УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ОЦЕНКИ

П.И. Лизоркин, Д.Г. Орловский (Москва)

§ 1. Введение

Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Для него известна интерполяционная формула

$$T_n(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} T_n(t^j)\, \mathcal{D}_n(x - t^j), \tag{2}$$

где

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad t^j = \frac{2\pi}{2n+1} j, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n \tag{3}$$

(см., например, [1-3]).

Введем $2n+1$ -мерное пространство $\Pi_n = \{T_n(x)\}$ с нормой L_p и будем рассматривать оператор

$$S : T_n(x) \longrightarrow (T_n(t^0), \ldots, T_n(t^{2n})) = \{g_0, \ldots, g_{2n}\}, \tag{4}$$

отображающий Π_n в пространство R_{2n+1} , которое мы наделим нормой ℓ_p . Известны оценки нормы этого оператора

$$A \| T_n(\cdot) \|_{L_p} \le \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right)^{\frac{1}{p}} \| \{g_k\} \|_{\ell_p} \le B \| T_n(\cdot) \|_{L_p}, \tag{5}$$

где A и B не зависят от n (см. [1]).

Статья посвящена получению интерполяционных формул для тригонометрических и экспоненциальных многочленов в многомерном случае и выводу для них оценок вида (5).

§ 2. Интерполяционная формула для тригонометрических многочленов в многомерном случае

Интерполяционная формула (2) легко получается, если использовать соотношение ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{D}_n^k(x)\mathcal{D}_n^\ell(x)dx = \frac{2n+1}{2}\pi\delta_{k\ell}, \tag{6}$$

где $\mathcal{D}_n^k(x)=\mathcal{D}_n(x-t^k)$; (6) проверяется непосредственно, если учесть, что

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx. \tag{7}$$

Пусть теперь

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\alpha_k\mathcal{D}_n^k(x). \tag{8}$$

Интегрируя с учетом (6), имеем

$$\int_0^{2\pi} T_n(x)\mathcal{D}_n^k(x)dx = \frac{2n+1}{2}\pi\alpha_k. \tag{9}$$

Но, с другой стороны, все коэффициенты Фурье ядра Дирихле $\mathcal{D}_n(x)$ равны единице, поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_n(x)\mathcal{D}_n(x-t)dx = T_n(t). \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), видим, что $\alpha_k = \frac{2}{2n+1}T_n(t^k)$, откуда и получаем интерполяционную формулу (2).

Перейдем теперь к N-мерному случаю. Пусть

$$U_n(x) = \sum_{-n\le k\le n} c_k e^{ikx}. \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем $n=(n_1,\dots,n_N)$, $k=(k_1,\dots,k_N)$ – мультииндексы, $x=(x_1,\dots,x_N)$, $kx=k_1x_1+\dots+k_Nx_N$. Запись $k\le n$ означает, что это неравенство выполняется для всех компонент мультииндексов k и n. Пусть Q – куб $\{x, 0\le x_j\le 2\pi, j=1,\dots,N\}$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_Q U_n(y)e^{-iky}dy.$$

Введем в рассмотрение многомерное ядро Дирихле

$$\mathcal{D}_n(x) = \frac{1}{2^N}\sum_{-n\le k\le n} e^{ikx} = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k_j=1}^{n_j}\cos k_jx_j\right) = \prod_{j=1}^{N}\frac{\sin\frac{2n_j+1}{2}x_j}{2\sin\frac{x_j}{2}}. \tag{12}$$

Так как $\mathcal{D}_n(x)$ имеет единичные коэффициенты Фурье, то справедливо равенство

$$U_n(x) = \frac{1}{\pi^N}\int_Q U_n(y)\mathcal{D}_n(x-y)dy. \tag{13}$$

Возьмем произвольную систему равноотстоящих узлов

$$t^k = \left(\frac{2\pi k_1}{2n_1+1}+\tau_1^0,\dots,\frac{2\pi k_N}{2n_N+1}+\tau_N^0\right),\ k_j=0,1,\dots,2n_j,\ j=1,2,\dots,N. \tag{14}$$

Положим $\mathcal{D}_n^{\kappa}(x)=\mathcal{D}_n(x-t^{\kappa})$. Тогда в силу (6)

$$(\mathcal{D}_n^{\kappa}, \mathcal{D}_n^{\ell}) = \int_Q \mathcal{D}_n^{\kappa}(x)\overline{\mathcal{D}_n^{\ell}(x)}dx = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2n_j+1}{2}\right)\pi^N \delta_{\kappa\ell}. \tag{15}$$

