УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

В. П. Ильин (Ленинград)

В настоящей статье рассматриваются обобщения и аналоги некоторых известных интегральных неравенств. Говоря точнее, мы рассматриваем оценки в нормах $L_q(E^1)$ или соответственно $L_{(q,\sigma)}(E^2)$ выражений вида:

$$\mathcal{I}_1(x) = \int_{E^1} f_1(y)\mathcal{L}_1(y-x)dy, \tag{1}$$

$$\mathcal{I}_2(x) = \iint_{E^1E^1} f_2(y,t)\mathcal{L}_2(y-x,t)dydt, \tag{2}$$

$$\mathcal{I}_3(x,\tau) = \int_{E^1} f_3(y)\mathcal{L}_3(y-x,\tau)dy, \tag{3}$$

$$\mathcal{I}_4(x,\tau) = \iint_{E^1E^1} f_4(y,t)\mathcal{L}_4(y-x,t,\tau)dydt, \tag{4}$$

где f_i – функция из $L_p(E^1)$ или соответственно $L_{(p,\theta)}(E^2)$, а ядра $\mathcal{L}_i$ являются однородными функциями некоторой степени относительно своих аргументов, удовлетворяющими определенным условиям суммируемости. Фактически мы занимаемся оценками лишь операторов вида (2), (3) и (4), так как для оператора (1) соответствующий результат представляет собой хорошо известное двухпараметрическое неравенство Харди–Литтлвуда [1, теорема 382].

Рассматриваемая группа неравенств или их частные случаи нашли применение в теории дифференцируемых функций при доказательствах предельных теорем, характеризующих вложения:

$$W_p^l \subset W_q^\rho, \quad B_{p,\theta}^l \subset W_q^\rho, \quad W_p^l \subset B_{q,\sigma}^\rho, \quad B_{p,\theta}^l \subset B_{q,\sigma}^\rho,$$

где W_p^l и $B_{p,\theta}^l$ – функциональные пространства С.Л.Соболева [2] и соответственно О.В.Бесова [3]. В указанных приложениях хотя и применяются многомерные неравенства, но они легко получаются из соответствующих одномерных аналогов, рассматриваемых в настоящей заметке.

Отметим, что частные случаи предложений П.2 и П.3 рассматривались в [4] и [5].

1. Обозначения и вспомогательные утверждения

Для измеримой функции $f(x)$, заданной на евклидовом пространстве E^1, обычным образом определяется норма в пространстве $L_p(E^1)$, $1\le p\le\infty$; т.е. число $\|f\|_{p,E^1}=\|f\|_p$. Пусть $\varphi(x,t)$ – измеримая функция, заданная на E^2. Будем писать $\varphi\in L_{(p,\theta)}(E^2)$, если $\|\varphi\|_{(p,\theta),E^2}=\|\varphi\|_{(p,\theta)}=\left(\int_{E^1}\|\varphi(\cdot,t)\|_p^\theta dt\right)^{\frac{1}{\theta}}<\infty$ при $1\le\theta<\infty$,

или

$$\|\varphi\|_{(p,\infty),E^2}=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E^1}\|\varphi(\cdot,t)\|_p<\infty$$

при $\theta=\infty$, где $\|\varphi(\cdot,t)\|_p$ обозначает норму в $L_p(E^1)$ по переменной x.

Если $1\le p\le\infty$, то через p' будем обозначать число такое, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Аналогичный смысл будут иметь числа θ', q', σ'.

Пусть $\mathcal{L}(x,t)$ – функция, заданная на E^2. Будем говорить, что $\mathcal{L}(x,t)$ является однородной функцией со степенью однородности α, если $\mathcal{L}(ux,ut)=|u|^\alpha\mathcal{L}(x,t)$, $u\ne 0$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим неравенством, относящимся к классу неравенств Гильберта [1, гл. IX и дополнение XIV].

