УДК 518.1

О ЗАДАЧЕ ЗОЛОТАРЕВА В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

В.И. Лебедев (Москва)

В итерационном методе переменных направлений (МПН) [1] решение уравнения $Au=f$ находится как предел последовательности $\{u^k\}$, определяемой по формулам:

$$(A_2+\omega'_{k+1}I)u^{k+1/2}=f-(A_1-\omega'_{k+1}I)u^k,$$

$$(A_1+\omega''_{k+1}I)u^{k+1}=f-(A_2-\omega''_{k+1}I)u^{k+1/2},$$

где $A=A_1+A_2$, а ω'_k, ω''_k – параметры. Для коммутативного случая $A_1A_2=A_2A_1$ ($A>0$, $A_i>0$) в работах иностранных математиков (см., например, [2–4])были найдены формулы для оптимальных параметров ω'_k, ω''_k, $k=1,2,\dots,N$, обеспечивающих наилучшую сходимость МПН за N итераций. Оказалось, что эти формулы непосредственно следуют из результатов Е.И.Золотарева [5], который еще в 1877 г. опубликовал в явном виде решение ряда задач наилучшего приближения дробно-рациональными функциями, исследовал свойства и дал оценки наилучшего приближения. Эти результаты затем неоднократно переоткрывались, к сожалению, они мало известны. Для $N=2^n$ автором в [6] были предложены, а впоследствии изучены (см., например, [7]) алгоритмы перемешивания параметров, использование которых в МПН ускоряет сходимость промежуточных итераций. Употребление этих алгоритмов при решении диффузионных задач с переменными коэффициентами показало высокую эффективность предложенного порядка употребления параметров в трудном для изучения некоммутативном случае.

В настоящей работе содержится обобщение алгоритмов упорядочения параметров для случая $N=\prod_{i=1}^{n}p_i$, где p_i – любые простые числа. Еще в [3] ставилась задача о нахождении для этого случая рекуррентных формул для оптимальных параметров; здесь мы получим решение этой задачи. Основное содержание настоящей работы (краткое изложение без доказательств некоторых результатов ее содержится в [7]) заключается в решении применительно к МПН следующей интересной и полезной для приложений задачи, дающей возможность строить новый класс итерационных методов.

Пусть $A=(A_1,A_2,\dots,A_p)$ – набор из p линейных операторов. Вложим этот набор в некоторый класс $\mathfrak{M}$ $(A \in \mathfrak{M})$. Пусть $T(A, \gamma)$ – параметрическое семейство линейных операторов, зависящих от A и числового параметра γ. Пусть $\{\gamma_i\}_1^\infty$ – бесконечная последовательность параметров, $\{N_n\}_1^\infty$ – монотонно возрастающая последовательность положительных целых чисел

$$R_N = \prod_{i=1}^{N} T(A, \gamma_i), \quad E_N = \inf_{\gamma_i} \sup_{A \in \mathfrak{M}} \| R_N \|.$$

Задача 1. Для семейства операторов $T(A, \gamma_\infty)$ найти, если они существуют, бесконечные последовательности $\{\gamma_i\}_1^\infty$, $\{N_n\}_1^\infty$, такие, что для любых n $\sup_{A \in \mathfrak{M}} \| R_{N_n} \| = E_{N_n}$, и определить множество тех значений N, для которых отношение $\| R_N \| / E_N$ равномерно ограничено.