Рассмотрим совокупность V_n всевозможных многочленов вида (11) при фиксированном n. Ввиду (15) система функций $\{\mathcal{D}_n^{\kappa}(x)\}$ линейно-независима, а так как их число равно размерности пространства V_n, то они образуют в нем базис. Легко видеть, что соотношения, аналогичные (8), (9), (10), сохраняются, и поэтому

$$U_n(x)=\left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2}{2n_j+1}\right)\sum_{0\le\kappa\le 2n} U_n(t^{\kappa})\mathcal{D}_n^{\kappa}(x). \tag{16}$$

§ 3. Интерполяционная формула для экспоненциальных многочленов в многомерном случае

Будем рассматривать теперь экспоненциальные многочлены, т.е. функции вида

$$U_n(x)=\sum_{0\le\kappa\le n} c_{\kappa} e^{i\kappa x}. \tag{17}$$

Ясно, что

$$c_{\kappa}=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_Q U_n(y)e^{-i\kappa y}dy.$$

Введем одностороннее ядро Дирихле

$$\Delta_n(x)=\frac{1}{2^N}\sum_{0\le\kappa\le n} e^{i\kappa x}=\prod_{j=1}^{N} e^{in_j\frac{x_j}{2}}\frac{\sin(n_j+1)\frac{x_j}{2}}{2\sin\frac{x_j}{2}} \tag{18}$$

(формула (18) проверяется непосредственным вычислением). Аналогично, как и в (13), получим

$$U_n(x)=\frac{1}{\pi^N}\int_Q U_n(y)\Delta_n(x-y)dy. \tag{19}$$

Узлы интерполяции определим следующим образом:

$$t^{\kappa}=\left(\frac{2\pi\kappa_1}{n_1+1}+\tau_1^0,\dots,\frac{2\pi\kappa_N}{n_N+1}+\tau_N^0\right),\quad \kappa_j=0,1,\dots,n_j,\quad j=1,2,\dots,N. \tag{20}$$

Положим $\Delta_n^{\kappa}(x)=\Delta_n(x-t^{\kappa})$. Исходя из определения (18), нетрудно вычислить скалярное произведение $\Delta_n^{\kappa}(x)$ и $\Delta_n^{\ell}(x)$

$$(\Delta_n^{\kappa}(x), \Delta_n^{\ell}(x)) = \int_Q \Delta_n^{\kappa}(x)\overline{\Delta_n^{\ell}(x)}dx=\pi^N\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{n_j+1}{2}\right)\delta_{\kappa\ell}. \tag{21}$$

Введем множество V_n^+ экспоненциальных многочленов вида (17) при фиксированном n. Система $\{\Delta_n^{\kappa}(x)\}$ линейно-независима и образует базис V_n^+, поэтому $U_n(x)=\sum_{0\le\kappa\le n}\alpha_{\kappa}\Delta_n^{\kappa}(x)$. Интегрируя с учетом (21), получаем

$$\int_Q U_n(x)\overline{\Delta_n^k(x)}\,dx = \pi^N\left(\prod_{j=1}^N \frac{n_j+1}{2}\right)\alpha_k . \tag{22}$$

Но в силу (19)

$$U_n(t^k)=\frac{1}{\pi^N}\int_Q U_n(x)\Delta_n(t^k-x)dx=\frac{1}{\pi^N}\int_Q U_n(x)\overline{\Delta_n(x-t^k)}dx=\frac{1}{\pi^N}\int_Q U_n(x)\overline{\Delta_n^k(x)}dx . \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), видим, что

$$U_n(x)=\left(\prod_{j=1}^N \frac{2}{n_j+1}\right)\sum_{0\le k\le n} U_n(t^k)\Delta_n^k(x). \tag{24}$$

З а м е ч а н и е. При $N=1$ и $n=2m$ формула (24) приводится (домножением на e^{-imx}) к известной интерполяционной формуле (2) для тригонометрических многочленов. Если же n нечетно, то экспоненциальный многочлен не сводится к тригонометрическому и формула (24) является новой.