1.1. Пусть

$$1\le\theta\le q\le\infty,\quad \frac{1}{r}=1-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q}=\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{q},\tag{5}$$

$f\in L_\theta(E^1)$, $\mathcal{L}(x,t)$ – неотрицательная однородная функция со степенью однородности "$-\frac{1}{r}$", определенная на E^2 и удовлетворяющая условию:

$$\|\mathcal{L}(x,1)|x|^{-\frac{1}{\theta'}}\|_{r,E^1}=\|\mathcal{L}(1,t)|t|^{-\frac{1}{q}}\|_{r,E^1}=K<\infty.\tag{6}$$

Тогда

$$\left\|\int_{E^1}f(t)\mathcal{L}(\cdot,t)dt\right\|_{q,E^1}\le K\|f\|_{\theta,E^1}.\tag{7}$$

Доказательство*). Предположим сначала, что $1<\theta\le q<\infty$. Тогда на основании неравенства Гёльдера имеем

$$|\mathcal{J}(x)|=\left|\int_{E^1}f(t)\mathcal{L}(x,t)dt\right|\le\int_{E^1}|f(t)|\mathcal{L}^{\frac{r}{q}}(x,t)\left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{r}{\theta' q}}\mathcal{L}^{\frac{r}{\theta'}}(x,t)\left|\frac{t}{x}\right|^{-\frac{r}{\theta' q}}dt\le$$
$$\le\left(\int_{E^1}|f(t)|^\theta\mathcal{L}^{\frac{r\theta}{q}}(x,t)\left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{r\theta}{\theta' q}}dt\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(\int_{E^1}\mathcal{L}^r(x,t)\left|\frac{t}{x}\right|^{-\frac{r}{q}}dt\right)^{\frac{1}{\theta'}}=$$
$$=K^{\frac{r}{\theta'}}\left(\int_{E^1}|f(t)|^\theta\mathcal{L}^{\frac{r\theta}{q}}(x,t)\left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{r\theta}{\theta' q}}dt\right)^{\frac{1}{\theta}},\tag{8}$$

так как на основании (6)

$$\int_{E^1}\mathcal{L}^r(x,t)\left|\frac{t}{x}\right|^{-\frac{r}{q}}dt=\int_{E^1}|x|^{-1}\mathcal{L}^r\left(1,\frac{t}{x}\right)\left|\frac{t}{x}\right|^{-\frac{r}{q}}dt=$$
$$=\int_{E^1}\mathcal{L}^r(1,u)|u|^{-\frac{r}{q}}du=K^r.$$

---

*) Поскольку сформулированный результат является более общим, чем приведенный в [1], мы даем его доказательство полностью, тем более, что оно очень простое.

Теперь из (8) с помощью обобщенного неравенства Минковского и соотношения (см. (6))

$$\int_{E'} \mathcal{L}^{\tau}(x,t)\left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{\tau}{\theta'}} dx = \int_{E'} \mathcal{L}^{\tau}(u,1)|u|^{-\frac{\tau}{\theta'}} du = K^{\tau}$$

получаем

$$\|J\|_{q,E'} \le K^{\frac{\tau}{\theta'}}\left[\int_{E'} |f(t)|^{\theta}\left(\int_{E'} \mathcal{L}^{\tau}(x,t)\left|\frac{x}{t}\right|^{-\frac{\tau}{\theta'}} dx\right)^{\frac{\theta}{q}} dt\right]^{\frac{1}{\theta}} = K\|f\|_{\theta,E'},$$

что и требовалось.

