ i=1,2)$.

Возможность применения теоремы 3.6 следует из коэрцитивности на множестве $T=(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)$ следующего семейства, состоящего из четырех функций:

$$\omega_1(t) = t_1\left(t_1 - K_1(1+(t_1+t_2)^{\delta_1})(1+(t_3+t_4)^{\gamma_1}) - c_1\right),$$
$$\omega_2(t) = t_2\left(t_2^{\delta_1} - M_1(1+(t_3+t_4)^{\gamma_1})t_1^{\delta_1} - c_2\right),$$

$$\omega_3(t)=t_3\left(t_3-K_2(1+(t_3+t_4)^{\delta_2})(1+(t_1+t_2)^{\gamma_2})-C_3\right),$$
$$\omega_4(t)=t_4\left(t_4^{\delta_2}-M_2(1+(t_1+t_2)^{\gamma_2})t_3^{\delta_2}-C_4\right),$$

где $K_i \geq 0$, $M_i \geq 0$, $i=1,2$, $C_k \geq 0$, $k=1,2,3,4$.

§ 4. О некоторых специальных классах нелинейных операторных уравнений

Пусть, как и выше, $\mathcal{R}$ и H – банаховы пространства над полем K, Φ – непустое подмножество в $\mathcal{R}$, $S: \mathcal{R} \to H$, $B: \Phi \to H$ – операторы, вообще говоря, нелинейные.

Будем изучать нелинейное операторное уравнение

$$S(u) + B(u) = h \tag{4.1}$$

с правой частью $h \in H$ и неизвестным элементом $u \in \Phi$.

Это уравнение можно записать, конечно, в виде (3.1) и проверять выполнение для него условий теорем 3.5 и 3.6. Однако в тех случаях, когда требуется описать область значений оператора $S+B$, удобнее рассматривать уравнение вида (4.1) и указывать условия его разрешимости в терминах оператора B и правой части h.

Если оператор S удовлетворяет условиям I–IУ из § 3, оператор B – тождеству (3.13), а правая часть $h \in H_0$, где

$$H_0 = \{h \in H \mid \{h, v\} = 0 \quad \forall v \in Q\}, \tag{4.2}$$

то, как следует из теорем 3.1 и 3.2, уравнение (4.1) является следствием уравнения

$$G^{(h)}(u) = 0, \tag{4.3}$$

в котором оператор $G^{(h)}: \Phi \to X^*$ действует по формуле

$$G^{(h)}(u) = \Pi^* \theta \Pi u - \Pi^* \theta S^{-1} P_1 (h - B(u)) + F P_2 (B(u) - h). \tag{4.4}$$

Мы рассмотрим здесь два класса операторных уравнений вида (4.1), являющихся следствиями операторных уравнений вида (4.3).

К первому классу мы отнесем уравнения вида (4.1) с ненулевым хаусдорфовым оператором S (определение 4.1), для которого, как будет показано ниже, выполнены условия I, Ш, IУ из § 3, и оператором B таким, что соответствующий оператор $G^{(h)} \in \mathfrak{A}_0(\mathcal{R}, \Phi)$ $\forall h \in H_0$. Ясно, что для операторов этого класса проверку условий I, Ш, IУ в теоремах 3.5 и 3.6 можно опустить. В теореме 4.1 мы приводим достаточные условия того, что $G^{(h)} \in \mathfrak{A}_0(\mathcal{R}, \Phi)$ $\forall h \in H_0$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Оператор $S \in [\mathcal{R} \to H]$ называется х а у с д о р ф о в ы м о п е р а т о р о м, если множество $S(\mathcal{R})$ замкнуто в H и существуют такие линейные замкнутые подпространства Δ и ∇

в пространствах $\mathfrak{R}$ и H соответственно, что $\mathfrak{R}=\Delta\oplus\ker S$ и $H=S(\mathfrak{R})\oplus\nabla$. Если, кроме того, $\dim\Delta<\infty$ и $\dim\nabla<\infty$, то хаусдорфов оператор называется нётеровым.

Вот некоторые из разделов теории линейных дифференциальных и интегральных уравнений, в которых возникают хаусдорфовы операторы: краевые задачи на компактном промежутке для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений (в частности, задачи на отыскание периодических решений); системы интегральных уравнений Фредгольма; системы сингулярных интегральных уравнений; краевые задачи в ограниченной области для систем дифференциальных уравнений, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу; уравнения в свертках; краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области; задачи на отыскание периодических решений дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными.

Для хаусдорфова оператора S всегда могут быть указаны линейное пространство $\operatorname{coker} S$ и определенная на $H\times\operatorname{coker} S$ билинейная форма $\{h,v\}$, которая задает область его значений $S(\mathfrak{R})$ с помощью соотношения

$$S(\mathfrak{R})=\{h\in H\,|\,\{h,v\}=0\quad\forall v\in\operatorname{coker} S\}. \tag{4.4}$$

Действительно, если в качестве $\operatorname{coker} S$ взять пространство

$$\ker S^*=\{v\in H^*\,|\,<v,h>=0\quad\forall h\in S(\mathfrak{R})\},$$

а в качестве $\{h,v\}$ – каноническую билинейную форму $<h,v>$, приводящую в двойственность пространства H^* и H *), то соотношение (4.4), очевидно, выполняется (см. [10, стр. 13–15]). Однако с рядом конкретных линейных задач теории дифференциальных и интегральных уравнений естественным образом оказываются связанными вполне определенное пространство $\operatorname{coker} S$ **), которое, как правило, является ядром некоторой формально сопряженной задачи того же вида, что и исходная, и билинейная форма $\{h,v\}$, вид которой удобен для проверки условий разрешимости неоднородного уравнения $Su=h$, а следовательно, и условий разрешимости нелинейного операторного уравнения вида (4.1). Приведем некоторые примеры.

Пример 4.1. Пусть $\mathfrak{R}$ – гильбертово пространство, $S\in[\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}]$ и подпространство $S(\mathfrak{R})$ замкнуто в $\mathfrak{R}$. Тогда в качестве $\operatorname{coker} S$ можно взять подпространство $\ker S^*$, а в качестве билинейной формы $\{h,v\}$ – ска-

---

*) Напомним (см. § 1), что функционал $v\in H^*$ обладает свойством:

$$<v,\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2>=\bar\lambda_1<v,h_1>+\bar\lambda_2<v,h_2>.$$

**) Оно состоит, как правило, не из функционалов над H, а из элементов исходного пространства $\mathfrak{R}$.

лярное произведение (h,v) в $\mathcal{R}$.

Пример 4.2. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода
$$u(x)-\int_{\Omega} L(x,y)u(y)dy = h(x),$$
где Ω - компакт в R^n, $L(x,y)$ - комплекснозначная непрерывная на $\Omega\times\Omega$ функция, $h(x)$ и $u(x)$ соответственно заданная и неизвестная комплексно - значные функции из $L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$. В этом случае S действует по формуле: $Su(x)=u(x)-\int L(x,y)u(y)dy$, в качестве $\operatorname{coker} S$ можно взять совокупность всех решений сопряженного однородного уравнения $v(y)-\int_{\Omega}\overline{L(x,y)}v(x)dx = 0$, а в качестве билинейной формы $\{h,v\}$ - выражение $\int_{\Omega} h(x)\overline{v(x)}dx.$ Аналогичное утверждение справедливо для систем интегральных уравнений Фредгольма, а также для систем сингулярных интегральных уравнений.

Пример 4.3. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ линейное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка r: $\mathcal{L}u(t)=f(t)$, $0\leq t\leq 1$, с достаточно гладкими вещественными коэффициентами и коэффициентом при старшей производной, равным 1. Рассмотрим для него краевую задачу $b_j(u)=g_j$, $j=1,\ldots,m$, где $\{b_j(u)\}_{j=1,\ldots,m}$ - заданная система линейно-независимых линейных форм от $2r$ переменных: $u(0),\ldots,u^{(r-1)}(0),u(1),\ldots,u^{(r-1)}(1)$. Будем рассматривать оператор этой задачи S, действующий из вещественного пространства $\mathcal{R}=W_p^r(0,1)$, $1<p<\infty$, в вещественное пространство $H=L_p(0,1)\times R^m$. Тогда известно [10, стр. 84-91], что этот оператор нётеров, причем в качестве пространства $\operatorname{coker} S$ можно взять ядро некоторой краевой задачи для оператора $\mathcal{L}^*$, формально сопряженного к $\mathcal{L}$ (она явно выписывается по исходной краевой задаче), а билинейную форму $\{h,v\}$ можно выбрать при этом в виде $\{h,\sigma\}=\int_0^1 f(\sigma)dt+\sum_{j=1}^m g_j S_j^+(\sigma)$, где $h=(f(t),g_1,\ldots,g_m)$ и S_j^+: $\operatorname{coker} S\to R^0$-линейные операторы, которые строятся по линейным формам b_j. Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и в комплексном случае, а также в случае, когда вместо уравнения рассматривается система, вместо пространства $L_p(0,1)$ - более общее пространство $W_p^{\ell}(0,1)$, а вместо краевой задачи - более общие задачи, например, такие, где задаются значения неизвестной функции и ее производных в точках, расположенных внутри отрезка $[0,1]$.

Пример 4.4. Пусть Ω - ограниченное открытое связное множество с границей $\partial\Omega$, представляющей собой бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$. Точки Ω обозначаются через x, а точки $\partial\Omega$ - через x'.

Рассмотрим для системы дифференциальных уравнений
$$\mathcal{L}(x,\mathcal{D})u(x)=f(x) \text{ в } \Omega, \tag{4.5}$$

эллиптической в смысле Дуглиса-Ниренберга, краевую задачу

$$\ell(x',\mathcal{D})u = g(x') \text{ на } \partial\Omega, \tag{4.6}$$

где $u(x)=(u_1(x),\dots,u_N(x))$, $f(x)=(f_1(x),\dots,f_N(x))$, $g(x')=(g_1(x'),\dots,g_m(x'))$ – комплекснозначные вектор-функции. Для простоты будем считать, что коэффициенты всех операторов бесконечно гладкие. Предположим, что оператор $\ell(x',\mathcal{D})$ накрывает оператор $\mathcal{L}(x,\mathcal{D})$. Тогда известно, что оператор $S=(\mathcal{L},\ell)$ является нётеровым, как оператор из пространства $\prod\limits_{j=1}^{N} W_p^{\ell+t_k}(\Omega)$ в пространство $\prod\limits_{i=1}^{N} W_p^{\ell-s_i}(\Omega)\times\prod\limits_{j=1}^{m} W_p^{\ell-m_j-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ *) (обозначения см. в [8, стр. 175, 176]). В ряде ситуаций область значений оператора S может быть описана с помощью ядра формально сопряженной относительно формулы Грина задачи (см. по этому поводу [8, 16, 17]). Например, если $N=1$ и граничный оператор $\ell(x',\mathcal{D})$ нормален, то в качестве $\operatorname{coker} S$ может быть взято ядро формально сопряженной задачи, а билинейная форма $\{h,\sigma\}$ может быть записана в виде:

$$\{h,\sigma\} = \int\limits_{\Omega} f\bar{v}\,dx + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\partial\Omega} g_j\,\overline{S_j^{+}v}\,dx', \tag{4.7}$$

где положено $h(x) = (f(x), g_1(x'),\dots, g_m(x'))$.

П р и м е р 4.5. Пусть U – комплексное гильбертово пространство, $\omega=\{\omega_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ – счетная совокупность векторов из R^n, $\Sigma(U,\omega)$ – линейное пространство формальных комплексных тригонометрических рядов вида $u(x)=\sum\limits_{\beta\in\mathcal{B}} u_\beta \dfrac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}$, где $x\in R^n$, $u_\beta\in U$, а $q>0$ – фиксированная константа. Пусть $S:\Sigma(U,\omega)\to\Sigma(U,\omega)$ – оператор, действующий по формуле: $Su=\sum\limits_{\beta\in\mathcal{B}} S_\beta u_\beta\dfrac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}$, где $S_\beta\in[U\to U]$. Важным примером такого оператора является дифференциальный оператор $S(\mathcal{D})=\sum\limits_{|\alpha|\le m}\mathcal{D}^\alpha a_\alpha$ с постоянными операторными коэффициентами $a_\alpha\in[U\to U]$ (в этом случае $S_\beta=S(i\omega_\beta)$). Предположим, что множество $S_\beta(U)$ замкнуто в U $\forall\beta\in\mathcal{B}$. Свяжем теперь с оператором S некоторое гильбертово пространство $\mathcal{R}$, в котором в дальнейшем будем отыскивать решения операторного уравнения (4.1). Пусть $\mathcal{X}=\{\mathcal{X}_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ и $\chi=\{\chi_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ – два семейства изоморфизмов пространства U на себя**) таких, что имеет место неравенство

---

*) Все пространства здесь считаются комплексными.

**) В случае, когда $\mathcal{B}$ – совокупность целочисленных n-мерных векторов, практически важным примером таких семейств изоморфизмов, порождающих пространства дифференцируемых в обобщенном смысле функций со значениями в U, является семейство изоморфизмов следующего вида: $\{(1+|\beta|^2)^{\frac{\ell}{2}} I\}$, где $\ell\geqslant 0$, а $I:U\to U$ – тождественный оператор.

$$|\mathscr{x}_\beta S_\beta w| \geqslant \varepsilon|\chi_\beta w| \quad \forall w\in(\ker S_\beta)^\perp, \quad \forall\beta\in\mathscr{B} \tag{4.8}$$

с константой $\varepsilon>0$, не зависящей от w и β. Обозначим через H гильбертово пространство формальных тригонометрических рядов из $\Sigma(U,\omega)$ с конечной нормой

$$|u(x)|_H=\sqrt{\sum_{\beta\in\mathscr{B}}|\mathscr{x}_\beta u_\beta|^2}, \tag{4.9}$$

а через $\mathscr{R}$ – гильбертово пространство формальных тригонометрических рядов из $\Sigma(U,\omega)$ с конечной нормой

$$\|u(x)\|_{\mathscr{R}}=\sqrt{\sum_{\beta\in\mathscr{B}}(\|\chi_\beta u_\beta\|^2+\|\mathscr{x}_\beta S_\beta u_\beta\|^2}. \tag{4.10}$$

Легко показать, что оператор $S\in[\mathscr{R}\to H]$, причем множество $S(\mathscr{R})$ замкнуто в H и, таким образом, оператор S при отображении $\mathscr{R}$ в H является хаусдорфовым оператором. В качестве $\operatorname{coker} S$ в данном случае может быть взята совокупность всех формальных комплексных тригонометрических рядов вида: $v(x)=\sum_{\beta\in\mathscr{B}} v_\beta \frac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}$, где $v_\beta\in\ker S_\beta^*$ и $v_\beta\neq 0$ разве лишь для конечного множества индексов β, а в качестве $\{h,v\}$ – билинейная форма $\sum_{\beta\in\mathscr{B}}(h_\beta,v_\beta)_U$, непрерывная на H по аргументу h при зафиксированном $v\in\operatorname{coker} S$.