Применим полученный результат к функциям вида

$$T_{m,n}(x)=\sum_{-m\le k\le n} c_k e^{ikx}. \tag{25}$$

Умножением на e^{imx} функция $T_{m,n}(x)$ сводится к экспоненциальному многочлену, следовательно, к функции $U_{m,n}(x)=T_{m,n}(x)e^{imx}$ применима интерполяционная формула (24), из которой следует

$$T_{m,n}(x)=\left(\prod_{j=1}^N \frac{2}{m_j+n_j+1}\right)\sum_{0\le k\le m+n} T_{m,n}(t^k)\mathcal{D}_{m,n}^k(x), \tag{26}$$

где $\mathcal{D}_{m,n}^k(x)=\mathcal{D}_{m,n}(x-t^k)$, причем

$$\mathcal{D}_{m,n}(x)=\prod_{j=1}^N e^{i\frac{n_j-m_j}{2}x_j}\;\frac{\sin\frac{m_j+n_j+1}{2}x_j}{2\sin\frac{x_j}{2}}, \tag{27}$$

$$t^k=\left(\frac{2\pi k_1}{m_1+n_1+1}+\tau_1^0,\dots,\frac{2\pi k_N}{m_N+n_N+1}+\tau_N^0\right),\quad k_j=0,1,\dots,m_j+n_j,\quad j=1,2,\dots,N. \tag{28}$$

§ 4. Оценки, связанные с интерполяционной формулой

В пространстве V_n^+ введем оператор K следующим образом: $KU_n(x)=\{U_n(t^k)\}=\{g_k\}$. Получим теперь оценки нормы оператора K . Для этого используем интерполяционную формулу (24). В формуле (19) ядро $\Delta_n(x-y)$ можно заменить на любую функцию, коэффициенты Фурье которой при $0\le k\le n$ равны единице. Выберем следующее ядро типа Валле-Пуссена

$$V_{n,m}(x)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m {}_{-j}\Delta_{n+j}(x),$$

где

$$ {}_{-j}\mathcal{D}_{n+j}(x) = \frac{1}{2^N} \sum_{-j\le k\le n+j} e^{ikx}. $$

Ясно, что коэффициенты Фурье $V_{n,m}(x)$ равны единице при $0\le k\le n$, следовательно,

$$ U_n(x) = \frac{1}{\pi^N} \int_Q U_n(y) V_{n,m}(x-y)\,dy. \tag{29} $$

Легко вычислить явный вид этого ядра

$$ V_{n,m}(x) = \prod_{j=1}^{N} V_{n_j,m_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{N} e^{i\frac{n_j}{2}x_j} \frac{\sin\frac{m_j x_j}{2}\sin\frac{n_j+m_j+2}{2}x_j}{2m_j\sin^2\frac{x_j}{2}}. \tag{30} $$

Т е о р е м а 1. <u>Пусть</u> $U_n(x) = \sum_{0\le k\le n} c_k e^{ikx}$, $1\le p\le\infty$, <u>тогда</u>

$$ \Big(\sum_{0\le k\le n} |U_n(t^k)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\prod_{j=1}^{N}\frac{3(n_j+1)}{\pi}\Big)^{\frac{1}{p}} \|U_n(\cdot)\|_{L_p(Q)}, \tag{31} $$

<u>где t^k определено формулой (20).</u>

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1.Из неравенств $|\sin u|\le 1$, $\frac{2|u|}{\pi}\le|\sin u|\le|u|$ при $|u|\le\frac{\pi}{2}$ вытекает следующая оценка при $0<|x|\le\pi$:

$$ \left|\frac{\sin\frac{mx}{2}\sin\frac{n+m+2}{2}x}{m\sin^2\frac{x}{2}}\right| \le \min\Big(n+m+2,\ \frac{\pi^2}{m|x|^2}\Big). \tag{32} $$

Отсюда получаем оценку $V_{n,m}(x)$ при $0\le|x_j|\le\pi$, $j=1,2,\dots,N$:

$$ |V_{n,m}(x)| \le \frac{1}{2^N}\min\Big(\prod_{j=1}^{N}(n_j+m_j+2),\ \frac{\pi^{2N}}{\prod_{j=1}^{N} m_j|x_j|^2}\Big). \tag{33} $$

2. Ясно, что $\max_{\{k\}}|U_n(t^k)|\le\max_{\{x\}}|U_n(x)|$, причем равенство достигается на многочленах $\big(\prod_{j=1}^{N}\frac{2}{n_j+1}\big)\mathcal{D}_n^k(x)$, поэтому в силу определения оператора K имеем

$$ \|K\|_{L_\infty\to l_\infty} = 1. \tag{34} $$

Далее, из формулы (29) имеем

$$ \sum_{0\le k\le n}|U_n(t^k)| = \frac{1}{\pi^N}\sum_{0\le k\le n}\Big|\int_Q U_n(\xi)V_{n,m}(t^k-\xi)d\xi\Big| \le \frac{1}{\pi^N}\sup_{\xi}\sum_{0\le k\le n}|V_{n,m}(t^k-\xi)|\int_Q|U_n(\xi)|d\xi. \tag{35} $$