Если $1=\theta\le q<\infty$ $(\tau=q)$, то неравенство (7) получается сразу применением обобщенного неравенства Минковского, а если $1<\theta\le q=\infty$ $(\tau=\theta')$, то оно следует из (8). При $\theta=1$ и $q=\infty$ $(\tau=\infty)$ неравенство (7) является очевидным, поскольку в этом случае $\mathcal{L}(x,t)$ – однородная функция нулевого порядка, а (6) принимает вид:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E_1} \mathcal{L}(x,1) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in E_1} \mathcal{L}(1,t) = K.$$

Легко видеть, что ядро

$$\mathcal{L}(x,t) = \begin{cases} |x|^{-\frac{1}{q}-\alpha}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha} & \text{при } |t|\le|x| \\ |x|^{-\frac{1}{q}+\beta}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\beta} & \text{при } |t|\ge|x|, \end{cases} \tag{9}$$

где $\alpha>0$ и $\beta>0$, удовлетворяет условиям предложения 1.1, так как выполнение условия (6) при $\tau<\infty$ следует из соотношений:

$$\int_{E'} \mathcal{L}^{\tau}(x,1)|x|^{-\frac{\tau}{\theta'}} dx = \int_{E'} \mathcal{L}^{\tau}(1,t)|t|^{-\frac{\tau}{q}} dt = \int_{|t|\le 1} |t|^{\left(-\frac{1}{\theta'}+\alpha-\frac{1}{q}\right)\tau} dt +$$

$$+\int_{|t|\ge 1} |t|^{\left(-\frac{1}{\theta'}-\beta-\frac{1}{q}\right)\tau} dt = \frac{2}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = K^{\tau} < \infty,$$

а при $\tau=\infty$ $(\theta'=\infty, q=\infty)$ оно очевидно.

Примерами ядер, удовлетворяющих условию (6), являются также следующие ядра:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(x,t) = |x|^{-\frac{1}{q}+\alpha}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)^{-(\alpha+\beta)}, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}'_{\alpha}(x,t) = |x|^{-\frac{1}{q}+\alpha}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\alpha}\left[\left|\frac{t}{x}\right|\right]_1^{2\alpha}, \tag{10}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $[a]_1 = \min\{a,1\}$. Эти ядра, как нетрудно установить, оцениваются через ядро вида (9).

Отсюда, в свою очередь, вытекает справедливость неравенства (7) при следующих частных значениях параметров α,β,θ,q и соответствующих им частных формах ядра $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(x,t)$:

1) $\alpha=\frac{1}{q}>0,\ \beta>0\ ,\ 1\leq\theta\leq q<\infty,$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{q},\beta}(x,t)=|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)^{-(\frac{1}{q}+\beta)};$$

2) $\alpha>0,\ \beta=\frac{1}{\theta'}>0,\ 1<\theta\leq q\leq\infty,$

$$\mathcal{L}_{\alpha,\frac{1}{\theta'}}(x,t)=|x|^{-\frac{1}{q}+\alpha}\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)^{-(\alpha+\frac{1}{\theta'})};$$

3) $\alpha=\frac{1}{q}>0,\ \beta=\frac{1}{\theta'}>0,\ 1<\theta\leq q<\infty,$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{q},\frac{1}{\theta'}}(x,t)=\left(\sqrt{x^2+t^2}\right)^{-(\frac{1}{q}+\frac{1}{\theta'})}.$$

Неравенство (7) в случае ядра $\mathcal{L}_{\frac{1}{q},\frac{1}{\theta'}}$ совпадает с интегральным аналогом классического двухпараметрического неравенства Гильберта (см. [1] , гл.1Х и дополнение Х1У).

П. Основные неравенства

Перейдем теперь к описанию тех неравенств, о которых говорилось во введении.

П.1. Первым из них является хорошо известное двухпараметрическое неравенство Харди-Литтлвуда [1, теорема 382] , посвященное оценке интеграла (1) в случае, когда $\mathcal{L}(y)$ - однородная функция степени, μ' , $\mu=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, т.е. когда $\mathcal{L}(y)=y^{-\mu}$. Мы приведем этот результат лишь для полноты изложения:

Если $\quad 1<p<q<\infty,\ \mu=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\ ,\ f\in L_p(E'),$

$$J(x)=\int_{E'} f(y)|x-y|^{-\mu}dy,$$

то

$$\|J\|_{q,E'}\leq K\|f\|_{p,E'},$$

где можно положить (см., например, [1, стр. 431])

$$K=2^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\int_{E'}|t-1|^{-\mu}|t|^{-\frac{1}{p}}dt.$$