П р и м е р 4.6. Пусть справедливы все обозначения предыдущего примера. Рассмотрим чисто периодический случай, а именно предположим, что $\mathscr{B}$ – множество всех целочисленных n-мерных векторов, $\omega_\beta=2\pi(J^{-1})^*\beta$, J – вещественная невырожденная матрица порядка n и $q=|\det J|$. Здесь важно отметить тот факт, что если H вкладывается в пространство $L_2(U,J)$ *), то, в силу равенства Парсеваля, имеет место соотношение

$$\{h,v\}=\int_{\Omega_J}(h(x),v(x))_U\,dx \quad \forall h(x)\in H, \quad \forall v(x)\in\operatorname{coker} S, \tag{4.11}$$

где Ω_J – образ при отображении $J:R^n\to R^n$ единичного куба $\{x\in R^n \mid 0<x_j<1,\ j=1,\dots,n\}$.

П р и м е р 4.7. В примерах 4.5 и 4.6 мы рассмотрели случаи комплексных пространств $\mathscr{R}$ и H. Сейчас мы опишем построение этих пространств в вещественном случае. Пусть U – вещественное гильбертово пространство. Его комплексное расширение мы обозначим через $\mathbf{U}$. Скалярное произведение в $\mathbf{U}$ зададим равенством:

$$(u_1+iu_2,\ v_1+iv_2)_{\mathbf{U}}=(u_1,v_1)_U+(u_2,v_2)_U+$$
$$+i((u_2,v_1)_U-(u_1,v_2)_U) \quad \forall u_1,u_2,v_1,v_2\in U.$$

---

*) Если $\mathscr{X}$ – банахово пространство, то через $L_2(\mathscr{X},J)_{loc}$ мы будем обозначать банахово пространство абстрактных функций из $L_2^{loc}(\mathscr{X})$, периодических на R^n с матрицей периодов J.

Через $\Sigma(U,\omega)$ обозначим совокупность формальных вещественных тригонометрических рядов $u(x)$, $x \in R^n$, вида: $u(x)=\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(u_\beta \frac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}+\overline{u_\beta}\,\frac{\overline{e^{i(x,\omega_\beta)}}}{\sqrt{q}}\right)$, где $u_\beta \in U$. Пусть $S:\Sigma(U,\omega)\to\Sigma(U,\omega)$ – оператор, действующий по формуле: $Su=\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(S_\beta u_\beta \frac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}+\overline{S_\beta u_\beta}\,\frac{\overline{e^{i(x,\omega_\beta)}}}{\sqrt{q}}\right)$, где $S_\beta \in [U\to U]$, причем множество $S_\beta(U)$ замкнуто в U и имеет место неравенство (4.8). Обозначим через H – вещественное гильбертово пространство формальных тригонометрических рядов из $\Sigma(U,\omega)$ с конечной нормой (4.9), а через $\mathcal{R}$ – вещественное гильбертово пространство формальных тригонометрических рядов из $\Sigma(U,\omega)$ с конечной нормой (4.10)*). Точно так же, как и в описанном в примере 4.5 комплексном случае, оператор $S\in[\mathcal{R}\to H]$, множество $S(\mathcal{R})$ замкнуто в H и, следовательно, оператор S при отображении $\mathcal{R}$ в H является хаусдорфовым оператором. В качестве $\operatorname{coker} S$ в данном случае может быть взята совокупность вещественных формальных тригонометрических рядов вида $v(x)=\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(v_\beta \frac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}+\overline{v_\beta}\,\frac{\overline{e^{i(x,\omega_\beta)}}}{\sqrt{q}}\right)$, где $v_\beta \in \ker S_\beta^*$ **) и $v_\beta \neq 0$ лишь для конечного множества индексов β, а в качестве $\{h,v\}$ – билинейная форма $2\operatorname{Re}\sum_{\beta\in\mathcal{B}}(h_\beta, v_\beta)_U$, которая непрерывна на H по первому аргументу ***). Заметим, что если имеет место периодический случай и H вложено в пространство $L_2(U,\mathcal{J})$, то справедливо равенство, аналогичное равенству (4.11):

$$\{h,v\}=\int_{\Omega_{\mathcal{J}}}(h(x),v(x))_U\,dx \qquad \forall h(x)\in H, \quad \forall v(x)\in \operatorname{coker} S.$$

Вернемся к операторному уравнению (4.1), в котором S – хаусдорфов оператор (см. определение 4.1). Пусть зафиксированы пространство $\operatorname{coker} S$ и определенная на $H\times\operatorname{coker} S$ билинейная форма $\{h,v\}$ непрерывная на подпространстве ∇ по первому аргументу при зафиксированном втором, которая задает область значений оператора S с помощью

---

*) Скалярное произведение в H и $\mathcal{R}$ задается соответственно равенствами:

$$(u(x),v(x))_H = 2\operatorname{Re}\sum_{\beta\in\mathcal{B}}(\varkappa_\beta u_\beta, \varkappa_\beta v_\beta)_U$$

и

$$(u(x),v(x))_{\mathcal{R}} = 2\operatorname{Re}\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left((\chi_\beta u_\beta, \chi_\beta v_\beta)_U + (\varkappa_\beta S_\beta u_\beta, \varkappa_\beta S_\beta v_\beta)_U\right).$$

**) Имеют место очевидные равенства: $\ker S_\beta^* = \{w\in U \mid (S_\beta u, w)_U = 0 \ \ \forall u \in U\} = \{w\in U \mid \operatorname{Re}(S_\beta u, w)_U = 0 \ \ \forall u\in U\}$.

***) Ядро оператора S состоит из таких вещественных формальных тригонометрических рядов $\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(v_\beta \frac{e^{i(x,\omega_\beta)}}{\sqrt{q}}+\overline{v_\beta}\,\frac{\overline{e^{i(x,\omega_\beta)}}}{\sqrt{q}}\right)$ из $\mathcal{R}$, у которых $v_\beta \in \ker S_\beta$.

тождества (4.4). Таким образом, условие 1 из § 3 оказывается выполненным.

Зададим еще линейное конечномерное подпространство Λ в $\ker S$ и линейный оператор $b:\Lambda\to\operatorname{coker} S$ *). Проверим выполнение условий Ш и 1У. Положим $X=\mathcal{R}$ и введем следующие обозначения: $W=\{h\in\nabla \mid \{h,v\}=0 \ \ \forall v\in b(\Lambda)\}$ и $Q=\{v\in\operatorname{coker} S \mid \{h,v\}=0 \ \ \forall h\in V\}$, где V - линейное конечномерное подпространство в ∇ такое, что $\nabla=V\oplus W$. Ясно, что подпространство W замкнуто в H в силу непрерывности формы $\{h,v\}$ по первому аргументу на подпространстве ∇. Зафиксируем, наконец, линейное замкнутое подпространство Z в $\mathcal{R}$ такое, что $\Delta\subset Z$. Легко проверяется, что условия Ш и 1У § 3 выполнены, причем операторы Π, S^{-1}, P_1, P_2 и F непрерывны. Для дальнейшего потребуем, чтобы оператор $\theta: Z\to\mathcal{R}^*$ был непрерывен, ограничен**). Таким образом, применяя теоремы 3.5 и 3.6 к уравнению (4.1), в котором S -хаусдорфов оператор, мы можем не требовать дополнительно, чтобы выполнялись условия 1, Ш, 1У.

Займемся теперь выяснением вопроса о том, когда оператор $G^{(h)}\in\mathfrak{A}_0(\mathcal{R},\Phi)$ $\forall h\in H_0$.

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{R}$ - рефлексивное пространство, $h\in H_0$ и Φ - слабо замкнутое подмножество в $\mathcal{R}$, причем оператор B определен на некотором множестве Φ^* $(\Phi\subset\Phi^*)$ таком, что Φ находится на положительном расстоянии от множества $\mathcal{R}\setminus\Phi^*$. При выполнении любого из перечисленных ниже трех условий оператор $G^{(h)}\in\mathfrak{A}_0(\mathcal{R},\Phi)$: 1) оператор $B:\Phi^*\to H$ ограничен на Φ^* (т.е. переводит ограниченные множества из Φ^* в ограниченные множества из H) и может быть представлен в виде: $B(u)=B(u,u)$, где оператор $u,v\to B(u,v)$, рассматриваемый как оператор из $\Phi^*\times\Phi^*$ в H, обладает следующими свойствами: а) $\forall u\in\Phi^*, v\to B(u,v)$ - непрерывный ограниченный оператор из Φ^* в H, б) $\alpha_h(u,v)\geq 0$ $\forall u,v\in\Phi^*$, где $\alpha_h(u,v)=\langle\theta(\Pi u)-\theta(\Pi v), \Pi(u-v)\rangle-\langle\theta S^{-1}P_1(h-B(u))-\theta S^{-1}P_1(h-B(u,v)), u-v\rangle$, в) если $u_\mu\to u$ слабо в $\mathcal{R}$, $\{u_\mu\}\subset\Phi^*$, $u\in\Phi^*$ и $\alpha_h(u_\mu,u)\to 0$, то $B(u_\mu)\to B(u)$ слабо в H, г) если $u_\mu\to u$ слабо в $\mathcal{R}$, $\{u_\mu\}\subset\Phi^*$, $u\in\Phi^*$, то $\forall v\in\Phi^*$ $B(u_\mu,v)\to B(u,v)$ сильно в H; 2) имеют место свойства а) и г) из условия 1), $\mathcal{R}$ - гильбертово пространство, θ - изометрический изоморфизм между $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$, а $B:\Phi^*\to H$ - оператор, переводящий сильно сходящиеся последовательности из Φ^* в слабо сходящиеся последовательности из H и удовлетворяющий неравенству $\|B(u)-B(u,v)\|\leq L\|u-v\|$ $\forall u,v\in\Phi^*$, в котором

---

*) Например, если $\ker S$ и $\operatorname{coker} S$ - линейные подпространства в одном и том же линейном пространстве, то в качестве Λ можно взять подпространство $\ker S\cap\operatorname{coker} S$, а в качестве b - оператор вложения Λ в $\operatorname{coker} S$.

**) Т.е. переводил бы ограниченные множества из Z в ограниченные множества из $\mathcal{R}^*$.

$L\|S^{-1}P_1\|_0 < 1$ (здесь через $\|S^{-1}P_1\|_0$ обозначена норма оператора $S^{-1}P_1$, вычисленная на линейном подпространстве, натянутом на элементы из H вида $B(u)-B(u,v)$ для $u,v \in \Phi^*$).

Доказательство. Ясно, что 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1). Далее оператор $G^{(h)}: \Phi \to X^*$ (см. (4.4)) является на Φ так называемым оператором вариационного исчисления [1, стр. 192, 193]. Это утверждение следует из условия 1) теоремы и следующего представления оператора $G^{(h)}$ (см. работу автора [9]): $G^{(h)}(u) = G^{(h)}(u,u)$, где $G^{(h)}(u,v) = \Pi^*\theta\Pi v - \Pi^*\theta S^{-1}P_1(h - B(u,u + \Pi(v-u))) - FP_2(h-B(u))$ $\forall u,v \in \Phi$. Наконец, утверждение теоремы 4.1 следует из рассуждений, содержащихся в [1, стр. 182-193].

Приведем один пример. Предварительно введем такое обозначение:

$$\mathfrak{X}_\delta = \{u \in \mathfrak{X} \mid \|u\| < \delta\}, \tag{4.12}$$

где $\mathfrak{X}$ - произвольное нормированное пространство и $0 < \delta \le \infty$.