3. Введем функцию

$$ \varpi(\xi) = \sum_{0\le k\le n}|V_{n,m}(t^k-\xi)|. \tag{36} $$

Узлы интерполяции отстоят друг от друга на $\frac{2\pi}{n_j+1}$ вдоль оси x_j , поэтому сдвиг $\xi\to\xi+\Big(\frac{2\pi k_1}{n_1+1},\dots,\frac{2\pi k_N}{n_N+1}\Big)$ эквивалентен сдвигу узлов $t^k\to t^k-\Big(\frac{2\pi k_1}{n_1+1},\dots,\frac{2\pi k_N}{n_N+1}\Big)$ (по модулю 2π вдоль каждой оси). Следовательно, при сдвиге между функциями $\{V_{n,m}(t^k-\xi)\}$ с различными k происходит перестановка, и поэтому сумма (36) не меняется, другими словами, $\varpi(\xi)$ периодична с периодом $\frac{2\pi}{n_j+1}$ вдоль оси x_j .

Таким образом, достаточно оценить $\omega(\xi)$ в кубе с ребрами длиной $\frac{2\pi}{n_j+1}$. В силу 2π-периодичности, функцию $V_{n,m}(x)$ можно оценивать не в кубе Q, а в кубе $Q' = \{-\pi \le \xi_j \le \pi; j=1,\dots,N\}$, а $\omega(\xi)$ – в кубе $q = \{-\frac{\pi}{n_j+1} \le \xi_j \le \frac{\pi}{n_j+1}; j=1,\dots,N\}$. Зададим узлы следующим образом:

$$\tau_j^{K} = \frac{2K_j+1}{n_j+1}\pi\ ; \quad j=1,2,\dots,N; \quad K_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \tau_j, \tag{37}$$

где $\tau_j = \left[\frac{n_j}{2}\right]$ – наибольшее целое, не превосходящее $\frac{n_j}{2}$. Если хотя бы одно из n_j четно, то возникают "лишние" узлы на границе куба Q', что можно допустить, так как сумма (36) только увеличится. Но теперь начало координат является центром симметрии решетки, образованной узлами(с учетом "лишних" узлов), и в то же время центром куба q. Следовательно, мажоранта (33), сдвинутая на узлы, расположенные симметрично относительно какой-либо координатной плоскости, даст функции, симметричные на q относительно его центра, поэтому

$$\begin{aligned}\omega(\xi) &\le \frac{1}{2^N}\sum_{\tau^K\in Q'} \min\left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+m_j+2),\ \frac{\pi^{2N}}{\prod_{j=1}^{N} m_j|\tau_j^K-\xi_j|^2}\right\} = \\ &= \sum_{\substack{\tau^K\in Q'\\ K\ge 0}} \min\left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+m_j+2),\ \frac{\pi^{2N}}{\prod_{j=1}^{N} m_j|\tau_j^K-\xi_j|^2}\right\}\end{aligned} \tag{38}$$

(мы использовали тот факт, что имеется ровно 2^N квадрантов, образованных координатными гиперплоскостями).

В сумме (38) только одно слагаемое, отвечающее узлу τ^0, имеет максимум на q, равный $\prod_{j=1}^{N}(n_j+m_j+2)$, остальные слагаемые определяются выражением в (38), стоящим после запятой, и возрастают на q по каждому аргументу, достигая максимума в точке $\xi=\tau^0$. Следовательно,

$$\omega(\xi) \le \prod_{j=1}^{N}(n_j+m_j+2) + \sum_{\substack{\tau^K\in Q'\\ K>0}} \frac{\pi^{2N}}{\prod_{j=1}^{N} m_j\left|\frac{2K_j+1}{n_j+1}\pi - \frac{\pi}{n_j+1}\right|^2}. \tag{39}$$

Пусть, для определенности, $m_j = n_j$ $(j=1,2,\dots,N)$

$$\begin{aligned}\omega(\xi) &\le 2^N\prod_{j=1}^{N}(n_j+1) + \prod_{j=1}^{N}\frac{(n_j+1)^2}{n_j}\sum_{0<K\le\frac{n}{2}}\frac{1}{\prod_{j=1}^{N}4K_j^2} = \\ &= 2^N\prod_{j=1}^{N}(n_j+1) + \left(\frac{1}{4^N}\prod_{j=1}^{N}\frac{(n_j+1)^2}{n_j}\right)\sum_{0<2K\le n}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{K_j^2}.\end{aligned} \tag{40}$$