П.2. Пусть $1\leq p\leq\infty\ ,\ 1\leq\theta\leq q\leq\infty,$

$$\nu=\frac{1}{p'}+\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{q}\ ,\quad \frac{1}{\tau}=\nu-\frac{1}{p'}=\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{q}, \tag{11}$$

$\varphi(y,t)$ и $\mathcal{L}(y,t)$ - функции, определенные на E^2 , причем $\varphi\in L_{(p,\theta)}(E^2)$, а $\mathcal{L}(y,t)$ - положительная, однородная, со степенью однородности, $-\nu'$, симметрично убывающая по переменной y относительно точки $y=0$ при почти всех $t\in E'$, удовлетворяющая условию:

$$\|M(x,1)|x|^{-\frac{1}{\theta'}}\|_{\tau,E'}=\|M(1,t)|t|^{-\frac{1}{q}}\|_{\tau,E'}=K<\infty, \tag{12}$$

где
$$M(x,t)=|x|^{-\frac{1}{p}}\int\limits_{|y|\le|x|}\mathcal{L}(y,t)dy+\Big(\int\limits_{|y|\ge|x|}\mathcal{L}^{p'}(y,t)dy\Big)^{\frac{1}{p'}}. \tag{13}$$

Тогда для
$$\mathcal{J}(x)=\int\limits_{E^1}\int\limits_{E^1}\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dydt \tag{14}$$

справедлива оценка
$$\|\mathcal{J}\|_{q,E^1}\le 2^{\frac{1}{p'}}K\|\varphi\|_{(p,\theta),E^2}. \tag{15}$$

Доказательство. В силу результата, обратного неравенству Гёльдера, достаточно доказать, что для любой функции $g\in L_{q'}(E^1)$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\right)$ имеет место неравенство:
$$\int\limits_{E^1}\int\limits_{E^1}\int\limits_{E^1}g(x)\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dydtdx\le 2^{\frac{1}{p'}}K\|g\|_{q'}\|\varphi\|_{(p,\theta)}.$$

Очевидно, можно считать, что функции g и φ неотрицательны и, на основании теоремы М.Рисса [1, теорема 379], функция g симметрично убывает относительно точки $x=0$; а функция $\varphi(y,t)$ при почти всех t симметрично убывает по y относительно $y=0$.

Таким образом, неравенство (15) достаточно доказать для неотрицательной симметрично убывающей по y функции $\varphi(y,t)$.

Пусть $x>0$. Имеем
$$\int\limits_{E^1}\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dy=\Big(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{2x}^{\infty}\Big)\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dy+$$
$$+\int\limits_{0}^{2x}\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dy=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2.$$

Положим $E'_x=(-\infty,0)\cup(2x,\infty), E''_x=(0,2x)$. Очевидно,
$$\mathcal{J}_1\le\|\varphi(\cdot,t)\|_{p,E'_x}\cdot\Big(\int\limits_{|y|\ge|x|}\mathcal{L}^{p'}(y,t)dy\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Так как $\varphi(y,t)$ убывает по y на $(0,2x)$, а $\mathcal{L}(y-x,t)$ симметрично убывает по y относительно точки $y=x$, то
$$\mathcal{J}_2\le 2\int\limits_{0}^{x}\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dy.$$

Отсюда на основании неравенства Чебышева [1, теорема 236]
$$\mathcal{J}_2\le 2|x|^{-1}\int\limits_0^x\varphi(y,t)dy\int\limits_0^x\mathcal{L}(y-x,t)dy\le|x|^{-\frac{1}{p}}\cdot\|\varphi(\cdot,t)\|_{p,E''_x}\cdot\int\limits_{|y|\le|x|}\mathcal{L}(y,t)dy.$$

Следовательно,
$$\int\limits_{E^1}\varphi(y,t)\mathcal{L}(y-x,t)dy\le 2^{\frac{1}{p'}}\|\varphi(\cdot,t)\|_{p,E^1}\cdot M(x,t),$$

а

$$|\mathcal{J}(x)| \leq 2^{\frac{1}{p'}} \int\limits_{E'} \|\varphi(\cdot,t)\|_p M(x,t)\,dt, \tag{16}$$

где $M(x,t)$ – функция, определенная формулой (13). Аналогичная оценка верна для $\mathcal{J}(x)$ при $x<0$.