Пример 4.8. Пусть $0<\delta \le \infty$ и оператор B определен на $\mathcal{H}_\delta$. Пусть Ω - ограниченная область в R^n, для которой имеют место теоремы вложения С.Л.Соболева. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_0$ - два банаховых пространства над полем K. Пусть, далее, H есть линейное подпространство в пространстве С.Л.Соболева $W_p^\ell(\mathfrak{X},\Omega)$, $1<p<\infty$, $p\ell > n$, $\ell \ge 0$ - целое*) и норма в H совпадает с нормой пространства $W_p^\ell(\mathfrak{X},\Omega)$. Предположим, что оператор B имеет следующий вид: $B(u) = \mu(x, \mathcal{P}u)$, $u \in \mathcal{H}_\delta$, где $\mu: R^n \times \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{X}$ - непрерывный оператор, а $\mathcal{P}$ - оператор из пространства $[\mathcal{H} \to W_p^\ell(\mathfrak{X},\Omega)]$, причем оператор μ имеет на $R^n \times \mathfrak{X}$ непрерывные производные Фреше вида: $\mathcal{D}_x^\alpha \frac{\partial^\kappa}{\partial\xi^\kappa}\mu(x,\xi)$, $|\alpha|+\kappa \le \ell$, $\kappa = 0,\dots,\ell$, и существуют такие числа $\gamma > 1$ и $\delta_0 > 0$, что имеют место неравенства:

$$\sum_{|\alpha|\le \ell-\kappa} \|\mathcal{D}_x^\alpha \frac{\partial^\kappa}{\partial\xi^\kappa}\mu(x,\xi)\| \le C\|\xi\|^{\max(0,\gamma-\kappa)} \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathfrak{X}_0,\ 0<\|\xi\|<\delta_0;$$

$$\sum_{|\alpha|\le \ell-\kappa} \|\mathcal{D}_x^\alpha \frac{\partial^\kappa}{\partial\xi^\kappa}\mu(x,\xi) - \mathcal{D}_x^\alpha \frac{\partial^\kappa}{\partial\eta^\kappa}\mu(x,\eta)\| \le C\tau^{\max(0,\gamma-\kappa-1)}$$

$$\forall x \in \Omega,\ \forall \xi,\eta \in \mathfrak{X}_0,\ \|\xi\|<\tau,\ \|\eta\|<\tau,\ \forall \tau \in (0,\delta_0).$$

Из этого предположения, с учетом неравенства $\ell p > n$, сразу следует существование таких чисел $a \ge 0$ и δ^*, $0<\delta^*<\delta$, что

$$\|B(u)-B(v)\| \le a\tau^{\gamma-1}\|u-v\| \quad \forall u,v \in \mathcal{H}_\tau,\ \forall \tau \in (0,\delta^*].$$

Таким образом, если $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство, а θ - изометрический

*) Через $W_p^\ell(\mathfrak{X},\Omega)$ мы обозначаем банахово пространство абстрактных со значениями в $\mathfrak{X}$ функций $h(x)$, $x \in \Omega$, имеющих на Ω все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные до порядка ℓ включительно, принадлежащие пространству $L_p(\mathfrak{X},\Omega)$.

изоморфизм между $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$, то условие 2) теоремы 4.1 выполнено при $\Phi^* = \mathcal{R}_{\delta^*}$ и $\Phi = \mathcal{R}_\tau$, где $\tau \in (0, \delta^*)$ и $a\tau^{\gamma-1}\|S^{-1}P_1\| < 1$, и, следовательно, существует такое $\tau_0 \in (0, \delta^*)$, что оператор $G^{(h)} \in \mathfrak{O}(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\tau_0})$ $\forall h \in H_0$.

Займемся теперь описанием второго интересующего нас класса операторных уравнений. Эти уравнения характеризуются тем, что в них S – нулевой оператор, причем $H = \mathcal{R}^*$. Возникают они при изучении краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений и систем уравнений дивергентного вида, которые могут вырождаться как на границе области, так и на бесконечности. Рассмотрим соответствующую абстрактную нелинейную задачу.

Предварительно введем ряд обозначений. Пусть $\mathcal{U}$ – банахово пространство над полем $\mathbb{K}$, $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{C}_0$ – линейные подпространства в $\mathcal{U}$, причем $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{R}_0$, $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}}_0$. Пусть Ω и Ω' – пространства с σ-конечными мерами и пусть заданы четыре набора линейных операторов: $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{\nu_0}, \ldots, \mathcal{L}_\nu)$, $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_\varkappa)$, $\mathcal{L}' = (\mathcal{L}'_1, \ldots, \mathcal{L}'_{\nu'})$, $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_1, \ldots, \mathcal{P}'_{\varkappa'})$, причем каждый из операторов первых двух наборов непрерывно отображает $\mathcal{U}$ в некоторое банахово пространство (свое для каждого оператора) измеримых функций, определенных на Ω, а каждый из операторов третьего и четвертого наборов – в банахово пространство измеримых функций, определенных на Ω'.

Пусть $\mathcal{C}_0 \subset \ker \mathcal{P}'_j$ $\forall j = 1, \ldots, \varkappa'$. Для определенности предположим, что $\mathcal{L}_j \in [\mathcal{U} \to L_{q_j, a_j(x)}(\Omega)]$, $\forall j = 1, \ldots, \nu$, где $1 \le q_j < \infty$ и $a_j(x)$ – измеримая почти всюду положительная функция на Ω *), причем $q_j > 1$ $\forall j = 1, \ldots, \nu_0$.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{U} \times \mathcal{R}$ функционал $\mathcal{D}(u, v)$, определяемый с помощью равенства

$$\mathcal{D}(u,v) = \sum_{j=1}^{\nu_0} \int_\Omega \varphi_j(x, \mathcal{L}u)\overline{\mathcal{L}_j v}\,dx + \sum_{j=1}^{\varkappa} \int_\Omega \psi_j(x, \mathcal{L}u)\overline{\mathcal{P}_j v}\,dx + \sum_{j=1}^{\varkappa'} \int_{\Omega'} \psi'_j(x', \mathcal{L}'u)\overline{\mathcal{P}'_j v}\,dx',$$

где функции $\varphi_j(x, \xi)$, $\psi_j(x, \xi)$ и $\psi'_j(x', \xi')$ таковы, что функционал $\mathcal{D}$ непрерывен на $\mathcal{U} \times \mathcal{R}$ **).

Функционал $\mathcal{D}(u, v)$ естественным образом порождает непрерывный оператор $G: \mathcal{U} \to \mathcal{R}^*$ с помощью тождества $\mathcal{D}(u, v) = \langle G(u), v \rangle$ $\forall v \in \mathcal{R}$.

Пусть H_j – банахово пространство измеримых функций, куда непрерывно отображает пространство $\mathcal{U}$ оператор $\varphi_j(x, \mathcal{L}u)$. Предположим, что $w\overline{\mathcal{L}_j v} \in L_1(\Omega)$ $\forall w \in H_j$, $\forall v \in \mathcal{C}_0$. Обозначим через $\mathcal{C}_0^*$ совокупность

---

*) Напомним, что норма в весовом пространстве $L_{q_j, a_j(x)}(\Omega)$ определяется так: $\|w(x)\|_{L_{q_j, a_j(x)}(\Omega)} = \|a_j(x) w(x)\|_{L_{q_j}(\Omega)}$.

**) Условия непрерывности в конкретных ситуациях легко могут быть указаны на основе известных теорем вложения.

функционалов на $\mathscr{C}_0$ вида $\overline{f(v)}$, где $f(v)$ - линейный функционал на $\mathscr{C}_0$. Тогда может быть определен линейный оператор $\mathscr{L}_j^*: H_j \longrightarrow \mathscr{C}_0^*$ с помощью следующего тождества

$$\int_\Omega w \overline{\mathscr{L}_j v}\, dx = \langle \mathscr{L}_j^* w, v\rangle \quad \forall v \in \mathscr{C}_0 .$$

Аналогично определяются операторы $\mathscr{P}_j^*$, $j=1,\dots,\varkappa$.

Рассмотрим уравнение, которое мы будем называть *квазилинейным уравнением дивергентного вида*

$$\sum_{j=1}^{\nu} \mathscr{L}_j^* \Phi_j(x,\mathscr{L}u) + \sum_{j=1}^{\varkappa} \mathscr{P}_j^* \Psi_j(x,\mathscr{L}u) = h_0, \tag{4.13}$$

где $h_0 \in \mathscr{C}_0^*$.

Для уравнения (4.13) ниже будет поставлена так называемая задача L, часто возникающая в теории дифференциальных уравнений. Введем предварительно некоторые обозначения.

Пусть I - некоторое множество индексов, $\{V_i\}_{i\in I}$ - семейство линейных пространств, $\{\mathscr{b}_i : \mathscr{U} \to V_i\}_{i\in I}$ - семейство операторов, которые мы будем называть *дополнительными*, такое, что $\mathscr{R} \subset \bigcap_{i\in I} \ker \mathscr{b}_i$ *). Элемент $w \in \mathscr{U}$ такой, что $\mathscr{b}_i(w) = g_i \quad \forall i \in I$, называется продолжением набора $\{g_i\}_{i\in I}$. Если $I = \varnothing$, то, по определению, единственным продолжением пустого набора $\{g_i\}_{i\in I}$ будем считать элемент $w = 0$. Набор элементов $g = \{g_i\}_{i\in I}$, $g_i \in V_i$, называется *допустимым*, если множество его продолжений не пусто**), а нормой допустимого набора g назовем $\inf \|w\|$, который распространяется на всевозможные его продолжения. Эта норма может и не обладать обычными свойствами нормы, однако мы будем говорить в дальнейшем, что допустимый набор мал, если мала его норма.

Задача L. Пусть заданы функционал $h \in \mathscr{R}^*$ и некоторый допустимый набор элементов $g = \{g_i\}_{i\in I}$, $g_i \in V_i$. Требуется найти такой элемент $u \in \mathscr{U}$, который удовлетворяет равенствам:

$$D(u,v) = \langle h, v\rangle \quad \forall v \in \mathscr{R}_0 \tag{4.14}$$

и

$$\mathscr{b}_i(u) = g_i \quad \forall i \in I. \tag{4.15}$$

Если $I = \varnothing$, то задачу L будем называть *свободной*. Свободная задача L состоит, таким образом, в отыскании по заданному функционалу $h \in \mathscr{R}^*$ такого элемента $u \in \mathscr{U}$, который удовлетворяет тождеству (4.14).

Важно отметить, что решение задачи L есть одновременно решение уравнения (4.13), в котором h_0 - сужение функционала h с $\mathscr{R}$ на $\mathscr{C}_0$. Этот факт в дальнейшем мы постоянно будем иметь в виду.

---

*) Если $I = \varnothing$, то включение $\mathscr{R} \subset \bigcap_{i\in I} \ker \mathscr{b}_i$ считается выполненным.

**) Следовательно, пустой набор $\{g_i\}_{i\in I}$, $I = \varnothing$, всегда допустим.

Рассмотрим на пространстве $\mathcal{U}$ полунорму $p(u)=\sum_{j=1}^{\nu_0} \|\mathcal{L}_j u\|_{L_{q_j,a_j(x)}(\Omega)}$ и предположим, что эта полунорма согласована с подпространством $\mathcal{R}$ [2, стр. 164-176]. Последнее означает, что найдется такое замкнутое линейное подпространство $Y\subset\mathcal{R}$, что $\mathcal{R}=Y\oplus(\mathcal{R}\cap\ker p)$ и $\inf\limits_{u\in Y\setminus\{0\}} \frac{p(u)}{\|u\|}>0$.

Предположим, что $\dim\ker p<\infty$, и зафиксируем разложение подпространства $\mathcal{R}\cap\ker p$ в прямую сумму линейных замкнутых подпространств: $\mathcal{R}\cap\ker p=\Xi\oplus Q$ таких, что $Q\subset\ker\mathcal{P}_j$ $\forall j=1,\dots,\varkappa$ и $Q\subset\ker\mathcal{P}'_j$ $\forall j=1,\dots,\varkappa'$.

Через $B^{(0)}:\mathcal{U}\to\mathcal{R}^*$ и $\mu:\mathcal{U}\to\mathcal{R}^*$ обозначим операторы, определяемые соответственно с помощью тождеств:

$$<B^{(0)}(u),v>=\sum_{j=1}^{\nu}\int_{\Omega}\varphi_j(x,\mathcal{L}u)\overline{\mathcal{L}_j v}dx\quad \forall v\in\mathcal{R},$$

$$<\mu(u),v>=\sum_{j=1}^{\varkappa}\int_{\Omega}\psi_j(x,\mathcal{L}u)\overline{\mathcal{P}_j v}dx+\sum_{j=1}^{\varkappa'}\int_{\Omega'}\psi'_j(x',\mathcal{L}'u)\overline{\mathcal{P}'_j v}dx'\quad \forall v\in\mathcal{R}.$$

Положим $X=Y\oplus\Xi$ и введем оператор $F:\mathcal{R}^*\to X^*$, сопоставляющий каждому функционалу из $\mathcal{R}^*$ его сужение на подпространство X. Рассмотрим еще такие операторы: $B(u)=B^{(0)}(u)+\mu(u)$, $u\in\mathcal{U}$, $B_w(u)=B(w+u)$, $w\in\mathcal{U}$, $u\in\mathcal{R}$; $G_w^{(h)}(u)=F(B_w(u)-h)$, $w\in\mathcal{U}$, $u\in X$, $h\in H_0$, где $H_0=\{h\in\mathcal{R}^*\mid <h,v>=0\quad\forall v\in Q\}$.

Рассмотрим при зафиксированном $w\in\mathcal{U}$ операторное уравнение

$$B_w(u)=h. \tag{4.16}$$

Очевидно, решение задачи L существует, если существует решение операторного уравнения (4.16) для некоторого продолжения w допустимого набора g. С другой стороны, уравнение (4.16) при $h\in H_0$ есть следствие уравнения

$$G_w^{(h)}(u)=0. \tag{4.17}$$

Заметим, что уравнение (4.16) может быть преобразовано к уравнению (4.17) по схеме § 3; при этом S, θ и P_1 - нулевые операторы, $H=\mathcal{R}^*$, $\operatorname{coker} S=\mathcal{R}$, $\mathcal{R}=X\oplus Q$, $V=Q^{\perp}$, $W=X^{\perp}$, $Z=\{0\}$, $\Lambda=X$, $\mathscr{E}$ - оператор вложения X в $\mathcal{R}$, и, наконец, $\{h,v\}$- каноническая билинейная форма, приводящая в двойственность пространства $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}$. Из определения оператора $G_w^{(h)}:X\to X^*$ следует, что

$$<G_w^{(h)}(u),v>=<B_w(u),v>=<B^{(0)}(w+u),v>+<\mu(w+u)-h,v>\ \forall w\in\mathcal{U},\forall u\in X,\forall v\in X,\forall h\in H_0 \tag{4.18}$$

и

$$\{B_w(u)-h,v\}=<\mu(w+u)-h,v>\quad \forall w\in\mathcal{U},\ \forall u\in X,\ \forall v\in\Xi,\ \forall h\in H_0. \tag{4.19}$$

З а м е ч а н и е. Элемент $w\in\mathcal{U}$ можно рассматривать как параметр в уравнениях (4.16) и (4.17). В общем случае мы можем считать $\mathcal{U}$ - произвольным банаховым пространством над K, не обязательно содержащим $\mathcal{R}$, и считать, что оператор $\mathcal{B}:\Phi\to H$ в уравнении (4.1) и множество Φ, на котором он определен, зависят от параметра $w\in\mathcal{U}$, так что уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\mathcal{S}(u)+\mathcal{B}_w(u)=h. \tag{4.20}$$

При этом оператор $G^{(h)}$ будет также зависеть от w. В этом случае мы будем записывать его в виде $G_w^{(h)}$.