Если $n_0 = \max\{n_1,\dots,n_N\}$, то

$$\sum_{0<2K\le n}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{K_j^2} \le \sum_{0<K_j\le\frac{n_0}{2}}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{K_j^2} = \left(\sum_{K=1}^{n_0/2}\frac{1}{K^2}\right)^N \le \left(\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K^2}\right)^N = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^N.$$

Следовательно,

$$\omega(\xi) \le \left(\prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right)\left[2^N + \prod_{j=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n_j}\right)\frac{\pi^2}{24}\right]. \tag{41}$$

Отсюда получаем следующую оценку

$$\omega(\xi) \le 3^N \prod_{j=1}^{N} (n_j + 1). \tag{42}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\sum_{0\le k\le n} |U_n(\tau^k)| \le \left(\frac{3}{\pi}\right)^N \left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\} \int_Q |U_n(t)|dt. \tag{43}$$

4. Покажем, что неравенство справедливо для любой системы равноотстоящих узлов. Действительно, любая такая система получается из (37) сдвигом $t^k = \tau^0+\tau^k$. Положим $V_n(x)=U_n(x+\tau^0)$, $V_n(x)$ – экспоненциальный многочлен степени n, поэтому для него справедлива оценка (43)

$$\sum_{0\le k\le n} |V_n(\tau^k)| \le \left(\frac{3}{\pi}\right)^N \left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\} \int_Q |V_n(t)|dt.$$

Но $\sum\limits_{0\le k\le n} |V_n(\tau^k)| = \sum\limits_{0\le k\le n} |U_n(\tau^k+\tau^0)| = \sum\limits_{0\le k\le n} |U_n(t^k)|$, а с другой стороны, в силу 2π – периодичности функции $U_n(x)$

$$\int_Q |V_n(x)|dx = \int_Q |U_n(x)|dx.$$

Следствие 1. Пусть $1\le p\le\infty$, $U_n(x) = \sum\limits_{0\le k\le n} c_k e^{ikx}$, t^k определено формулой (20), тогда

$$\sum_{0\le k\le n} |U_n(t^k)| \le \left(\frac{3}{\pi}\right)^N \left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\} \int_Q |U_n(t)|dt. \tag{44}$$

Таким образом, приходим к оценке нормы оператора K

$$\|K\|_{L_1\to \ell_1} \le \left(\frac{3}{\pi}\right)^N \left\{\prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\} \int_Q |U_n(t)|dt. \tag{45}$$

5. Мы получили оценку нормы оператора K при $p=1$ и $p=\infty$. Для того чтобы оценить норму этого оператора при произвольном значении p $(1\le p\le\infty)$, используем интерполяционные соображения. Пространства L_p и ℓ_p являются интерполяционными между L_1, L_∞ и ℓ_1, ℓ_∞ соответственно, т.е. $L_p=[L_1,L_\infty]_\theta$, $\ell_p=[\ell_1,\ell_\infty]_\theta$ при $\theta = 1-\frac{1}{p}$. Применяя теорему об интерполяции операторов, получаем

$$\|K\|_{L_p\to \ell_p} \le \|K\|^{1-\theta}_{L_1\to \ell_1} \|K\|_{L_\infty\to \ell_\infty} \le \left\{\left(\frac{3}{\pi}\right)^N \prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Итак, теорема 1 доказана.

Следствие 2. Пусть $1\le p\le\infty$, $U_n(x)=\sum\limits_{0\le k\le n} c_k e^{ikx}$, t^k определено формулой (20), тогда

$$\max_x \left\{\sum_{0\le k\le n} |U_n(x+t^k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\left(\frac{3}{\pi}\right)^N \prod_{j=1}^{N}(n_j+1)\right\}^{\frac{1}{p}} \|U_n(\cdot)\|_{L_p(Q)}. \tag{46}$$

Действительно, зафиксируем x_0, тогда функция $V_n(x)=U_n(x_0+x)$ является экспоненциальным многочленом, и для нее справедливо неравенство (31), т.е.

$$\Big\{\sum_{0\le k\le n}|V_n(t^k)|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\le\Big\{\Big(\frac{3}{\pi}\Big)^N\prod_{j=1}^N(n_j+1)\Big\}^{\frac{1}{p}}\|V_n(\cdot)\|_{L_p(Q)}.$$

Но так как

$$\sum_{0\le k\le n}|V_n(t^k)|^p=\sum_{0\le k\le n}|U_n(x_0+t^k)|^p,$$

а, с другой стороны, $\|V_n(\cdot)\|_{L_p(Q)}=\|U_n(\cdot)\|_{L_p(Q)}$, то неравенство (46) установлено.