Конечно, решения этой задачи интересно найти в первую очередь для операторов, встречающихся в итерационных методах, а не для тривиальных семейств операторов, вроде тех, для которых $\| R_N \| = 0$ при $N > N_0$ для любых $\{\gamma_i\}_1^\infty$. Итерационные методы с подобными $T(A, \gamma_i)$, где γ_i – решение задачи 1, обладают одним хорошим свойством, напоминающим известное свойство алгоритма приближения функций суммами Фурье: мы можем строить оптимальный итерационный процесс некоторого сколь угодно большого порядка, использующий непосредственно результаты расчетов от употребления оптимальных итерационных процессов меньших порядков. Решение задачи 1 для устойчивых чебышевских итерационных методов было найдено автором и С.А.Финогеновым [8], когда $T = I - \gamma A_1$, а класс $\mathfrak{M}$ определялся требованиями, чтобы A_1 был самосопряженным положительно определенным оператором и $Sp\, A_1 \in [m, M]$, где $0 < m < M$. Основные варианты МПН для двумерных задач можно свести к случаю, когда (см. [4])

$$T(A, \gamma) = (A_1 + \gamma I)^{-1} (A_2 - \gamma I)(A_2 + \gamma I)^{-1} (A_1 - \gamma I),$$

$Sp\, A_i \in [m, M]$, $i = 1, 2$, если A_1, A_2 коммутируют, то для МПН решение задачи 1 по нахождению бесконечных последовательностей сводится к решению задачи § 1.

§ 1

Обозначим через $f_N(t)$ дробно-рациональную функцию вида

$$f_N(t) = \prod_{i=1}^{N} \frac{t - \gamma_i}{t + \gamma_i}, \tag{1.1}$$

в которой параметры $\{\gamma_i\}_1^N$ выбраны так, чтобы она наименее отклонялась от нуля на отрезке $[\eta, 1]$ $(0 < \eta < 1)$, т.е. чтобы для функции $f_N(t)$ достигалась величина

$$E_N = \inf_{\gamma_i} \max_{\eta \le t \le 1} | f_N(t) |. \tag{1.2}$$

Известно [5], что для такой функции существует чебышевский альтернанс из $N+1$ точек.

Задача 2. Существуют ли бесконечные последовательности параметров $\{\gamma_i\}_1^\infty$ и целых чисел $N_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такие, что для каждого $N = N_n$ функция $f_{N_n}(t)$ с параметрами $\{\gamma_i\}_1^{N_n}$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[\gamma, 1]$.

Пусть $\mathcal{P} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_s)$ – некоторый набор простых нечетных чисел; $p_n \in \mathcal{P}$ – любое целое число, выбираемое из $\mathcal{P}$ на n-м шаге. Пусть $N_0 = 2^k$, где $k \geq 0$ задано, а $N_{n+1} = N_n p_n$. Мы построим классы бесконечных последовательностей $\{\gamma_i\}_1^\infty$, обладающие следующими свойствами.

1. Для каждой последовательности имеем:

$$f_{N_{n+1}}(t) = f_{N_n}(t) \prod_{j=1}^{p_n - 1} Q_j(t, N_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

П. Функции $Q_j(t, N_n)$ имеют вид:

$$Q_j(t, N_n) = (-1)^{N_n} \prod_{i=1}^{N_n} \frac{t - \gamma_{N_n j + i}}{t + \gamma_{N_n j + i}}, \quad j = 1, 2, \ldots, p_n - 1. \tag{1.4}$$

Каждая функция $Q_j(t, N_n)$ N_n раз меняет знак на $[\gamma, 1]$ и имеет $[N_n/2] + 1$ одинаковых максимумов и $N_n - [N_n/2]$ одинаковых минимумов на $[\gamma, 1]$. Это свойство назовем почти чебышевским альтернансом (в этом случае существует такое линейное преобразование $a_j Q_j + b_j$, что преобразованная функция уже имеет чебышевский альтернанс).

Ш. Функции $Q_{2j-1}(t, N_n) Q_{2j}(t, N_n)$, $j = 1, 2, \ldots, (p_n - 1)/2$, имеют почти чебышевский альтернанс.

1У. Пусть S – любое из чисел: 2^k, $k = 1, 2, \ldots, h, N_n, n = 1, 2, \ldots$, а Γ_{Sj}, $j = 0, 1, \ldots$ – отрезок последовательности $\{\gamma_i\}_{Sj+1}^{S(j+1)}$. Тогда для любых S, j функции

$$\varphi_{S_j}(t) = (-1)^S \prod_{\gamma_i \in \Gamma_{S_j}} \frac{t - \gamma_i}{t + \gamma_i} \tag{1.5}$$

обладают почти чебышевским альтернансом.