В дальнейшем нам удобно будет записывать уравнение (4.1) в виде (4.20), формально считая, что оно содержит параметр $w\in\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ -тривиальное банахово пространство.

К рассмотренным выше операторным уравнениям (уравнению (4.1) с хаусдорфовым оператором $\mathcal{S}$ и уравнению (4.16), соответствующему задаче L) можно применять общие теоремы § 3 о разрешимости этих уравнений. Мы, однако, остановимся сейчас на одном частном случае ситуации, описанной в теоремах 3.5 и 3.6, а именно на случае, когда $\Lambda\neq\{0\}$ и в разложениях $Z=X_1\oplus\ldots\oplus X_{s_0}$ и $\Lambda=X_{s_0+1}\oplus\ldots\oplus X_s$, о которых идет речь в теоремах 3.5 и 3.6 (или, что то же самое, в разложении (1.3)), содержатся только два нетривиальных подпространства, обозначаемых в дальнейшем через Y и Ξ. Таким образом, $X=Y\oplus\Xi$, и возможны лишь такие две пары равенств: $Z=Y$ и $\Lambda=\Xi$, $Z=\{0\}$ и $\Lambda=Y\oplus\Xi$. Будем предполагать, что $\dim\Xi<\infty$, и при рассмотрении операторных уравнений вида (4.1) с ненулевым хаусдорфовым оператором $\mathcal{S}$ вводить такие обозначения: $Y=Z$ и $\Xi=\Lambda$.

Рассмотренные выше два класса операторных уравнений вида (4.20) содержатся (при некоторых дополнительных предположениях) в одном весьма общем классе операторных уравнений, к определению которого мы переходим. Условия разрешимости, формулируемые для этого общего класса, будут условиями разрешимости как для уравнения (4.1) с хаусдорфовыми операторами $\mathcal{S}$, так и для задачи L (или, что то же самое, для уравнения (4.16)).

О п р е д е л е н и е 4.2. Пусть задано положительное число δ из расширенного множества вещественных чисел: $0<\delta\leq\infty$. Скажем, что операторное уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, если 1) выполнены условия 1-IУ из § 3, 2) оператор $\mathcal{B}_w$ определен на множестве X_δ $\forall w\in\mathcal{U}_\delta$ и $\mathcal{B}_w(X_\delta)\subset\mathcal{S}(\mathcal{R})\oplus V$ $\forall w\in\mathcal{U}_\delta$ (т.е. $\forall w\in\mathcal{U}_\delta$ выполнено тождество (3.13) с $\Phi=X_\delta$), 3) $h\in H_0$ и 4) $G_w^{(h)}\in\mathfrak{A}_0(X,X_\delta)$ $\forall h\in H_0$, $\forall w\in\mathcal{U}_\delta$. Положим $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^{(\infty)}$.

П р и м е р 4.9 Рассмотрим уравнение (4.1) (или, что то же самое, уравнение (4.20) с $\mathcal{U}=\{0\}$). Предположим, что $\mathcal{S}:\mathcal{R}\to H$ - хаусдорфов оператор, оператор $\mathcal{B}:\Phi\to H$ таков, что $\mathcal{B}(\Phi)\subset\mathcal{S}(\mathcal{R})\oplus V$, и $h\in H_0$. Пусть переход к оператору $G_w^{(h)}=G^{(h)}$ осуществлен так, как указывалось выше (напомним, что в этом случае $dim\,\Lambda<\infty$). Хаусдорфовость оператора S влечет за собой, как мы видели выше, выполнение условий I, Ш и IУ § 3. Для выполнения условия П потребуем, чтобы оператор $\theta: Z \to \mathcal{R}^*$ обладал свойством, указанным в пункте 2 замечания о выборе этого оператора (см. § 3). В силу теоремы 4.1 (см. также пример 4.8), справедливы следующие утверждения. 1) Если $\mathcal{R}$ - рефлексивное пространство, $\Phi=\mathcal{R}$ и оператор B усиленно непрерывен на $\mathcal{R}$, то уравнение (4.1) принадлежит классу $\mathfrak{M}$. 2) Пусть $\mathcal{R}$ - гильбертово пространство и θ - изометрический изоморфизм между $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^*$. Пусть, далее, для некоторого δ_0, $0<\delta_0\leq\infty$, оператор B определен на множестве $\Phi=\mathcal{R}_{\delta_0}$ и удовлетворяет неравенству: $\|B(u)-B(v)\|\leq\lambda(\tau)\|u-v\|$ $\forall u,v\in\mathcal{R}_\tau, \forall\tau\in(0,\delta_0)$, где $\lambda:(0,\delta_0)\to R$ и $\lim\limits_{\tau\to 0}\lambda(\tau)=0$. Тогда уравнение (4.1) при некотором $\delta^*\in(0,\delta_0)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$ $\forall\delta\in(0,\delta^*)$.

Пример 4.10. Рассмотрим задачу L и соответствующие этой задаче оператор $B_v:\mathcal{R}\to\mathcal{R}^*$ и уравнение (4.16) с $h\in H_0$. Из определения оператора B_v следует, что, во-первых, в данном случае S - нулевой оператор, а во-вторых, выполнены все условия I-IУ и тождество (3.13) с $\Phi=X$. Таким образом, очевидно, что если при некотором δ, $0<\delta\leq\infty$, оператор $G_v^{(h)}$ псевдомонотонен на X_δ $\forall h\in H_0$, $\forall v\in \mathcal{U}_\delta$, то уравнение (4.16) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$. (Заметим, что из неравенств $1<q_j<\infty$ $\forall j=1,\ldots,\nu_0$ следует рефлексивность пространства $\mathcal{R}$).

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 3.5 и определения класса $\mathfrak{M}^{(\delta)}$.

Теорема 4.2. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, $0<\delta\leq\infty$, и пусть заданы некоторая замкнутая область*) φ в подпространстве Ξ и векторное поле $A:\varphi\to\Xi$, которое невырожденно на $\partial\varphi$ и имеет на $\partial\varphi$ ненулевое вращение. Предположим, что в подпространстве Y существует замкнутая область ψ, такая, что $0\in int\,\psi$, $\varphi+\psi\subset X_\delta$, и имеют место неравенства

$$Re<G_v^{(h)}(u+v),u>\geq 0 \quad \forall u\in\partial\psi,\ \forall v\in\varphi, \qquad (4.21)$$

$$Re\{B_v(u+v)-h,\ \theta A(v)\}\geq 0 \quad \forall u\in\psi,\ \forall v\in\partial\varphi. \qquad (4.22)$$

Тогда уравнение (4.20) имеет в множестве $\psi+\varphi$ по крайней мере одно решение. В частности, если существует некоторое семейство $\mathcal{B}=\{\varphi\}$ попарно непересекающихся замкнутых областей в Ξ такое, что каждой области $\varphi\in\mathcal{B}$ могут быть сопоставлены векторное поле $A:\varphi\to\Xi$ и область ψ в Y, обладающие перечисленными выше свойствами, то мощность

---

*) Напомним, что замкнутой областью называется замыкание непустого открытого связного множества.

множества всех решений уравнения (4.20) в подпространстве X не меньше мощности семейства $\mathcal{B}$.

Различные частные случаи теоремы 4.2 при $\mathcal{U}=\{0\}$, $Y=Z$, $\Xi=\Lambda=\ker S=\operatorname{coker} S$, $X=\mathcal{H}=H$ для гильбертова пространства $\mathcal{H}$, линейного самосопряженного оператора S и тождественных операторов A и $\mathcal{C}$ были доказаны ранее на основе принципа Шаудера в работах ряда математиков. Здесь следует, прежде всего, отметить работу А.Лазера [3], в которой предполагалось, что $h\in S(\mathcal{H})$ и $\dim\ker S=1$. Далее, в работе Е.Ландесмана и А.Лазера [4] при условии $\dim\ker S=1$ для определенного вида операторов B, обладающих свойством: $\sup\limits_{u\in\mathcal{H}}\|B(u)\|<\infty$ *), была доказана разрешимость уравнения (4.20) для правых частей, удовлетворяющих некоторым неравенствам. Позднее результат Е.Ландесмана и А.Лазера был обобщен С.Уильямсом [5] и И.Нечасом [6] на случай, когда $1\leq\dim\ker S<\infty$ **). В работах С.Фучика, М.Кучеры, И.Нечаса [7] и автора [2, 9] для некоторых нелинейных операторов B, обладающих свойством: $\sup\limits_{u\in\mathcal{H}}\|B(u)\|=\infty$, была доказана разрешимость уравнения (4.1) при любой правой части $h\in H$ ***).

Следующая теорема вытекает из теоремы 4.2 и некоторых утверждений о коэрцитивности семейств вещественных функций, сформулированных в § 2 (см. примеры 2.1–2.3). Однако ясно, что с помощью теорем 3.5 и 3.6 можно получать более общие утверждения (см. пример 3.6).

Теорема 4.3. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathcal{M}^{(\delta)}$, $0<\delta\leq\infty$, и пусть на подпространстве Ξ задано непрерывное векторное поле $A:\Xi\to\Xi$, невырожденное на множестве $\Xi\setminus\{0\}$ и имеющее ненулевое вращение на сфере $\|v\|=1$. Предположим, что для некоторого δ_0 такого, что $0<\delta_0\leq\infty$ и $Y_{\delta_0}+\Xi_{\delta_0}\subset X_\delta$, имеют место неравенства

$$Re<G^{(h)}_{w}(u+v),u>\geq\eta_1(u,v,h,w)\,\omega^{(1)}_{h,w}(\|u\|,\|v\|)\ \forall u\in Y_{\delta_0}\setminus\{0\},\ \forall v\in\Xi_{\delta_0}\setminus\{0\},\ \forall h\in H_0,\ \forall w\in\mathcal{U}_\delta, \tag{4.23}$$

$$Re\{B_w(u+v)-h,\mathcal{C}A(v)\}\geq\eta_2(u,v,h,w)\,\omega^{(2)}_{h,w}(\|u\|,\|v\|)\ \forall u\in Y_{\delta_0}\setminus\{0\},\ \forall v\in\Xi_{\delta_0}\setminus\{0\},\ \forall h\in H_0,\ \forall w\in\mathcal{U}_\delta, \tag{4.24}$$

в которых $\eta_K:(Y_{\delta_0}\setminus\{0\})\times(\Xi_{\delta_0}\setminus\{0\})\times H_0\times\mathcal{U}_\delta\to[0,\infty)$ и семейство функций $\{\omega^{(K)}_{h,w}(t_1+t_2)\}_{K=1,2}$ коэрцитивно на множестве $T=(0,\delta_0)\times(0,\delta_0)$, причем каждая функция $\omega^{(K)}_{h,w}(t_1,t_2)$ убывает в широком смысле по аргументу t_τ, $\tau\neq K$, на промежутке $(0,\delta_0)$. Тогда уравнение (4.20) имеет по крайней мере одно решение в цилиндре $Y_{t_1^{(0)}}\times\Xi_{t_2^{(0)}}$, где $t_1^{(0)}$ и $t_2^{(0)}$ таксвы, что

---

*) Заметим, что в работе [3] этого предположения не делалось.

**) См. также монографию Л.Ниренберга [11].

***) Результаты работ [7] и [2] получены одновременно и независимо, при этом в [2] были получены более общие, чем в [7], утверждения, близкие к тем, которые сформулированы в этом параграфе.

$\omega_{h,\varpi}^{(\kappa)}(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}) \geq 0$, $\kappa=1,2$. В частности, пусть функции $\omega_{h,\varpi}^{(\kappa)}(t_1,t_2)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\omega_{h,\varpi}^{(1)}(t_1,t_2) \geq a_{11} t_1^{\sigma_{11}} - a_{12} t_2^{\sigma_{12}} - b_1(h,\varpi) \quad \forall t_i \in (0,\delta_0),\ \forall h \in H_0, \forall \varpi \in \mathcal{U}_\delta \tag{4.25}$$

и

$$\omega_{h,\varpi}^{(2)}(t_1,t_2) \geq a_{22} t_2^{\sigma_{22}} - a_{21} t_1^{\sigma_{21}} - b_2(h,\varpi),\ \forall t_i \in (0,\delta_0),\ \forall h \in H_0,\ \forall \varpi \in \mathcal{U}_\delta, \tag{4.26}$$

где $a_{ii} > 0$, $\sigma_{ii} > 0$, $a_{ij} \geq 0$, $\sigma_{ij} \geq 0$, $b_i : H_0 \times \mathcal{U}_\delta \to \mathbb{R}$. Тогда 1) если $\sigma_{11}\sigma_{22} \leq \sigma_{12}\sigma_{21}$, $a_{22} > a_{21} a_{12}^{\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}} a_{11}^{-\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}} (1 - \operatorname{sgn}(\sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{11}\sigma_{22}))$ и $b_i(h,\varpi) \to 0$ при $h \to 0$, $\varpi \to 0$, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется число $\varkappa > 0$, зависящее от ε, такое, что уравнение (4.20) имеет по крайней мере одно решение в шаре X_ε $\forall h \in H_{0\varkappa}$, $\forall \varpi \in \mathcal{U}_\varkappa$; 2) если $\delta_0 = \delta = \infty$, $\sigma_{11}\sigma_{22} \geq \sigma_{12}\sigma_{21}$ и

$$a_{22} > a_{21} a_{12}^{\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}} a_{11}^{-\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}} (1 - \operatorname{sgn}(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})),$$

то уравнение (4.20) разрешимо в подпространстве X $\forall h \in H_0$, $\forall \varpi \in \mathcal{U}$.