Т е о р е м а 2. Пусть $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, тогда

$$\|K^{-1}\|_{\ell_p\to L_p}\le(6^N)^{\frac{1}{p'}}C_{p'}\Big(\prod_{j=1}^N\frac{2\pi}{n_j+1}\Big)^{\frac{1}{p}},\tag{47}$$

где $C_{p'}$ – постоянная в неравенстве Рисса (48).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(x)\in L_{p'}$ и представляется рядом

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty\le k\le\infty}\varphi_k e^{ikx}.$$

Тогда $\varphi(x)=\sum_{0\le k\le n}\varphi_k e^{ikx}+\sum_{k\notin[0,n]}\varphi_k e^{ikx}=\Phi_n(x)+\sum_{k\notin[0,n]}\varphi_k e^{ikx}$, где $\Phi_n(x)=\sum_{0\le k\le n}\varphi_k e^{ikx}$, а запись $k\notin[0,n]$ означает, что для мультииндекса k неверно соотношение $0\le k\le n$. Так как $\Phi_n(x)$ является экспоненциальным многочленом, то для него справедлива интерполяционная формула (24)

$$\Phi_n(x)=\Big(\prod_{j=1}^N\frac{2}{n_j+1}\Big)\sum_{0\le k\le n}\Phi_n(t^k)\Delta_n^k(x).$$

Положим $h_k=\Phi_n(t^k)$ и оценим скалярное произведение (U_n,φ), используя неравенство Гёльдера

$$|(U_n,\varphi)|=\Big|\int_Q U_n(x)\overline{\varphi(x)}dx\Big|=\Big|\int_Q U_n(x)\overline{\Phi_n(x)}dx\Big|=$$

$$=\Big(\prod_{j=1}^N\frac{2\pi}{n_j+1}\Big)\Big|\sum_{0\le k\le n}g_k\bar h_k\Big|\le\Big(\prod_{j=1}^N\frac{2\pi}{n_j+1}\Big)\Big(\sum_{0\le k\le n}|g_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{0\le k\le n}|h_k|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Применим теперь неравенство (31) к последнему множителю

$$|(U_n,\varphi)|\le\Big(\prod_{j=1}^N\frac{2\pi}{n_j+1}\Big)\Big(\sum_{0\le k\le n}|g_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}(6^N)^{\frac{1}{p'}}\Big(\prod_{j=1}^N\frac{n_j+1}{2\pi}\Big)^{\frac{1}{p'}}\|\Phi_n\|_{p'}.$$

Воспользовавшись неравенством Рисса .

$$\|\Phi_n(x)\|_{p'}\le C_{p'}\|\varphi\|_{p'}\tag{48}$$

(см. [2]), окончательно получим

$$|(U_n,\varphi)| \le (6^N)^{\frac{1}{p'}} C_{p'} \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right)^{\frac{1}{p}} \|\{g_k\}\|_p \|\varphi\|_{p'} .$$

В силу произвольности φ

$$\|U_n(x)\|_p = \|K^{-1}\{g_k\}\|_p \le (6^N)^{\frac{1}{p'}} C_{p'} \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right)^{\frac{1}{p}} \|\{g_k\}\|_p ,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Следствие 3. Пусть $1<p<\infty$, $U_n(x)=\sum\limits_{0\le k\le n} c_k e^{ikx}$, t^k определено формулой (20). Тогда

$$A_p \|U_n(\cdot)\|_p \le \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right)^{\frac{1}{p}} \min_x \left\{\sum_{0\le k\le n} |U_n(x+t^k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{49}$$

Доказательство идентично доказательству следствия 2.

Полученные результаты можно кратко сформулировать в следующем виде:

Теорема 3. Пусть $1<p<\infty$, $U_n(x)=\sum\limits_{0\le k\le n} c_k e^{ikx}$, t^k определено формулой (20). Тогда

$$A_p \|U_n\|_p \le \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{0\le k\le n} |U_n(t^k)|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le B_p \|U_n\|_p , \tag{50}$$

где A_p и B_p не зависят от n.