Употребление в МПН последовательностей $\{\gamma_i\}_1^\infty$, обладающих свойствами 1–1У, позволяет вести итерационный процесс, не ограничивая его априори каким-то числом итераций, при этом для коммутативного случая итерационный процесс для всех $k = N_n$ будет выходить на оптимальный режим, а для всех других значений k он обеспечивает достаточно хорошее убывание ошибки. Наиболее "плотные" и просто устроенные последовательности, обладающие перечисленными свойствами, получаются при $p_n = 3$.

Основой получения последовательностей $\{\gamma_i\}_1^\infty$ послужила теория главных преобразований N-й степени для эллиптических функций [9] и результаты работы Е.И.Золотарева [5].

§ 2

Изложим необходимые для нас сведения из теории эллиптических функций [9]. Как известно, одна из главных проблем преобразования эллиптических функций заключается в отыскании условий, при которых две эллиптические функции $x=\varphi(u)$, $y=\psi(u)$ связаны между собой алгебраическим соотношением. Справедлива теорема о том, что если между периодами $(\omega,\tilde{\omega})$, $(\omega',\tilde{\omega}')$ функций $\varphi(u)$, $\psi(u)$ существует зависимость вида

$$r\omega=\alpha\omega'+\beta\tilde{\omega}', \quad s\tilde{\omega}=\gamma\omega'+\delta\tilde{\omega}',$$

где $r,s,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – целые, то они связаны между собой алгебраическим соотношением $F(x,y)=0$, допускающим параметрическое представление

$$x=R_1(z), \quad y=R_2(z), \tag{2.1}$$

где $R_1(z)$, $R_2(z)$ – рациональные функции от некоторого параметра z. В нашем случае уравнения (2.1) будут иметь вид:

$$x=sn(u,k), \quad y=sn\left(\frac{u}{M},\lambda\right), \tag{2.2}$$

где $sn(u,k)$ – эллиптический синус от некоторого аргумента u, а параметры k, M, λ будут связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому мы ограничимся рассмотрением одних только рациональных преобразований, которые выражаются формулами так называемых главных преобразований N-й степени; они состоят в делении на целое число N одного из периодов эллиптических функций.

В частности, первое главное преобразование N-й степени соответствует следующей схеме соотношений между периодами.

Пусть $p_n\in\mathcal{P}$, $n=1,2,\dots,N_n=\prod_{i=1}^{n}p_i$, $N_0=1$, $k_0=k$, $k_0'=k'$, $k^2+k'^2=1$, а периоды функции $sn(u,k)$ есть $L_0=K$, $L_0'=K'$. Тогда, применяя первое главное преобразование N_n-й степени, получим

$$sn\left(\frac{u}{M(0,n)},k_n\right)=P(0,n)\,sn(u,k_0)\times$$

$$\times\prod_{r=1}^{\frac{N_n-1}{2}}\frac{C_{2r}^2(0,n)-sn^2(u,k_0)}{1-k_0^2C_{2r}^2(0,n)\,sn^2(u,k_0)}, \tag{2.3}$$

где функция $sn\left(\frac{u}{M(0,n)},k_n\right)$ имеет периоды:

$$L_n=\frac{K}{N_n M(0,n)}, \quad L_n'=\frac{K'}{M(0,n)},$$

а

$$C_r(0,n)=sn\left(\frac{rK}{N_n},k_0\right),$$

$$k_n=k_0^{N_n}\prod_{r=1}^{[N_n/2]}C_{2r-1}^4(0,n),$$

$$M(0,n) = \prod_{r=1}^{[N_n/2]} C^2_{2r-1}(0,n)/C^2_{2r}(0,n),$$
$$P(0,n) = \prod_{r=1}^{[N_n/2]} C^{-2}_{2r-1}(0,n). \tag{2.4}$$

Формулы (2.3), (2.4) при $x = sn(u,k_0)$ определяют функцию $y_{N_n}(x)$ решения 1У-й задачи Золотарева [5] . Из этих основных формул получим следующие формулы, которые позволят нам решить задачу 2.