Теперь для получения неравенства (14) достаточно для оценки интеграла, стоящего в правой части (16), применить неравенство (7) п.1.1. Для этого заметим, что так как $\mathcal{L}(y,t)$ является однородной функцией степени $-\nu'$, то $M(x,t)$ является однородной функцией степени $-\nu+\frac{1}{p'}=-\frac{1}{\tau}$, а условие (6) в данном случае совпадает с условием (12). Предложение П.2 доказано.

Рассмотрим некоторые частные типы ядер $\mathcal{L}(y,t)$, удовлетворяющих условиям предложения П.2.

П.2$'$. Пусть $1\leq p<q<\infty$, $1\leq\theta\leq q$,

$$\mu = 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{p'}+\frac{1}{q}, \quad \frac{1}{\tau}=\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{q}. \tag{17}$$

Тогда для интегральных операторов вида (14) с ядрами

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)=|y|^{-\mu+\alpha}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left(\sqrt{y^2+t^2}\right)^{-(\alpha+\beta)} \tag{18}$$

и

$$\mathcal{L}'_{\alpha}(y,t)=|y|^{-\mu-\alpha}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha}\left[\left|\frac{y}{t}\right|\right]_1^{2\alpha}, \tag{19}$$

где $\alpha>0$ и $\beta>0$, справедливы неравенства (15).

Рассмотрим ядро $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)$. Докажем, что некоторая оценка сверху этого ядра удовлетворяет условию (12). Пусть $0<\beta_1\leq\alpha$, $0<\alpha_1\leq\beta$. Для ядра (18) очевидным образом получаются следующие две оценки, справедливые при любых y и t:

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)\leq |y|^{-\mu-\alpha_1}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1} \tag{20}$$

и

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)\leq |y|^{-\mu+\beta_1}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\beta_1}, \tag{21}$$

причем α_1 и β_1 можно считать удовлетворяющими условиям: $\alpha_1<1-\mu$ ($\mu<1$, так как $p<q$), $\beta_1<\frac{1}{q}$ (по условию, $q<\infty$).

Тогда, с одной стороны, применяя неравенство (20) и учитывая, что $\alpha_1+\mu<$ <1, имеем

$$M_{\alpha,\beta}(x,t)=|x|^{-\frac{1}{p}}\int\limits_{|y|\leq|x|}\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)\,dy+\left(\int\limits_{|y|>|x|}\mathcal{L}^{p'}_{\alpha,\beta}(y,t)\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}\leq$$

$$\leq |x|^{-\frac{1}{p}}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}\int\limits_{|y|\leq|x|}|y|^{-\mu-\alpha_1}dy+|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}\left(\int\limits_{|y|>|x|}|y|^{(-\mu-\alpha_1)p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$=C_1|x|^{-\frac{1}{q}-\alpha_1}|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\alpha_1}=M'_{\alpha_1}(x,t),$$

а, с другой, – применяя (21) и замечая, что $\beta_1 < \frac{1}{q}$, получаем

$$M_{\alpha,\beta}(x,t) \leq |x|^{-\frac{1}{p}}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\beta_1}\int\limits_{|y|\leq|x|}|y|^{-\mu+\beta_1}dy + |t|^{-\frac{1}{\theta'}-\beta_1}\Big(\int\limits_{|y|\geq|x|}|y|^{(-\mu+\beta_1)p'}dy\Big)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= C_2|x|^{-\frac{1}{q}+\beta_1}|t|^{-\frac{1}{\theta'}-\beta_1} = M''_{\beta_1}(x,t),$$

где C_1 и C_2 – константы.