З а м е ч а н и е. Если в теореме 4.3 оператор $G_\varpi^{(h)}$ соответствует задаче L, то эта теорема дает условия разрешимости задачи L, причем под $\mathcal{U}$ следует понимать тогда множество всех допустимых наборов g, а под $\mathcal{U}_\delta$, $0 < \delta \leq \infty$, – совокупность тех допустимых наборов g, у которых $\|g\| \leq \delta$.

Иногда условия разрешимости операторного уравнения вида (4.20) удобно формулировать в терминах некоторой последовательности множеств $\{\varphi_\kappa\}$, расположенных в подпространстве Ξ. Итак, пусть $\{\varphi_\kappa\}$, $\kappa=1,2,\ldots$, – некоторая последовательность ограниченных замкнутых областей в подпространстве Ξ. Пусть каждому $\kappa=1,2,\ldots$ сопоставлено непрерывное векторное поле $A_\kappa : \varphi_\kappa \to \Xi$, невырожденное на $\partial\varphi_\kappa$ и имеющее на $\partial\varphi_\kappa$ ненулевое вращение.

Из теоремы 4.2 сразу следует такая

Т е о р е м а 4.4. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, $0 < \delta \leq \infty$. Пусть, далее, существует такая последовательность ограниченных замкнутых областей $\{\psi_\kappa\}$, $\kappa=1,2,\ldots$, в подпространстве Y, зависящая от $h \in H_0$ и $\varpi \in \mathcal{U}_\delta$, что $\psi_\kappa + \varphi_\kappa \subset X_\delta$ $\forall \kappa$, $0 \in \operatorname{int} \psi_\kappa$ $\forall \kappa$ и

$$\operatorname{Re} < G_\varpi^{(h)}(u+v), u > \geq 0 \quad \forall u \in \partial\psi_\kappa,\ \forall v \in \varphi_\kappa,\ \forall \kappa. \tag{4.27}$$

Тогда если множество тех натуральных чисел κ, для которых

$$\operatorname{Re}\{B_\varpi(u+v) - h,\ bA_\kappa(v)\} \geq 0 \quad \forall u \in \psi_\kappa,\ \forall v \in \partial\varphi_\kappa, \tag{4.28}$$

не пусто, то уравнение (4.20) имеет в подпространстве X по крайней мере одно решение, при этом если множества φ_κ попарно не пересекаются между собой, то мощность множества всех решений уравнения (4.20) в подпространстве X не меньше мощности множества тех κ, для которых выполняется неравенство (4.28); в частности, если последнее множество бесконечно, то и уравнение (4.20) имеет в подпространстве X бесчисленное множество решений.

Нам удобно будет применять в дальнейшем такой частный случай теоремы 4.4.

Т е о р е м а 4.5. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, $0<\delta\le\infty$. Обозначим через $Y_{\delta,k}$ совокупность тех $u\in Y$, для которых множество $\{u\}+\varphi_k\subset X_\delta$. Предположим, что имеют место неравенства

$$Re\langle G_\omega^{(h)}(u+v),u\rangle\ge l_1^{(k)}(u,v,h,\omega)\left(\|u\|^\sigma-\tau_k-b_1(h,\omega)\right)\ \forall u\in Y_{\delta,k},\ \forall v\in\varphi_k,\ \forall h\in H_0,\ \forall\omega\in\mathcal{U}_\delta, \tag{4.29}$$

и

$$Re\langle B_\omega(u+v),\ \mathscr{B}A_k(v)\rangle\ge l_2^{(k)}(u,v,h,\omega)\left(\rho_k-\|u\|^\gamma-b_2(h,\omega)\right)\ \forall u\in Y_{\delta,k},\ \forall v\in\partial\varphi_k,\ \forall h\in H_0,\ \forall\omega\in\mathcal{U}_\delta, \tag{4.30}$$

где
$l_1^{(k)}: Y_{\delta,k}\times\varphi_k\times H_0\times\mathcal{U}_\delta\to[0,\infty)$, $l_2^{(k)}: Y_{\delta,k}\times\partial\varphi_k\times H_0\times\mathcal{U}_\delta\to[0,\infty)$, $b_i: H_0\times\mathcal{U}_\delta\to R$, $\sigma>0$, $\gamma>0$, $\rho_k>0$, $\tau_k\ge0$,
причем

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\tau_k^{\frac{\gamma}{\sigma}}}{\rho_k}<1. \tag{4.31}$$

Справедливы следующие утверждения: 1) Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{v\in\partial\varphi_k}\|v\|=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=0$ и $\lim\limits_{\substack{h\to0\\ \omega\to0}}b_i(h,\omega)=0$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ найдется такое $\varkappa>0$, зависящее от ε, что уравнение (4.20) имеет решение в шаре X_ε $\forall h\in H_{0\varkappa}$, $\forall\omega\in\mathcal{U}_\varkappa$; при этом если множества φ_k попарно не пересекаются между собой, то $\forall\varepsilon>0$ число решений уравнения (4.20) в шаре X_ε стремится к ∞ при $h\to0$, $\omega\to0$. 2) Пусть $\delta=\infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=\infty$. Тогда уравнение (4.20) имеет в подпространстве X по крайней мере одно решение $\forall h\in H_0$, $\forall\omega\in\mathcal{U}$; при этом если множества φ_k попарно не пересекаются между собой, то уравнение (4.20) имеет в подпространстве X бесчисленное множество решений $\forall h\in H_0$, $\forall\omega\in\mathcal{U}$ *).

В ряде случаев могут быть указаны более удобные для приложений условия разрешимости уравнения (4.20), чем условия теоремы 4.4. Для их формулировки зафиксируем $\delta, 0<\delta\le\infty$, $h\in H_0$, $\omega\in\mathcal{U}_\delta$ и предположим, что существует такая последовательность ограниченных замкнутых областей $\{\psi_k\}$, $k=1,2,\dots$, в подпространстве Y, зависящая от h и ω, что

---

*) Множество φ_k при проверке обоих утверждений следует брать в виде:

$$\varphi_k=\{u\in Y\mid \|u\|\le(\tau_k+|b_1(h,\omega)|+\varepsilon_0)^{\frac{1}{\sigma}}\},\quad \text{где } \varepsilon_0>0.$$

$0 \in \operatorname{int} \varphi_k \quad \forall k, \ \varphi_k + \varphi_k \subset X_\delta \quad \forall k$, и имеет место неравенство

$$Re < G_w^{(h)}(u+v), u> \geq 0 \quad \forall u \in \partial\varphi_k, \forall v \in \varphi_k, \ \forall k. \tag{4.32}$$

Введем следующие обозначения:

$$L_{B_w,h} = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{u\in\varphi_k, v\in\partial\varphi_k} Re\{B_w(u+v)-h, \ bA_k(v)\},$$

$$\ell_{B_w,h} = \inf_{\tau>0} \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{u\in Y, \|u\|\leq\tau, \\ v\in\partial\varphi_m, m\geq k}} Re\{B_w(u+v)-h, \ bA_m(v)\},$$

$$L_{B_w} = L_{B_w,0}, \ L = \inf_{w\in U} L_{B_w}, \ \ell_{B_w} = \ell_{B_w,0}, \ \ell = \inf_{w\in U} \ell_{B_w}, \ |h| = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{v\in\partial\varphi_k} Re\{h, bA_k(v)\}.$$

Т е о р е м а 4.6. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$. Тогда, для того чтобы оно имело в подпространстве X по крайней мере одно решение, а в случае, когда все множества φ_k попарно не пересекаются между собой, - бесчисленное множество решений, достаточно, чтобы выполнялось любое из неравенств: 1) $L_{B_w,h} > 0$, 2) $L_{B_w} > |h|$, 3) $L > |h|$, а если множество $\bigcup_k \varphi_k$ ограничено, то любое из неравенств: 1) $\ell_{B_w,h} > 0$, 2) $\ell_{B_w} > |h|$, 3) $\ell > |h|$.

Для ряда задач теории дифференциальных уравнений неравенство $L_{B_w,h} > 0$ удобно получать как следствие некоторых неравенств между двумя функциями со значениями из расширенной вещественной прямой, которые построены по оператору B_w и правой части h и заданы на некотором замкнутом подмножестве w_0 единичной сферы в Ξ.

Рассмотрим эту ситуацию подробнее. Пусть d - размерность подпространства Ξ. Зафиксировав в Ξ базис $\{v^{(1)},\dots,v^{(d)}\}$ и записывая каждый элемент $v \in \Xi$ в виде $v = \sum_{i=1}^{d} \xi_i v^{(i)}$, где $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d) \in K^d$ *), мы тем самым задаем изоморфизм между Ξ и K^d. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем множества в K^d, соответствующие при этом изоморфизме множествам φ_k, $k=1,2,\dots$, обозначать теми же символами. Для $\forall \xi \in K^d \setminus \{0\}$, $\forall k$ через $\Delta_k(\xi)$ обозначим совокупность таких чисел $\rho > 0$, что $\rho\xi \in \partial\varphi_k$. Предположим, что $0 \bar{\in} \partial\varphi_k$ $\forall k$ и существует множество w_0, расположенное на единичной сфере $|\xi| = 1$ пространства K^d, которое обладает следующим свойством: $\Delta_k(\xi) \neq \emptyset$ $\forall \xi \in w_0$, $\forall k$ и $\Delta_k(\xi) = \emptyset$ $\forall \xi \bar{\in} w_0$, $\forall k$.

Введем такие обозначения для $\xi \in w_0$:

$$L^*_{B_w,h}(\xi) = \sup_{\lambda>0} \lim_{k\to\infty} \inf_{\substack{u\in\varphi_m, \zeta\in w_0, |\zeta-\xi|\leq\lambda, \\ \rho\in\Delta_m(\zeta), m\geq k}} Re\{B_w(u+\rho\sum_{i=1}^{d}\zeta_i v^{(i)})-h, bA_m(\rho\sum_{i=1}^{d}\zeta_i v^{(i)})\},$$

---

*) Здесь и в дальнейшем $K^d = R^d$, если $K = R$, и $K^d = C^d$, если $K = C$.

$$\ell^*_{B_\omega,h}(\xi)=\inf_{\tau>0}\sup_{\lambda>0}\lim_{k\to\infty}\inf_{\substack{u\in Y,\|u\|\le\tau,\\ \zeta\in\omega_0,|\zeta-\xi|\le\lambda,\\ \rho\in\Delta_m(\zeta),m\ge k}} Re\{B_\omega(u+\rho\sum_{i=1}^d\zeta_i\sigma^{(i)})-h,\mathcal{E}A_m(\rho\sum_{i=1}^d\zeta_i\sigma^{(i)})\},$$

$$L^*_{B_\omega}(\xi)=L^*_{B_\omega,0}(\xi),\ \ell^*_{B_\omega}(\xi)=\ell^*_{B_\omega,0}(\xi), L^*(\xi)=\inf_{\omega\in U}L^*_{B_\omega}(\xi), \ell^*(\xi)=\inf_{\omega\in U}\ell^*_{B_\omega}(\xi),$$

$$\|h\|^*_\xi=\inf_{\lambda>0}\lim_{k\to\infty}\sup_{\substack{\zeta\in\omega_0,|\zeta-\xi|\le\lambda,\\ \rho\in\Delta_m(\zeta),m\ge k}} Re\{h,\mathcal{E}A_m(\rho\sum_{i=1}^d\zeta_i\sigma^{(i)})\}.$$

Очевидно, для выполнения неравенства $L_{B_\omega,h}>0$ достаточно, в силу компактности множества ω_0, выполнения неравенства $L^*_{B_\omega,h}(\xi)>0\ \forall\xi\in\omega_0$; поэтому из теоремы 4.6 следует такая (см. [5, 6]).

Т е о р е м а 4.7. Пусть уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Тогда, для того чтобы оно имело в подпространстве X по крайней мере одно решение, а в случае, когда все множества φ_k попарно не пересекаются между собой, - бесчисленное множество решений, достаточно, чтобы выполнялось любое из неравенств: 1) $L^*_{B_\omega,h}(\xi)>0\ \forall\xi\in\omega_0$, 2) $L^*_{B_\omega}(\xi)>\|h\|^*_\xi\ \forall\xi\in\omega_0$, 3) $L^*(\xi)>\|h\|^*_\xi\ \forall\xi\in\omega_0$, а если множество $\bigcup_k\varphi_k$ ограничено, то любое из неравенств: 1) $\ell^*_{B_\omega,h}(\xi)>0\ \forall\xi\in\omega_0$, 2) $\ell^*_{B_\omega}(\xi)>\|h\|^*_\xi\ \forall\xi\in\omega_0$, 3) $\ell^*(\xi)>\|h\|^*_\xi\ \forall\xi\in\omega_0$.

§ 5. Примеры

В этом параграфе мы приведем некоторые примеры применения теорем § 4. Здесь будут рассматриваться нелинейные операторные уравнения вида (4.20), принадлежащие классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, $0<\delta\le\infty$, или конкретные задачи теории дифференциальных уравнений, приводящие к таким операторным уравнениям. Подпространство X, как и в § 4, мы будем предполагать разложенным в прямую сумму двух нетривиальных линейных замкнутых подпространств Y и Ξ таких, что $\Xi\subset\Lambda$. Напомним, что в случае операторного уравнения вида (4.1) с хаусдорфовым оператором S имеют место равенства: $U=\{0\}$, $Y=Z$ и $\Xi=\Lambda$, а в случае операторного уравнения (4.16), порожденного задачей L, -равенства $Z=\{0\}$, $X=\Lambda=Y\oplus Z$, при этом $\{B_\omega(u+\sigma),\mathcal{E}\sigma\}=\langle\mu(\omega+u+\sigma),\sigma\rangle\ \forall\omega\in U,\ \forall u\in Y,\ \forall\sigma\in\Xi$. В примере 5.1 мы специально не выделяем какую-либо конкретную задачу, однако утверждения, в нем сформулированные, легко проектируются на конкретные задачи теории дифференциальных уравнений, если для этих задач известен явный вид билинейной формы $\{h,\sigma\}$ (см. примеры 4.2-4.7, а также описанкую в § 4 задачу L). Как и в § 4, $\{\sigma^{(1)},\ldots,\sigma^{(d)}\}$ - базис в Ξ .