Пусть $n_1 < n_2$, $t_n = u/M(0,n)$, $t_0 = u$, $q(n_1,n_2) = N_{n_2}/N_{n_1}$, тогда при $N_0 = I$ имеем

$$sn(t_{n_2}, k_{n_2}) = sn(t_{n_1}/M(n_1,n_2), k_{n_2}) = P(n_1,n_2)\, sn(t_{n_1}, k_{n_1}) \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{[\frac{1}{2}q(n_1,n_2)]-1} \frac{C^2_{2r}(n_1,n_2) - sn^2(t_{n_1},k_{n_1})}{1 - k^2_{n_1} C^2_{2r}(n_1,n_2)\, sn^2(t_{n_1},k_{n_1})}, \tag{2.5}$$

где

$$C_r(n_1,n_2) = sn\left(\frac{rK}{q(n_1,n_2)}, k_{n_1}\right),$$
$$M(n_1,n_2) = \prod_{r=1}^{[\frac{1}{2}q(n_1,n_2)]} C^2_{2r-1}(n_1,n_2)/C^2_{2r}(n_1,n_2), \tag{2.6}$$
$$P(n_1,n_2) = \prod_{r=1}^{[\frac{1}{2}q(n_1,n_2)]} C^{-2}_{2r-1}(n_1,n_2).$$

Этой записи преобразований соответствует семейство дробно-рациональных функций степени $q(n_1,n_2)$, заданных в параметрической форме

$$y_{n_2} = sn\left(\frac{t_{n_1}}{M(n_1,n_2)}, k_{n_2}\right), \quad x_{n_1} = sn(t_{n_1}, k_{n_1}). \tag{2.7}$$

Каждая из функций является решением 1У-й задачи Золотарева, точнее, $y_{n_2}(x_{n_1})$ есть отношение многочленов от x_{n_1} степени $q(n_1,n_2)$. Функция $y_{n_2}(x_{n_1})$ при $|x_{n_1}| \le 1$ имеет чебышевский альтернанс, состоящий из $q(n_1,n_2)+1$ точек, в которых $|y_{n_2}| = I$.

Каждая из функций

$$\frac{C_{2r}(n_1,n_2) \mp sn(t_{n_1},k_{n_1})}{1 \mp k_{n_1} C_{2r}(n_1,n_2)\, sn(t_{n_1},k_{n_1})}, \tag{2.8}$$

$$\frac{C^2_{2r}(n_1,n_2) - sn^2(t_{n_1},k_{n_1})}{1 - k^2_{n_1} C^2_{2r}(n_1,n_2)\, sn^2(t_{n_1},k_{n_1})} \tag{2.9}$$

есть дробно-рациональная функция от любого x_{n_0} , где $n_0 \le n_1$, обладающая при $C_{2r}(n_1,n_2) \ne 0$ почти чебышевским альтернансом.

Отдельно разберем случай, когда $N_0 = 2^h$, $h > 0$. Тогда в формулах (2.3)-(2.9) за t_0 , k_0 возьмем значения

$$t_0 = v/\bar{M}(h) + \bar{L}(h), \quad k_0 = k^{2^h} \prod_{\tau=1}^{2^{h-1}} \bar{C}^4_{2\tau-1},$$

где

$$\bar{L}(h) = \frac{K}{2^h \bar{M}(h)}, \quad \bar{C}_\tau = sn\left(\frac{\tau K}{2^h}, k\right), \quad \bar{M}(h) = \prod_{\tau=1}^{2^{h-1}} \left(\frac{\bar{C}_{2\tau-1}}{C_{2\tau}}\right)^2,$$