Таким образом,

$$M_{\alpha,\beta}(x,t) \leq \overline{M}_{\alpha_1,\beta_1}(x,t) = \begin{cases} M'_{\alpha_1}(x,t) & \text{при } |t|\leq|x|, \\ M''_{\beta_1}(x,t) & \text{при } |t|\geq|x|. \end{cases}$$

Ядро $\overline{M}_{\alpha_1,\beta_1}$ лишь константой отличается от ядра (9), для которого справедливо условие (6), а следовательно, и условие (12). Поэтому для интегрального оператора (14) с ядром (18) имеет место неравенство (15). Аналогично доказывается утверждение П.2$'$ в случае ядра (19).

К функциям типа $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t)$ относится, в частности, функция

$$\mathcal{L}_{\mu,\beta}(y,t) = |t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left(\sqrt{y^2+t^2}\right)^{-(\mu+\beta)}, \quad \beta>0, \tag{22}$$

получающаяся из (18) при $\alpha=\mu>0$, а также функция

$$\mathcal{L}_{\mu,\frac{1}{\theta'}}(y,t) = \left(\sqrt{y^2+t^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\theta'}\right)}, \tag{23}$$

если $\theta>1$ $(\theta'<\infty)$, получающаяся из (18) при $\alpha=\mu>0$, $\beta=\frac{1}{\theta'}>0$.

Таким образом, для функции $\mathcal{J}(x)$, определяемой формулой (14), имеет место неравенство (15) при любом из ядер вида (18), (19), (22) или (23) при условии, что параметры p,q,θ удовлетворяют условиям (17), причем в случае ядра (23) мы должны дополнительно считать, что $\theta>1$. Если $\theta=1$, то неравенство (15) с ядром (23) будет иметь место при $1<p<q<\infty$, что легко устанавливается с помощью неравенства Харди–Литтлвуда.

П.3. Пусть $1\leq q\leq\infty$, $1\leq p\leq\sigma\leq\infty$,

$$\nu = \frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{1}{\tau} = \nu-\frac{1}{q} = \frac{1}{p'}+\frac{1}{\sigma}, \tag{24}$$

$f\in L_p(E^1)$, $\mathcal{L}(y,t)$ – положительная, однородная, со степенью однородности $-\nu$ функция, определенная на E^2 и симметрично убывающая по переменной y относительно точки $y=0$ при почти всех $t\in E^1$, удовлетворяющая условию:

$$\| M(y,1)|y|^{-\frac{1}{\sigma}}\|_{\tau,E^1} = \| M(1,\tau)|\tau|^{-\frac{1}{p'}}\|_{\tau,E^1} = K < \infty, \tag{25}$$

где

$$M(y,\tau) = |y|^{-\frac{1}{q'}}\int\limits_{|x|\leq|y|}\mathcal{L}(x,\tau)dx + \Big(\int\limits_{|x|\geq|y|}\mathcal{L}^q(x,\tau)dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда для функции

$$\mathcal{J}(x,\tau)=\int_{E^1} f(y)\mathcal{L}(y-x,\tau)dy \tag{26}$$

справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}\|_{(q,\sigma),E^2}\le 2^{\frac{1}{q}}K\,|f|_{p,E^1}\,. \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать оценку (27), достаточно установить, что для любой функции $\psi(x,\tau)\in L_{(q',\sigma')}$ $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,\ \frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma'}=1\right)$ имеет место неравенство:

$$\iiint_{E^1E^1E^1}\psi(x,\tau)f(y)\mathcal{L}(y-x,\tau)dydxd\tau\le 2^{\frac{1}{q}}K\,|f|_p\|\psi\|_{(q',\sigma')}\,. \tag{28}$$

Поскольку левая часть в (28) на основании неравенства Гёльдера оценивается через

$$|f|_p\cdot\Big\|\iint_{E^1E^1}\psi(x,\tau)\mathcal{L}(x-\cdot,\tau)dxd\tau\Big\|_{p'}\,, \tag{29}$$

нам достаточно показать, что второй множитель в (29) оценивается через $2^{\frac{1}{q}}K\|\psi\|_{(q',\sigma')}$.