Замечание. Для $p=1$ неравенство (47) не выполняется. Это следует, например, из того, что при четном $n=2m$ имеет место $|\Delta_n(x)|=|\mathcal{D}_m(x)|$, и поэтому

$$\int_Q |\Delta_n(x)|dx = \int_Q |\mathcal{D}_m(x)|dx = \prod_{j=1}^{N} \int_0^{2\pi} |\mathcal{D}_{m_j}(x_j)|dx_j = \pi^N \prod_{j=1}^{N} L_{m_j} ,$$

где $L_{m_j}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{D}_{m_j}(x_j)|\,dx_j$ – константы Лебега. Известно, что $L_n \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n$ при $n\to\infty$ (см. [1]). Таким образом,

$$\int_Q |\Delta_{2m}(x)|dx \sim \left(\frac{4}{\pi}\right)^N \prod_{j=1}^{N} \ln m_j \qquad \text{при } |m|\longrightarrow\infty,$$

с другой стороны,

$$\left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right) \sum_{0\le k\le n} |\Delta_n(t^k)| = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2\pi}{n_j+1}\right) |\Delta_n(0)| = \pi^N.$$

Тот факт, что неравенство (47) не выполняется при $p=\infty$, вытекает из дальнейшего исследования сходимости интерполяционного процесса (по равномерной метрике).

Если $T_{m,n}(x)=\sum\limits_{-m\le k\le n} c_k e^{ikx}$, то, применяя оценку (50) к функции $U_{m,n}(x)=T_{m,n}(x)e^{imx}$, приходим к следующему утверждению:

Т е о р е м а 4. Пусть $1<p<\infty$, $T_{m,n}(x)=\sum_{-m\le k\le n} c_k e^{ikx}$, t^k определено формулой (28). Тогда

$$A_p\|T_{m,n}(\cdot)\|_p\le\Big(\prod_{j=1}^{N}\frac{2\pi}{m_j+n_j+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{0\le k\le m+n}|T_{m,n}(t^k)|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}\le B_p\|T_{m,n}(\cdot)\|_p, \qquad (51)$$

где A_p и B_p не зависят от m и n.

§ 5. Сходимость интерполяционных многочленов

Рассмотрим вопрос о приближении периодической функции функциями вида (25), которые мы будем называть двусторонними экспоненциальными многочленами. Условимся называть (m,n) степенью многочлена (25). Соотношение $(m_1,n_1)>(m_2,n_2)$ будет означать выполнение двух неравенств $m_1>m_2$ и $n_1>n_2$. Двусторонний экспоненциальный многочлен, совпадающий с периодической функцией $f(x)$ в точках (28), будем обозначать $U_{m,n}(f,x)$ и называть интерполяционным многочленом степени (m,n) для функции $f(x)$. Формула (26) дает явный вид интерполяционного многочлена

$$U_{m,n}(f,x)=\Big(\prod_{j=1}^{N}\frac{2}{m_j+n_j+1}\Big)\sum_{0\le k\le m+n} f(t^k)\mathcal{D}^k_{m,n}(x). \qquad (52)$$

Интерполяционный многочлен обладает следующими важными свойствами:

1. $U_{m,n}(f+g,x)=U_{m,n}(f,x)+U_{m,n}(g,x)$. (53)

2. $U_{m,n}(\lambda f,x)=\lambda\cdot U_{m,n}(f,x)$. (54)

3. Если $f(x)$ является двусторонним экспоненциальным многочленом степени меньшей, чем (m,n), то $U_{m,n}(f,x)=f(x)$. (55)

4. Если $f(x)$ интегрируема по Риману, то

$$\varlimsup_{m,n\to\infty}\|U_{m,n}(f,x)\|_p\le A_p^*\|f\|_p. \qquad (56)$$

Свойства 1, 2, 3 очевидны, и в доказательстве нуждается только последнее свойство. По теореме 4 имеем

$$A_p\|U_{m,n}(f,x)\|_p\le\Big(\prod_{j=1}^{N}\frac{2\pi}{m_j+n_j+1}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\{\sum_{0\le k\le m+n}|f(t^k)|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

Но $\sum_{0\le k\le m+n}|f(t^k)|^p\prod_{j=1}^{N}\frac{2\pi}{m_j+n_j+1}$ является интегральной суммой Римана для функции $|f(x)|^p$ на кубе Q. Следовательно, в силу интегрируемости функции $f(x)$ по Риману

$$\sum_{0\le k\le m+n}|f(t^k)|^p\prod_{j=1}^{N}\frac{2\pi}{m_j+n_j+1}\xrightarrow{m,n\to\infty}\int_Q|f(x)|^p dx,$$

и, таким образом, в (56) можно положить $A_p^*=1/A_p$.