а v – независимый параметр. Тогда справедливо тождество [9]

$$sn(t_0, k_0) = \bar{P}(h) \prod_{\tau=1}^{2^{h-1}} \frac{\bar{C}^2_{2\tau-1} - sn^2(v, k)}{1 - k^2 \bar{C}^2_{2\tau-1} sn^2(v, k)}, \tag{2.10}$$

где

$$\bar{P}(h) = \prod_{\tau=1}^{2^{h-1}} \bar{C}^{-2}_{2\tau-1}.$$

§ 3

Построим бесконечные последовательности оптимальных параметров в МПН. Пусть сначала $N_0 = I$. В дополнении к [5] было показано, что если функцию $y_n(x)$ и x подвергнуть дробно-рациональному преобразованию

$$f_{N_n} = y_n(x)/y_n(1, \sqrt{k}), \quad t = \frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \frac{1+\sqrt{k}x}{1-\sqrt{k}x}, \tag{3.1}$$

то она перейдет в экстремальную функцию $f_{N_n}(t)$ вида (1.1) при $g = (1-\sqrt{k})^2/(1+\sqrt{k})^2$. Следовательно, параметры функции $f_{N_n}(t)$ принадлежат множеству чисел вида

$$\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \frac{1+\sqrt{k}\, sn(\omega_j K, k)}{1-\sqrt{k}\, sn(\omega_j K, k)}, \quad j = 1, 2, \ldots, N_n, \tag{3.2}$$

где $\omega_j \in [-1, 1]$, точнее, для заданного N_n каждое ω_j, $j = 1, 2, \ldots, N_n$, есть число вида $\pm 2i/N_n$, $0 \le i \le (N_n - 1)/2$.

Пусть задано некоторое множество N неодинаковых чисел $\{\alpha_k\}_1^N$ и задана перестановка $\varkappa_N = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$. Мы скажем, что множество $\{\alpha_k\}_1^N$ упорядочено перестановкой $\varkappa_N$, понимая под этим следующий процесс: сначала, если это нужно, мы перенумеруем α_k в возрастающем порядке (оставим для перенумерованного на этом этапе множества старые обозначения), а затем с помощью перестановки $\varkappa_N$ образуем множество $\{\gamma_k\}_1^N$, где $\gamma_k = \alpha_{j_k}$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

Пусть для каждого $p_i \in \mathcal{P}$ построены (см. § 4) специальные перестановки порядка $(p_i - 1)/2$: $b(p_i) = (b_1, b_2, \ldots, b_{(p_i-1)/2})$.

Последовательность $\{\omega_j\}_1^\infty$ и перестановки $\varkappa_N$, определяющие порядок следования членов начальных отрезков этой последовательности, построим по следующим правилам:

1) $\omega_1=0$, $\varkappa_1=(1)$.

2) Пусть каждый отрезок $\{\omega_j\}_1^{N_n}$ состоит из всех чисел вида $\pm 2i/N_n$, $|i|\leq (N_n-1)/2$, упорядоченных перестановкой $\varkappa_{N_n}=(j_1^n, j_2^n, \ldots, j_{N_n}^n)$.

3) Упорядочим числа $C_{2\tau}(n,n+1), \tau=1,2,\ldots (p_n-1)/2$ перестановкой $b(p_n)$ и обозначим через $\Gamma^{n,\pm m}$ два подмножества множества чисел $\pm 2i/N_n$, состоящих из корней уравнений

$$C_{2b_m}(n,n+1) \pm sn(t_n,k_n)=0, \tag{3.3}$$

соответственно упорядоченных перестановкой $\varkappa_{N_n}$.