Пример 5.1. Пусть операторное уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}^{(\delta)}$, $0<\delta\leq\infty$, и имеет место неравенство

$$<G_{w}^{(h)}(u+\sigma),u>\geq \eta(u,\sigma,h,w)(\|u\|^{6}-a\|\sigma\|^{\lambda}-b(h,w))\quad \forall u\in Y_{\delta},\forall\sigma\in\Xi_{\delta}\setminus\{0\},\forall h\in H_{0},\forall w\in U_{\delta},\tag{5.1}$$

где $\eta: Y_{\delta}\times(\Xi_{\delta}\setminus\{0\})\times H_{0}\times U_{\delta}\to[0,\infty)$, $b:H_{0}\times U_{\delta}\to R$, $\delta>0, a>0, \lambda\geq 0$, причем если $\delta<\infty$, то $b(h,w)\to 0$ при $h\to 0$, $w\to 0$. Пусть далее задана последователь - ность $\{\varphi_{k}\}$, $k=1,2,\ldots$, ограниченных замкнутых областей в K^{d}, обладающая такими свойствами: $0\in\partial\varphi_{k}$ $\forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{\xi\in\partial\varphi_{k}}|\xi|=0$, если $\delta<\infty$, и $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{\xi\in\partial\varphi_{k}}|\xi|=\infty$, если $\delta=\infty$; причем каждой области φ_{k} сопоставлено непрерывное векторное поле $A_{k}=(A_{k}^{(1)},\ldots,A_{k}^{(d)}):\varphi_{k}\to K^{d}$, невырожденное на $\partial\varphi_{k}$, имеющее на $\partial\varphi_{k}$ ненулевое вращение и удовлетворяющее неравенству $|A_{k}(\xi)|\leq a^{*}|\xi|^{\gamma^{*}}$ $\forall\xi\in\partial\varphi_{k}$, $\forall k$, где $a^{*}\geq 0$, $\gamma^{*}\geq 0$. Предположим, что либо пространство $\mathcal{R}$ вложено в пространство параметров $\mathcal{U}$, либо $\mathcal{U}=\{0\}\subset\mathcal{R}$, и имеет место равенство

$$\{B_{w}(u+\sigma),b\sigma\}=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_{j}}\psi_{j}(x^{(j)},\mathcal{L}^{(j)}(w+u+\sigma),\mathcal{L}^{(j)}(w+u))\overline{\mathcal{P}_{j}\sigma}\,dx^{(j)}\quad \forall u\in Y,\ \forall\sigma\in\Xi, u+\sigma\in X_{\delta},\forall w\in U_{\delta},\tag{5.2}$$

где N - натуральное число, Ω_{j} - пространство точек $x^{(j)}$ с σ-конечной мерой, $\mathcal{L}^{(j)}=(\mathcal{L}_{1}^{(j)},\ldots,\mathcal{L}_{\nu_{j}}^{(j)})$, ν_{j} - натуральное число, $\mathcal{L}_{i}^{(j)}\in[(\mathcal{R}+\mathcal{U})\to L_{q_{ij},a_{ij}(x^{(j)})}(\Omega_{j})]$ *), $1<q_{ij}\leq\infty$ $\mathcal{L}_{i}^{(j)}\in[\Xi\to L_{p_{ij},e_{ij}(x^{(j)})}(\Omega)]$ $1<p_{ij}\leq\infty$, $\mathcal{P}_{j}\in[\Xi\to L_{s_{j},c_{j}(x^{(j)})}(\Omega_{j})]$, $1<s_{j}\leq\infty$, и $\psi_{j}:\Omega_{j}\times K^{2\nu_{j}}\to K$ - функция, удовлетворяющая условию Каратеодори. Зафиксируем при каждом $j=1,\ldots,N$ некоторое разбиение функции ψ_{j}: $\psi_{j}(x^{(j)},\xi^{(j)},\zeta^{(j)})=\hat{\psi}_{j}(x^{(j)},\xi^{(j)},\xi^{(j)},\zeta^{(j)})+\psi_{j}^{(0)}(x^{(j)},\xi^{(j)},\zeta^{(j)})$, в котором функции $\hat{\psi}_{j}:\Omega_{j}\times K^{3\nu_{j}}\to K$ и $\psi_{j}^{(0)}:\Omega_{j}\times K^{2\nu_{j}}\to K$ удовлетворяют условию Каратеодори. Пусть выполнены следующие неравенства:

$$|\psi_{j}(x^{(j)},\xi^{(j)}+\eta^{(j)},\xi^{(j)})|\leq\chi_{j}(x^{(j)})+$$
$$+\sum_{i=1}^{\nu_{j}}(\tau_{ij}(x^{(j)})|\xi_{i}^{(j)}|^{\gamma_{ij}}+m_{ij}(x^{(j)})|\eta_{i}^{(j)}|^{\lambda_{ij}})\quad\forall x^{(j)}\in\Omega_{j},\forall\xi^{(j)},\eta^{(j)}\in K^{\nu_{j}},\ \forall j=1,\ldots,N,\tag{5.3}$$

и
$$|\hat{\psi}_{j}(x^{(j)},\xi^{(j)}+\eta^{(j)},\xi^{(j)}+\eta^{(j)},\xi^{(j)})-\hat{\psi}_{j}(x^{(j)},\eta^{(j)},\xi^{(j)}+\eta^{(j)},\xi^{(j)})|+$$
$$+|\psi_{j}^{(0)}(x^{(j)},\xi^{(j)}+\eta^{(j)},\xi^{(j)})|\leq\hat{\chi}_{j}(x^{(j)})+$$
$$+\sum_{i=1}^{\nu_{j}}(\hat{\tau}_{ij}(x^{(j)})|\xi_{i}^{(j)}|^{\hat{\delta}_{ij}}+\hat{m}_{ij}(x^{(j)})|\eta_{i}^{(j)}|^{\hat{\lambda}_{ij}})\quad\forall x^{(j)}\in\Omega_{j},\forall\xi^{(j)},\eta^{(j)}\in K^{\nu_{j}},\ \forall j=1,\ldots,N,\tag{5.4}$$

где $\chi_{j}(x^{(j)})\in L_{s_{j}',c_{j}^{-1}(x^{(j)})}(\Omega_{j})$, $0<\delta_{ij}\leq q_{ij}/s_{j}'$, $\tau_{ij}(x^{(j)})\in$

---

*) $\mathcal{R}+\mathcal{U}=\mathcal{U}$, если $\mathcal{R}$ вложено в $\mathcal{U}$, и $\mathcal{R}+\mathcal{U}=\mathcal{R}$, если $\mathcal{U}=\{0\}\subset\mathcal{R}$.

$$\in L_{\frac{q_{ij}s_j'}{q_{ij}-\gamma_{ij}s_j'}, c_j^{-1}(x^{(j)})a_{ij}^{-\frac{1}{\gamma_{ij}}}(x^{(j)})}(\Omega_j), \quad 0<\lambda_{ij}\le p_{ij}/s_j',$$

$$m_{ij}(x^{(j)})\in L_{\frac{p_{ij}s_j'}{p_{ij}-\lambda_{ij}s_j'}, c_j^{-1}(x^{(j)})e_{ij}^{-\frac{1}{\lambda_{ij}}}(x^{(j)})}(\Omega_j),$$

а числа $\hat{\gamma}_{ij}, \hat{\lambda}_{ij}$ и функции $\hat{\chi}_j(x^{(j)}), \hat{\tau}_{ij}(x^{(j)}), \hat{m}_{ij}(x^{(j)})$ удовлетворяют аналогичным условиям, причем $\hat{\chi}_j(x^{(j)})\equiv 0$ на Ω_j при $\delta<\infty$. Пусть еще выполнено такое неравенство:

$$\inf_{u\in Y_\delta, \sigma\in\Xi_\delta, \varpi\in U_\delta, \xi\in\partial\varphi_k} Re\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega_j}\hat{\psi}_j\Big(x^{(j)}, \sum_{i=1}^{d}\xi_i\mathcal{L}^{(j)}\sigma^{(i)}, \mathcal{L}^{(j)}(\varpi+u+\sigma), \mathcal{L}(\varpi+u)\Big)\varphi_j\Big(\sum_{i=1}^{d}A_k^{(i)}(\xi)\sigma^{(i)}\Big)dx^{(j)}\ge$$
$$\ge\hat{\varepsilon}\,(\max_{\xi\in\partial\varphi_k}|\xi|)^{\gamma^*+\hat{\gamma}} \quad \forall k, \tag{5.5}$$

где $\hat{\varepsilon}>0$, $\hat{\gamma}>0$. Условимся считать, далее, что если $\hat{\lambda}_{ij}=\hat{\gamma}$, то соответствующая функция $\hat{m}_{ij}(x^{(j)})$ может быть сделана сколь угодно малой по норме за счет изменения остальных функций в правой части неравенства (5.4). Предположим, что при $\delta<\infty$ имеет место неравенство $\hat{\lambda}_{ij}\ge\hat{\gamma}$, а при $\delta=\infty$ – неравенство $\hat{\lambda}_{ij}\le\hat{\gamma}$ $\forall i,j$ таких, что $m_{ij}(x^{(j)})\ne 0$ на Ω_j. Нам понадобится еще число γ_0, которое при $\delta<\infty$ определяется как минимальное среди всех таких чисел $\hat{\gamma}_{ij}$, для которых соответствующие функции $\hat{\tau}_{ij}(x^{(j)})$ отличны от тождественного нуля на Ω_j, а при $\delta=\infty$ – как максимальное среди этих же чисел. Из неравенств (5.4), (5.5) следует, что

$$\inf_{\xi\in\partial\varphi_k} Re\Big\{B_\varpi\Big(u+\sum_{i=1}^{d}\xi_i\sigma^{(i)}\Big), b\Big(\sum_{i=1}^{d}A_k^{(i)}(\xi)\sigma^{(i)}\Big)\Big\}\ge(\max_{\xi\in\partial\varphi_k}|\xi|)^{\gamma^*}\times$$
$$\times\Big(\hat{\varepsilon}_0(\max_{\xi\in\partial\varphi_k}|\xi|)^{\hat{\gamma}}-c_0\|u\|^{\gamma_0}-c(\varpi)\Big) \quad \forall u\in Y,\ \forall k,\ u+\partial\varphi_k\subset X_\delta,\ \forall\varpi\in U_\delta, \tag{5.6}$$

где $c_0\ge 0, 0<\hat{\varepsilon}_0\le\hat{\varepsilon}$, причем разность $\hat{\varepsilon}-\hat{\varepsilon}_0$ может быть сделана сколь угодно малой (быть может, за счет увеличения c_0), $c: U_\delta\to R$ и $c(\varpi)\to 0$ при $\varpi\to 0$. Из теоремы 4.5 следуют такие утверждения: 1) если $\delta<\infty$, $\sigma\hat{\gamma}\le\lambda\gamma_0$ и $\hat{\varepsilon}_0>a^{\frac{\gamma_0}{\sigma}}c_0\big(1-sgn(\lambda\gamma_0-\sigma\hat{\gamma})\big)$, то $\forall\varepsilon>0$ найдется $\varkappa>0$, зависящее от ε, такое, что уравнение (4.20) разрешимо в шаре X_ε $\forall h\in H_{0\varkappa}, \forall\varpi\in U_\varkappa$; при этом если множества φ_k попарно не пересекаются между собой, то число решений уравнения (4.20) в шаре X_ε стремится к ∞ при $h\to 0, \varpi\to 0$; 2) если $\delta=\infty$, $\sigma\hat{\gamma}\ge\lambda\gamma_0$ и $\hat{\varepsilon}_0>a^{\frac{\gamma_0}{\sigma}}c_0\big(1-sgn(\sigma\hat{\gamma}-\lambda\gamma_0)\big)$, то уравнение (4.20) разрешимо в подпространстве X $\forall h\in H_0, \forall\varpi\in U$; при этом если множества φ_k попарно не пересекаются между собой, то уравнение (4.20) имеет в подпространстве X бесчисленное множество решений $\forall h\in H_0$, $\forall\varpi\in U$.

З а м е ч а н и е (о выборе векторного поля $A_k(\xi)$). При исследовании той или иной задачи естественно сначала попытаться проверить выполнение неравенства (5.5) для случая, когда в качестве $A_\kappa(\xi)$ взято линейное (в частности, тождественное) векторное поле. Опишем одну ситуацию, в которой поле $A_\kappa(\xi)$ может быть построено по функциям $\hat{\psi}_j$. Пусть $N=d$, функция $\hat{\psi}_j(x^{(j)},\xi^{(j)},\eta^{(j)},\zeta^{(j)})$ не зависит от аргументов $\eta^{(j)}$ и $\zeta^{(j)}$, $\mathcal{P}_j(\sum_{i=1}^{d}\xi_i\sigma^{(\omega)})=\beta_j\xi_j\mathcal{P}_j\sigma^{(j)}$ $\forall\xi\in K^d$, где $\beta\in C$, и $\forall\kappa$ векторное поле $A(\xi)=$ $=\{\bar{\beta}_j\int_{\Omega_j}\hat{\psi}_j(x^{(j)},\sum_{i=1}^{d}\xi_i\hat{\mathcal{L}}^{(j)}\sigma^{(\omega)})\overline{\mathcal{P}_j\sigma^{(j)}}d\ldots\}_{j=1,\ldots,d}$ невырожденно на $\partial\varphi_\kappa$ и имеет на $\partial\varphi_\kappa$ ненулевое вращение, причем $|A(\xi)|\leqslant a^*|\xi|^{\gamma^*}$ $\forall\xi\in\partial\varphi_\kappa$, $\forall\kappa$, и $\min_{\xi\in\partial\varphi_\kappa}|A(\xi)|^2\geqslant\hat{\varepsilon}(\max_{\xi\in\partial\varphi_\kappa}|\xi|)^{\gamma^*+\hat{\gamma}}$ $\forall\kappa$, где $a^*\geqslant 0$, $\gamma^*\geqslant 0$, $\hat{\varepsilon}>0$, $\hat{\gamma}>0$. Тогда если положить $A_\kappa(\xi)=A(\xi)$ $\forall\kappa$, то неравенство (5.5), очевидно, будет выполнено.