Теорема 5. Пусть $1<p<\infty$, $f(x)$ интегрируема по Риману. Тогда

$$\| f(x)-U_{m,n}(f,x)\|_p \xrightarrow{m,n\to\infty} 0. \tag{57}$$

Доказательство. Так как двусторонние экспоненциальные многочлены плотны в L_p, то для любого $\varepsilon>0$ существует двусторонний экспоненциальный многочлен $T(x)$, такой что

$$\| f(x) - T(x)\|_p < \varepsilon.$$

Положим $f_1(x)=f(x)-T(x)$, так что $f(x)=f_1(x) + T(x)$. Если теперь (m,n) превосходит степень многочлена $T(x)$, то

$$U_{m,n}(f,x) = U_{m,n}(f_1,x) + U_{m,n}(T,x) = U_{m,n}(f_1,x) + T(x).$$

Следовательно,

$$\| f - U_{m,n}(f,x)\|_p = \| f_1(x) - U_{m,n}(f_1,x)\|_p \le \| f_1(x)\|_p + \| U_{m,n}(f_1,x)\|_p,$$

и, используя свойство 4 интерполяционного многочлена, получаем

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \| f(x) - U_{m,n}(f,x)\|_p \le (1+A_p^*)\| f_1(x)\|_p < (1+A_p^*)\,\varepsilon.$$

Но так как ε произвольно, то $\lim\limits_{m,n\to\infty} \| f(x) - U_{m,n}(f,x)\|_p = 0$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Существует $f(x)\in C(Q)$, для которой $U_{m,n}(f,x)$ не ограничены в некоторой точке x (тем более невозможно, чтобы $U_{m,n}(f,x) \overset{m,n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на Q).

Свойства 1 и 2 интерполяционного многочлена означают, что при фиксированных m, n и x функционал $U_{m,n}(f,x)$ является линейным функционалом на $C(Q)$. Ясно, что он непрерывен и его норма в $C(Q)$ равна

$$N_x(n,m) = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2}{m_j+n_j+1}\right) \sum_{0\le k\le m+n} |\mathcal{D}_{m,n}^{k}(x)|. \tag{58}$$

Если для любой функции $f(x)\in C(Q)$ функционалы $U_{m,n}(f,x)$ ограничены по m и n при фиксированном x, то, по теореме Банаха-Штейнгауза, их нормы ограничены в совокупности, поэтому достаточно проверить неограниченность норм $N_x(n,m)$. Узлы зададим формулой

$$t^k = \left(\frac{2k_1+1}{n_1+1}\pi, \dots, \frac{2k_N+1}{n_N+1}\pi\right); \quad k_j = 0,1,\dots,m_j+n_j; \quad j=1,2,\dots,N.$$

В качестве точки x выберем начало координат:

$$N_0(n,m) = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{2}{m_j+n_j+1}\right) \sum_{0\le k\le m+n} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{2\left|\sin\frac{2k_j+1}{2(m_j+n_j+1)}\pi\right|} =$$

$$= \sum_{0\le k\le m+n} \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{(m_j+n_j+1)\left|\sin\frac{2k_j+1}{2(m_j+n_j+1)}\pi\right|} = \prod_{j=1}^{N} \sum_{k_j=0}^{m_j+n_j} \frac{1}{(m_j+n_j+1)\left|\sin\frac{2k_j+1}{2(m_j+n_j+1)}\pi\right|} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \prod_{j=1}^{N} \sum_{k_j=0}^{m_j+n_j} \left(\frac{1}{\left|\sin\frac{2k_j+1}{2(m_j+n_j+1)}\pi\right|} \cdot \frac{2\pi}{m_j+n_j+1} \right). \tag{58}$$

Функция $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ убывает на $(0,\pi)$, следовательно,

$$\sum_{k_j=0}^{m_j+n_j} \frac{1}{\left|\sin\frac{2k_j+1}{2(m_j+n_j+1)}\pi\right|} \frac{2\pi}{m_j+n_j+1} > \int_{\frac{\pi}{2(m_j+n_j+1)}}^{\pi} \frac{dt}{\sin\frac{t}{2}} > 2\int_{\frac{\pi}{2(m_j+n_j+1)}}^{\pi} \frac{dt}{t} = 2\ln 2(m_j+n_j+1). \tag{60}$$

Таким образом, для $N_0(n,m)$ справедливо неравенство

$$N_0(n,m) > \frac{1}{\pi^N} \prod_{j=1}^{N} \ln(2m_j+2n_j+2). \tag{61}$$

Откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Теперь видно, что неравенство (47) перестает быть верным и при $p=\infty$. Если бы оно было справедливо при $p=\infty$, то теорема 5 имела бы силу и при $p=\infty$ (нетрудно видеть, что доказательство этого факта остается без изменений), чему, однако, противоречит теорема 6.

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., "Мир", 1965, т. 1, 2.
2. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., "Наука", 1969.
3. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.