4) В отрезке $\{\omega_j\}_{N_n+1}^{N_{n+1}}$ параметры расположим в следующем порядке:

$$\Gamma^{n,1}, \Gamma^{n,-1}, \Gamma^{n,2}, \Gamma^{n,-2}, \ldots, \Gamma^{n,(p_n-1)/2}, \Gamma^{n,-(p_n-1)/2}.$$

Правила 1)–4) определяют перестановку $\varkappa_{N_{n+1}}=(j_1^{n+1}, j_2^{n+1}, \ldots, j_{N_{n+1}}^{n+1})$, упорядочивающую числа $\pm 2i/N_{n+1}$. Эти правила определяют бесконечную последовательность параметров $\{\omega_j\}_1^{\infty}$, по которым по формуле (3.2) строится последовательность, используя которую, мы получим бесконечно продолжаемый МПН, обладающий свойствами 1–1У § 1. Приведем рекуррентную формулу для $\varkappa_{N_{n+1}}$, вытекающую из описанных правил образования $\varkappa_{N_{n+1}}$:

$$\begin{aligned}
j_m^{n+1} &= p_n j_m^n - (p_n-1)/2,\\
j_{N_n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} - \delta_m^{n+1} b_1,\\
j_{2N_n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} + \delta_m^{n+1} b_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
j_{(p_n-2)N_n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} - \delta_m^{n+1} b_{(p_n-1)/2},\\
j_{(p_n-1)N_n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} + \delta_m^{n+1} b_{(p_n-1)/2},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\delta_m^{n+1}=(-1)^{j_m^{n+1}}$, $m=1,2,\ldots,N_n$,

в частности, если все $p_n=3$, то

$$\begin{aligned}
j_m^{n+1} &= 3j_m^n - 1,\\
j_{3^n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} - \delta_m^{n+1},\\
j_{2\cdot 3^n+m}^{n+1} &= j_m^{n+1} + \delta_m^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Например, $\varkappa_9=(5,2,8,6,1,7,4,3,9)$.

Пусть теперь $N_0=2^h$, $h>0$. Обозначим $\bar{N}_n=\prod_{i=1}^n p_i$, а через $\varkappa_{\bar{N}_{n+1}}$ – перестановку, полученную по формулам (3.4). Из представления (2.10) следует, что в этом случае каждому корню уравнений (3.3) соответствует группа из 2^h параметров. Каждую такую группу упорядочим, употребляя специальные перестановки [7] . Тогда описанный процесс образования перестановок будет дополнен следующим рекуррентным правилом: начиная с $\varkappa_{\bar N_{n+1}}$ и зная перестановку $\varkappa_{2^{q-1}\bar N_{n+1}} = (j_1, j_2, \ldots, j_{2^{q-1}\bar N_{n+1}})$, мы k раз образуем перестановку $\varkappa_{2^q \bar N_{n+1}}$ удвоенного порядка по правилу

$$\varkappa_{2^q\bar N_{n+1}} = (2^{q-1}\bar N_{n+1}+1-j_1,\ 2^{q-1}\bar N_{n+1}+j_1, \ldots$$
$$\ldots 2^{q-1}\bar N_{n+1}+1-j_k,\ 2^{q-1}\bar N_{n+1}+j_k, \ldots) . \tag{3.6}$$

Искомая перестановка $\varkappa_{N_{n+1}}$ получается при $q=k$. Например, $\varkappa_{18} = (5,14,8,11,2,17,4,15,9,10,3,16,6,13,7,12,1,18)$.

З а м е ч а н и е 1. Возможна следующая модификация образования перестановок в п.4): множества $T^{n,\pm m}$ объединяем в одно и последнее упорядочиваем перестановкой $\varkappa_{2N_n}$, образованной из $\varkappa_{N_n}$ по формуле (3.6). Именно такие перестановки и были предложены в устойчивых чебышевских методах [8] , для них можно использовать и полученные в этой работе перестановки.

З а м е ч а н и е 2. Уравнения (3.3) и формулы (3.2) определяют рекуррентные соотношения между параметрами МПН для N_{n+1} и N_n .