В следующих примерах 5.2-5.7 конкретизируется ситуация примера 5.1 (пример 5.2 представляет интерес для нелинейной классической механики, пример 5.3 - для релятивистской квантовой механики [1, стр. 16-51]).

П р и м е р 5.2. Пусть зафиксированы целые числа $n\geqslant 1, m\geqslant 1, \ell\geqslant 0$, а также числа $p\in(1,\infty)$, δ, $0<\delta\leqslant\infty$, и $\omega>0$. Обозначим через H и $\mathcal{R}$ банаховы пространства периодических на R с периодом ω вещественных вектор-функций соответственно из пространств $\underbrace{W^{\ell}_{p,loc}(R)\times\ldots\times W^{\ell}_{p,loc}(R)}_{n}$ и $\underbrace{W^{m+\ell}_{p,loc}(R)\times\ldots\times W^{m+\ell}_{p,loc}(R)}_{n}$. Рассмотрим на R систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Su+\psi(t,u,\frac{du}{dt},\ldots,\frac{d^m u}{dt^m})=h(t),\ t\in R, \tag{5.7}$$

где $h(t)\in H$ и $u(t)\in\mathcal{R}$ - соответственно заданная и неизвестная вектор-функции, $S=\frac{d^m}{dt^m}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}}$, $\alpha_i(t)$ - периодическая с периодом ω вещественная матрица-функция размера $n\times n$, элементы которой имеют на R обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядков $m-i$ и ℓ, причем последняя принадлежит пространству $L_{p,loc}(R)$, $\psi:R\times R^{n(m+1)}\to R^n$ - вектор-функция, порождающая оператор суперпозиции, непрерывно отображающий пространство $\underbrace{H\times\ldots\times H}_{m}$ в пространство H, не зависящий от последнего аргумента (т.е. от $\frac{d^m u}{dt^m}$) или, если $p=2$, удовлетворяющий по последнему аргументу условию Липшица на множестве $\underbrace{H_\delta\times\ldots\times H_\delta}_{m}$ с достаточно малой константой Липшица L ($L\|S^{-1}P_1\|<1$, см. §§ 3 и 4). Пусть Ξ - линейное подпространство в $\ker S$, $b\in[\Xi\to\ker S^*]$, а Q - линейное подпространство в $\ker S^*$ такое, что $\ker S^*=b(\Xi)\oplus Q$. Введем обозначение $\mathcal{L}u=(u,\frac{du}{dt},\ldots$ $\ldots,\frac{d^m u}{dt^m})$. Предположим, что 1) $\int_0^\omega(\psi(t,\mathcal{L}u),\sigma)_n dt=0$ $\forall u\in\mathcal{R},\forall\sigma\in Q$, где $(\cdot,\cdot)_n$ - скалярное произведение в R^n, 2) $\|\psi(t,\mathcal{L}(u+\sigma))\|_H\leqslant\hat{a}+a_0\|u\|^{\lambda_0}+a\|\sigma\|^{\lambda}$ $\forall u\in\mathcal{R}_\delta$, $\forall\sigma\in\Xi_\delta\setminus\{0\}$, где $a_0\geqslant 0, a\geqslant 0, \lambda_0>0, \lambda\geqslant 0, \hat{a}\geqslant 0$, причем $\hat{a}=0$ при $\delta<\infty$,
3) $\int_0^\omega(\psi(t,\mathcal{L}(u+\sigma)),b\sigma)_n dt=\int_0^\omega\sum_{j=1}^{N}(\hat{\psi}_j(t,\mathcal{L}(u+\sigma),\mathcal{L}(u+\sigma),\mathcal{L}u)+$

$+\psi_j^{(0)}(t, \mathcal{L}(u+\sigma), \mathcal{L}u))\overline{\mathcal{P}_j\sigma}\,dt,\ \forall u \in \mathcal{R},\ \forall \sigma \in \Xi$, где $\mathcal{P}_j \in [\Xi \to L_\infty(0,\omega)]$, а $\hat{\psi}_j : R \times R^{3n(m+1)} \to R$ и $\psi_j^{(0)} : R \times R^{2n(m+1)} \to R$ – функции такие, что $\hat{\psi}_j(t, \mathcal{L}(u+\sigma), \mathcal{L}(u+\sigma), \mathcal{L}u)$ и $\psi_j^{(0)}(t, \mathcal{L}(u+\sigma), \mathcal{L}u) \in L_1(0,\omega)$ $\forall u \in \mathcal{R},\ \forall \sigma \in \Xi$, причем имеет место неравенство: $\sum_{j=1}^{N}(|\hat{\psi}_j(t, \hat{\xi}+\hat{\eta}, \hat{\xi}+\hat{\eta}, \hat{\xi}) - \hat{\psi}_j(t, \hat{\eta}, \hat{\xi}+\hat{\eta}, \hat{\xi})| + |\psi_j^{(0)}(t, \hat{\xi}+\hat{\eta}, \hat{\xi})|) \le \hat{c}(t) + c|\hat{\eta}|^{\gamma} + \hat{c}_0|\hat{\xi}|^{\gamma_0}$ $\forall \hat{\xi}, \hat{\eta} \in R_\delta^{n(m+1)}$, где $\hat{c}(t) \in L_1(0,\omega), c \ge 0$, $\hat{c}_0 \ge 0, \gamma > 0, \gamma_0 > 0$ и $\hat{c}(t) \equiv 0$ на $(0,\omega)$ при $\delta < \infty$. Пусть φ_k и A_k – соответственно замкнутая область и векторное поле из примера 5.1 ($k=1,2,\ldots$).

Предположим, что

$$\inf_{\xi \in \partial\varphi_k} \int_0^{\omega} \inf_{\hat{\eta}, \hat{\xi} \in R_\delta^{n(m+1)}} \sum_{j=1}^{N} \hat{\psi}_j\Big(t, \sum_{i=1}^{d} \xi_i \mathcal{L}\sigma^{(i)}(t), \hat{\eta}, \hat{\xi}\Big)\Big(\mathcal{P}_j \sum_{i=1}^{d} A_k^{(i)}(\xi)\sigma^{(i)}(t)\Big)dt \ge \hat{\varepsilon}\big(\max_{\xi \in \partial\varphi_k} |\xi|\big)^{\gamma^* + \hat{\gamma}},$$

где $\hat{\varepsilon} > 0$, $\hat{\gamma} > 0$, а γ^* – число из примера 5.1. Будем считать, что при $\gamma = \hat{\gamma}$ константа c может быть сделана сколь угодно малой за счет увеличения константы c_0 и нормы функции $\hat{c}(t)$, тогда имеет место неравенство (5.6) (с $\mathcal{U} = \{0\}$ и $c(\omega) = 0$), так что справедливо утверждение, сформулированное в примере 5.1, с заменой уравнения (4.20) на уравнение (5.7) (в данном случае $X = \mathcal{R}$, а $H_0 = \{h \in H \mid \int_0^{\omega} (h, \sigma)_n\,dt = 0\ \ \forall \sigma(t) \in Q\}$)*). Аналогичные утверждения справедливы, конечно, и для других задач (см. примеры 4.2 – 4.7 и задачу L в § 4).

П р и м е р 5.3. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u + c|u|^{\rho}u^{\sigma}(1+|u|^2)^{\frac{\lambda}{2}} = h(x), \tag{5.8}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{L} = \sum_{k,j=1}^{q} a_{kj}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + i\sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $a_{kj}, b_{kj} \in R$, $a_{kj} = a_{jk}$, $b_{kj} = b_{jk}$, n и q – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам: $n \le \min(8, q+4)$, $q \le \min(4, n)$, $h(x)$ и $u(x)$ – соответственно заданная и искомая комплекснозначные функции на R^n, $\rho, \lambda \in R$, $c \in C \setminus \{0\}$, σ – целое число, $\sigma \ne 0$. Зафиксируем целое $\ell \ge 0$ и вещественную невырожденную матрицу $\mathcal{J}$ порядка n. Введем соболевское пространство $W_2^{\ell}(C, \mathcal{J})$ комплекснозначных периодических функций на R^n с матрицей периодов $\mathcal{J}$. Решение уравнения (5.2) будем отыскивать в гильбертовом пространстве $\mathcal{R} = \{u \in W_2^{\ell}(C,\mathcal{J}) | \mathcal{L}u \in W_2^{\ell}(C,\mathcal{J})\}$ (см. пример 4.8). Предположим, что $\det\|a_{kj}\|_{k,j=1,\ldots,q} \ne 0$, а при $q < n$, кроме того, еще и $\det\|b_{kj}\|_{k,j=q+1,\ldots,n} \ne 0$. Пользуясь известной теоремой Минковского-Хассе из теории чисел [12], заключаем, что существуют такие матрицы периодов $\mathcal{J}$, для которых оператор $\mathcal{L}$ будет

---

*) Здесь, разумеется, содержится утверждение о существовании периодического решения у уравнения $\ddot{u} + \alpha\sin u = h(t), \alpha > 0$, описывающего колебания маятника без трения, в резонансном случае: $\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$.

фредгольмовым, как оператор из пространства $\mathcal{R}$ в пространство $W_2^{\ell}(C,\mathcal{J})$; при этом $\ker\mathcal{L}=\operatorname{coker}\mathcal{L}=C$. Из теоремы 4.5 (см. также пример 5.1) следуют такие утверждения: 1) если $\ell>\frac{n}{2}$ и либо $\rho\geq 0$, ρ – четное, $\rho+2\sigma\geq$ ≥ 0 , либо $\rho+\sigma\geq\ell+1$, то $\forall\varepsilon>0$ найдется такое $\varkappa>0$, зависящее от ε , что уравнение (5.3) имеет решение $u(x)\in\mathcal{R}$, $\|u(x)\|\leq\varepsilon$, $\forall h(x)\in W_2^{\ell}(C,\mathcal{J})$, $\|h(x)\|\leq\varkappa$; 2) если $\ell=0$, $\rho+\sigma\geq 1$, $\rho+\sigma+\lambda\leq 1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, зависящее от $\mathcal{J}$, что при $|c|\leq\varepsilon$ уравнение (5.8) разрешимо в пространстве $\mathcal{R}$ $\forall h(x)\in W_2^{\ell}(C,\mathcal{J})$. Сформулированные утверждения остаются справедливыми и в вещественном случае, если $c\in R\setminus\{0\}$, а σ нечетно.

В примерах 5.4–5.6 Ω – ограниченная область в R^n с достаточно гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Точки Ω обозначаются через x , точки $\partial\Omega$ – через x'

П р и м е р 5.4.*) Краевая задача для системы:

$$\Delta u_i+a_i(x)|u_i|^{\omega_i}(\operatorname{sgn}u_i)\sin|\mathcal{P}(u)|^{\frac{\sigma_i}{m}}=f_i(x)\quad\text{в }\Omega,\ \frac{\partial u_i}{\partial\nu}=g_i(x')\text{ на }\partial\Omega,$$

где $i=1,\dots,N$, $u=(u_1,\dots,u_N)$, $\omega_i>0$, $\sigma_i>0$, $\omega_i+\sigma_i<1$, $a_i(x)\in L_{\frac{\rho_i}{1-\omega_i}}(\Omega)$, $1<\rho_i<\infty$, $\int_\Omega a_i(x)dx\neq 0$, $\mathcal{P}(\xi)$ – однородный степени m полином на R^N, обращающийся в нуль только при $\xi=0$, имеет в пространстве $W_{\rho_1}^2(\Omega)\times\dots\times W_{\rho_N}^2(\Omega)$ по крайней мере одно решение, а если N нечетно, то бесчисленное множество решений $\forall f_i\in L_{\rho_i}(\Omega)$, $\forall g_i\in W_{\rho_i}^{1-\frac{1}{\rho_i}}(\partial\Omega)$, $\forall i=1,\dots,N$. Это утверждение следует из теоремы 3.6, а при $\omega_i=\omega$, $\sigma_i=\sigma$, $\rho_i=\rho$ $\forall i=1,\dots,N$ – из теоремы 4.5. Заметим, что при $N=1$ оно сохраняется и тогда, когда нелинейность имеет вид: $|u|^{\omega}\sin|u|^{\sigma}$, где $\omega>0$, $\sigma>0$, $\omega+\sigma<1$, $u=u_1$.

П р и м е р 5.5. Рассмотрим краевую задачу для системы $\Delta u+$ $+\mathcal{P}(x,u)(b+|u|^2)^{\frac{\gamma-m}{2}}=f(x)$ в Ω, $\frac{\partial u}{\partial\nu}=g(x')$ на $\partial\Omega$, где $u=(u_1,\dots,u_N)$, $b\geq 0$, $\gamma\in R$ и $\gamma>0$ при $b=0$, $\mathcal{P}(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, $a_\alpha(x)=(a_\alpha^{(1)}(x),\dots,a_\alpha^{(N)}(x))$, $a_\alpha^{(i)}(x)\in L_\rho(\Omega)$, $\rho>\frac{n}{2}$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_N^{\alpha_N}$. Предположим, что векторное поле $A(\xi)=\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_\Omega a_\alpha(x)dx\right)\xi^\alpha$ невырожденно на $R^N\setminus\{0\}$ и его вращение на сфере $|\xi|=1$ отлично от нуля. Введем обозначения: $\mathcal{R}=\underbrace{W_\rho^2(\Omega)\times\dots\times W_\rho^2(\Omega)}_{N}$, $H=\underbrace{L_\rho(\Omega)\times\dots\times L_\rho(\Omega)}_{N}\times\underbrace{W_\rho^{1-\frac{1}{\rho}}(\partial\Omega)\times\dots\times W_\rho^{1-\frac{1}{\rho}}(\partial\Omega)}_{N}$, $h=(f(x),g(x'))$. Имеет место следующее утверждение (теоремы 4.3, 4.7): указанная краевая задача разрешима в пространстве $\mathcal{R}$: 1) $\forall h\in H$, если $0<\gamma<1$, или если $\gamma=1$, $m>1$ и b достаточно велико, 2) $\forall h\in H$, имеющих достаточно малую норму, если $b>0$, $m>1$ или если $b=0$, $\gamma>1$, 3) $\forall h\in H$, у которых $\left|\int_\Omega f(x)dx-\int_{\partial\Omega}g(x')dx'\right|<1$,

*) В этом и следующих примерах 5.5–5.7 все функции и функциональные пространства считаются вещественными.