Теперь остановимся на обосновании свойств 1–1У функций $f_{N_n}(t)$, сформулированных в § 1. Справедливость их следует из свойств преобразований эллиптических функций, сформулированных в § 2. Свойство 1 вытекает из формул (3.1) (3.2), (2.3), (2.5) и (2.7) при $n_1 = n$, $n_2 = n+1$, в которых прообразами функций $Q_j(t, N_n)$ служат функции (2.8). Аналогично: из формул (2.7), (2.8), соответственно (2.7), (2.9), получаем доказательства соответственно свойств П, Ш. Наконец, свойство 1У следует из представлений (2.5), (2.7), (2.10) и правила разбивки параметров на группы, определяемые корнями уравнений (3.3).

§ 4

Предложим некоторые способы построения перестановок $\delta(p_n)$. Для первых простых чисел полагаем $\delta(3)=(1)$, $\delta(5)=(1,2)$, $\delta(7)=(2,1,3)$. На практике можно ограничиться употреблением только этих перестановок. Для других простых чисел можно предложить два способа образования $\delta(p_n)$:

1) $\delta(p_n) = (1,2,\ldots,(p_n-1)/2)$,

тогда из (2.8), (2.9) следует, что

$$\max_{\eta\le t\le 1} |Q_{j_1}(t,N_n)| \le \max_{\eta\le t\le 1} |Q_{j_2}(t,N_n)|,$$
$$\max_{\eta\le t\le 1} |Q_{2j_1-1} Q_{2j_1}| \le \max_{\eta\le t\le 1} |Q_{2j_2-1} Q_{2j_2}|$$

при $j_1 < j_2$.

2) Любое простое число $p_n > 3$ можно представить в виде $p_n = 6m_n \pm 1$, где

m_n – целое; тогда $(p_n-1)/2 = 3m_n - \delta_n$, где $\delta_n = 0$ или 1. За $b(p_n)$ берем перестановку порядка $3m_n - \delta_n$, образованную по описанным в § 3 правилам с использованием перестановок для меньших простых чисел.

По-видимому, предпочтительнее использовать второй способ, быстрее уменьшающий величины

$$\max_{q \le t \le 1} \left| f_{N_n} \prod_{j=1}^{m} Q_j \right|, \quad m = 1, 2, \ldots, p_n - 2,$$

за счет более равномерного размешивания корней функции $f_{N_{n+1}}(t)$.

Проведенные расчеты диффузионных задач с некоммутативными операторами показали такую же, как и в случае $N_n = 2^n$, высокую эффективность МПН с предложенными последовательностями параметров. Создается впечатление, что решение проблемы оптимального выбора параметров в МПН для некоммутативного случая должно содержать в качестве необходимого этапа определенные, подобно предложенным, алгоритмы перемешивания параметров, обеспечивающие достаточную малость норм операторов перехода МПН для довольно плотной серии числа итераций.

Литература

1. Peaceman D., Rachford H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.-"J.Soc. Ind. Appl.Math.",1955, v.3, N 28.
2. Wachspress E.L. Optimum alternating-direction-implicit iteration parameters for a model problem.-"J.Soc.Ind.Appl.Math.",1962,v.10, p.339-350.
3. Wachspress E.L. Extended application of alternating direction implicit iteration model problem theory.-"J.Soc.Ind.Appl.Math.", 1963, v.11, N 4, p.994-1016.
4. Wachspress E.L. Iterative solution of elliptic systems and applications to the neutron diffusion equations of reactor physics.Prentice-Hall. Inc.Englewood Cliffs.,N.Y.,1966.
5. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. – "Записки С-Петербургской Академии Наук", 1877, XXX, № 5. Полное собрание сочинений, в.2, АН СССР, Л., 1932.
6. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
7. Лебедев В.И. О бесконечно продолжаемых линейных оптимальных итерационных методах.–"Методы вычислительной и прикладной математики" (Труды семинара ВЦ СО АН СССР), 1976, т.20.
8. Лебедев В.И., Финогенов С.А. Об использовании упорядоченных чебышевских параметров в итерационных методах. –"Журнал вычислительной математики и математической физики", 1976, т.16, № 4.
9. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.,"Наука", 1970.