если $b>0$, $y=0$.

Пример 5.6. Краевая задача $\ddot u+\alpha\dot u+\beta u+\nu(t)|u|^{\sigma}\operatorname{sgn}u=f(t)$, $u(0)=a$, $u(1)=b$, где $\alpha,\beta,a,b\in R$, $f\in L_p(0,1)$, $p\in(1,\infty)$, $\sigma\in(0,1)$, $\nu(t)\in L_p(0,1)$ $\alpha^2<4\beta$, $\frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2\pi}$ - целое число, $\int_0^1\nu(t)e^{\frac{(1-\sigma)\alpha t}{2}}\left|\sin\frac{t\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}\right|^{\sigma+1}dt\neq 0$, разрешима в пространстве $W_p^2(0,1)$ $\forall f\in L_p(0,1)$, $\forall a,b\in R$ (см. теорему 4.3).

Пример 5.7. Рассмотрим задачу L (см. § 4). Пусть оператор $B^{(0)}:U\to\mathcal{R}^*$ удовлетворяет неравенству: $<B^{(0)}(w+u),u>\geq\varepsilon_0(\rho^0(u)-C(w))$ $\forall u\in\mathcal{R}$, $\forall w\in U$, где $\varepsilon_0>0,\sigma>0,C:U\to R$ и $C(w)\to 0$ при $w\to 0$, а оператор $G_w^{(h)}$ псевдомонотонен на X $\forall h\in H_0$, $\forall w\in U$. Пусть, далее, оператор $\mu:U\to\mathcal{R}^*$ удовлетворяет тождеству

$$<\mu(u),v>=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\int_{\Omega}a(x)\sum_{j\in J_k}\psi_j(\mathcal{T}u)\mathcal{T}_j v\,dx\quad \forall u\in U,\ \forall v\in\Xi,$$

где $\varepsilon_k\in R\setminus\{0\}$, $\mathcal{T}=(\mathcal{T}_1,\ldots,\mathcal{T}_N)$, $\mathcal{T}_j\in[U\to L_{\tau,c(x)}]$, $1<\tau<\infty$, $\bigcup_{1\leq k\leq M}J_k=\{1,\ldots,N\}$, $J_k\cap J_l=\varnothing$ при $k\neq l$, $\psi_j(\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi_j}|\xi|^{\tau}$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)\in R^N$, $a(x)$ - измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $0<a(x)\leq Kc^{\frac{1}{\tau}}(x)$ $\forall x\in\Omega$, $K\in R$. Предположим, что $\Xi\cap\ker\mathcal{T}=\{0\}$ и существует разложение подпространства Ξ в прямую сумму линейных подпространств: $\Xi=\Xi_1\oplus\ldots\oplus\Xi_M$ такое, что $\Xi_l\subset\ker\mathcal{T}_j$ $\forall j\in J_k$ при $l\neq k$. В силу теоремы 4.3, задача L при $\sigma>\tau$ разрешима в подпространстве X $\forall$ допустимых наборов g и $\forall h\in H_0$, а при $\sigma<\tau$ $\forall\varepsilon>0$ найдется такое $\varkappa>0$, зависящее от ε, что задача L имеет решение в шаре X_ε $\forall$ допустимых наборов g, $\|g\|\leq\varkappa$, $\forall h\in H_{0\varkappa}$. Пусть теперь оператор μ удовлетворяет тождеству $<\mu(u),v>=\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega}\psi_j(x,\mathcal{T}u)\sin\left(\frac{\pi}{2}|\mathcal{P}(\mathcal{T}u)|^{\frac{\omega}{m}}\right)\mathcal{T}_j v\,dx$ $\forall u\in U$, $\forall v\in\Xi$, где $\psi_j(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=\tau-1}a_\alpha^{(j)}(x)\xi^\alpha$;*) $\tau>1$ - целое; $1-\tau<\omega<1$; $\mathcal{T}$ - тот же набор операторов, что и выше, причем $\mathcal{T}_i v^{(i)}=\delta_{ij}$ на Ω (δ_{ij} - символ Кронекера) и $\mathcal{T}_j\in\left[U\to L_{\frac{\tau}{1-\omega},c(x)}(\Omega)\right]$; $a_\alpha^{(j)}(x)$ - измеримая функция и $|a_\alpha^{(j)}(x)|^{\tau}\leq K\min\left(c^{1-\omega}(x),c(x)\right)$ $\forall x\in\Omega$, $K\in R$; векторное поле $A(\xi)=\left\{\int\psi_j(x,\xi)dx\right\}_{j=1,\ldots,N}$ невырожденно на $R^N\setminus\{0\}$ и имеет на сфере $|\xi|=1$ ненулевое вращение, $P(\xi)$ - однородный многочлен степени m на R^N, обращающийся в нуль лишь при $\xi=0$. Из теоремы 4.5 следует, что 1) если $0\leq\omega<1$ и $(\sigma-1)(1-\omega)>\tau-1$, то задача L разрешима в подпространстве X, а если $\omega>0$ и N нечетно, то она имеет в подпространстве X бесчисленное множество решений $\forall$ допустимых наборов g и $\forall h\in H_0$. 2) если $1-\tau<\omega<0$ и $(\sigma-1)(1-\omega)<\tau-1$, то $\forall\varepsilon>0$ найдется такое $\varkappa>0$, зависящее от ε, что задача L разрешима в шаре X_ε $\forall$ допустимых наборов g, $\|g\|\leq\varkappa$, и $\forall h\in H_{0\varkappa}$; если, кроме того, N нечетно, то число решений задачи L в шаре X_ε стремится к ∞ при $g\to 0$, $h\to 0$.

Во всех предыдущих примерах подчиненные добавки имели рост не вы-

*) По поводу обозначений см. пример 5.5.

ше степенного. В следующем примере рост добавочной нелинейности по некоторой подпоследовательности может быть сколь угодно сильным.

П р и м е р 5.8. Пусть операторное уравнение (4.20) принадлежит классу $\mathfrak{M}$ и имеет место неравенство

$$Re\langle G_{\varpi}^{(h)}(u+\sigma),u\rangle \geq \eta(u,\sigma,h,\varpi)(\|u\|^{6}-\chi(\|u\|,\|\sigma\|)-\beta(h,\varpi)) \ \forall u\in Y,\ \forall\sigma\in\Xi,\ \forall h\in H_0,\ \forall\varpi\in\mathcal{U},$$

где $\eta: Y\times\Xi\times H_0\times\mathcal{U}\to[0,\infty)$, $\beta: H_0\times\mathcal{U}\to R$, $\chi:[0,\infty)\times[0,\infty)\to R$, $6>0$, причем функция χ возрастает в широком смысле на промежутке $[0,\infty)$ по любому из аргументов при зафиксированном другом. Пусть существуют две последовательности положительных чисел $\{\rho_k\}$ и $\{\tau_k\}$, обладающие свойством $\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\nu(\rho_k,\tau_k)+\beta(h,\varpi)}{\rho_k^{6}}<1$. Зафиксируем некоторую последовательность $\{\varphi_k\}$ ограниченных замкнутых областей в Ξ, обладающую тем свойством, что $\sup_{\sigma\in\partial\varphi_k}\|\sigma\|\leq\tau_k$, и последовательность непрерывных векторных полей $\{A_k:\varphi_k\to\Xi\}$, невырожденных на $\partial\varphi_k$ и имеющих на $\partial\varphi_k$ ненулевое вращение. Положим $\psi_k=\{u\in Y\,|\,\|u\|\leq\rho_k\}$. Тогда при выполнении условий теоремы 4.6 или теоремы 4.7 уравнение (4.20) имеет в подпространстве X по крайней мере одно решение, а если множества φ_k попарно не пересекаются между собой, то - бесчисленное множество решений. Описанная ситуация конкретизируется в следующем примере, где все функции и пространства считаются вещественными.

П р и м е р 5.9. Рассмотрим краевую задачу $\Delta u+\psi(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n})=f(x)$ в Ω, $\frac{\partial u}{\partial\nu}=g(x')$ на $\partial\Omega$. Пусть функция $\psi:\Omega\times R^{n+1}\to R$ удовлетворяет условию Каратеодори, причем $\psi_6(x)=\sup_{|\xi_0|\leq 6_0,\,\xi\in R^n}|\psi(x,\xi_0,\xi)|\in L_p(\Omega)$, $p>n/2$, $\forall 6>0$. Положим $\nu_0(6)=\|\psi_6(x)\|_{L_p(\Omega)}$, $C_0=\sup_{\|u\|_{W_p^2(\Omega)}=1}\max_{x\in\bar\Omega}|u(x)|$,

$$\gamma_+(6)=\int_\Omega\inf_{\xi\in R^n}\psi(x,6,\xi)dx,\quad \gamma_-(6)=\int_\Omega\sup_{\xi\in R^n}\psi(x,-6,\xi)dx.$$

Пусть, наконец, $\underline{\lim}_{6\to\infty}\frac{\nu_0(6)}{6}<\frac{1}{\|S^{-1}P_1\|C_0(1+\|I\|_{W_p^2(\Omega)}C_0)}$ (по поводу обозначения $S^{-1}P_1$ см. § 3), $f(x)\in L_p(\Omega)$, $g(x')\in W_p^{1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ и $\overline{\lim}_{6\to\infty}\gamma_-(6)<\int_\Omega f(x)dx-\int_{\partial\Omega}g(x')dx'<\underline{\lim}_{6\to\infty}\gamma_+(6)$. Тогда указанная краевая задача разрешима в пространстве $W_p^2(\Omega)$.

Л и т е р а т у р а

1. Л и о н с Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Пер. с франц. М., "Мир", 1972, 587 с.

2. П о р т н о в В.Р. Разрешимость некоторых нелинейных операторных уравнений в рефлексивных пространствах Банаха. Приложения к решению краевых задач для квазилинейных уравнений и систем уравнений дивер -

гентного вида. – В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1975, с. 128–188.

3. L a z e r A. On Schauder's fixed point and forced second-order nonlinear oscillations.-In: Proceedings United States-Japan Seminar on differential and functional equations. New York, Amsterdam, 1967,p.473–478.

4. L a n d e s m a n E., L a z e r A. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.-"J.Math.and Mech.",1970, v.19, N 7, p.609–623.

5. W i l l i a m s S.A. A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear elliptic boundary value problem.-"J.Different.Equations", 1970,v.8, N 3, p.580–586.

6. N e c a s J. The range of nonlinear operators with linear asymptotes which are not invertible.-"Comment. Math. Univ.Carolinae",1973,v.14, N 1, p.63–72.

7. F u c i k S., K u c e r a M., N e c a s J. Asymptotically linear Operators.-"J.Different.Equations", 1975,v.17, N 2, p.375–394.

8. Функциональный анализ. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., "Наука", 1972, 544 с.

9. П о р т н о в В.Р. О разрешимости одного нелинейного операторного уравнения. – "Докл. АН СССР", 1976, т. 227, № 6, с. 1301–1304.

10. К р е й н С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М. "Наука", 1971.

11. N i r e n b e r g L. Topics in nonlinear functional analysis. Courant institute of mathematical sciences, New York University, 1974.

12. Б о р е в и ч З.И. и Ш а ф а р е в и ч И.Р. Теория чисел. Изд. 2. М., "Наука", 1972, 495 с.

13. П о х о ж а е в С.И. О некоторых линейных уравнениях. – Докторская диссертация, Новосибирск, 1971.

14. П о х о ж а е в С.И. О нелинейных операторах, имеющих слабо замкнутую область значений в квазилинейных эллиптических уравнениях. – "Матем. сб.", 1969, т. 78, с. 237–259.

15. П о р т н о в В.Р. О некоторых интегральных неравенствах. – В кн.: Теоремы вложения и их приложения. Баку, 1966, М., 1970, с. 195–203.

16. Л и о н с Ж.-Л., Э. М а д ж е н е с . Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., "Мир", 1971.

17. Л ь в и н С.Я. Формула Грина и разрешимость эллиптических задач с граничными условиями любого порядка. – "Труды НИИ математики ВГУ", вып. ХУП (теория операторных уравнений), Воронеж, 1975.

18. П о р т н о в В.Р. Нормальная разрешимость одной абстрактной нелинейной задачи. Приложения к решению краевых задач для диффе-

ренциальных уравнений с частными производными. - "Докл. АН СССР," 1971, т. 196, № 5, с. 1028-1031.

19. П о р т н о в В. Р. Об условиях нормальной разрешимости в смысле Хаусдорфа одной нелинейной задачи. - "Докл. АН СССР", 1973, т. 209. № 3, с. 555-557.

20. П о р т н о в В. Р. Нормал· ·ая разрешимость в смысле Хаусдорфа одной нелинейной задачи. - "Дифференциальные уравнения", 1973, т. 9, № 9, с. 1707-1717.

21. П о р т н о в В. Р. О нормальной разрешимости одной нелинейной задачи. Приложения к решению вырождающихся дифференциальных уравнений. - В кн.: Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики. Новосибирск, 1972, с. 179-190.

22. П о р т н о в В. Р. Первая краевая задача для вырождающихся квазилинейных уравнений и систем уравнений эллиптического типа в неорганических областях. - В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1973, с. 162-170.

23. П о р т н о в В. Р. Первая краевая задача для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений и систем. - Кандидатская диссертация, Новосибирск, 1967.