Эта оценка непосредственно получается применением предложения П.2. Чтобы убедиться в возможности применения неравенства (15), заметим, что параметры p',q',σ' в силу (24) удовлетворяют условиям (11) (в которых p нужно заменить на q', q на p', а θ на σ'):

$$1\le q'\le\infty,\quad 1\le\sigma'\le p'\le\infty,\quad \nu=\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{\sigma},\quad \frac{1}{\tau}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{p'}\,,$$

а из соотношений (25) следует, что функция $M(y,\tau)$ удовлетворяет условию (12). Неравенство (27) доказано.

П.3$'$. Пусть $1<p<q\le\infty$, $p\le\sigma\le\infty$,

$$\mu=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q},\quad \frac{1}{\tau}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{p'}\,.$$

Тогда для интегральных операторов вида (26) с ядрами

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,\tau)=|y|^{-\mu+\alpha}|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\beta}\left(\sqrt{y^2+\tau^2}\right)^{-(\alpha+\beta)} \tag{30}$$

и

$$\mathcal{L}'_{\alpha}(y,\tau)=|y|^{-\mu-\alpha}|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha}\left[\left|\frac{y}{\tau}\right|\right]_1^{2\alpha}, \tag{31}$$

где $\alpha>0$ и $\beta>0$, справедливы неравенства (27).

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения основано на проверке того, что ядра (30) и (31) удовлетворяют условиям предложения П.3, и проводится так же, как и доказательство утверждения П.2$'$.

К функциям типа $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,\tau)$ относятся, в частности, функции

$$\mathcal{L}_{\mu,\beta}(y,\tau)=|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\beta}\left(\sqrt{y^2+\tau^2}\right)^{-(\mu+\beta)},\quad \beta>0, \tag{32}$$

и

$$\mathcal{L}_{\mu,\frac{1}{\sigma}}(y,\tau)=\left(\sqrt{y^2+\tau^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\sigma}\right)}, \tag{33}$$

получающиеся из $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ при $\alpha=\mu>0$ и , соответственно, при $\alpha=\mu>0$ и $\beta=\frac{1}{\sigma}$, если $\sigma<\infty$.

Если $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\mu,\frac{1}{\sigma}}$, то при $\sigma=\infty$ неравенство (27) будет иметь место при $1<p<q<\infty$.

П.4. Пусть $1\le p\le q\le\infty$, $1\le\theta\le\sigma\le\infty$, $\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$, $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{\sigma}$, $f(y,t)\in L_{(p,\theta)}(E^2)$, $\mathcal{L}(y,t,\tau)$- неотрицательная, однородная функция, со степенью однородности $-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\tau}\right)$, определенная на E^3 , удовлетворяющая условию:

$$\left\|\,\|\mathcal{L}(\cdot,1,\tau)\|_p\cdot|\tau|^{-\frac{1}{\theta'}}\right\|_\tau=\left\|\,\|\mathcal{L}(\cdot,t,1)\|_p\,|t|^{-\frac{1}{\sigma}}\right\|_\tau=K<\infty. \tag{34}$$

Тогда для функции

$$\mathcal{J}(x,\tau)=\iint\limits_{E^1E^1} f(y,t)\mathcal{L}(y-x,t,\tau)\,dy\,dt \tag{35}$$

справедлива оценка

$$\|\mathcal{J}\|_{(q,\sigma),E^2}\le K\,\|f\|_{(p,\theta),E^2}\,. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании обобщенного неравенства Минковского и неравенства Юнга [1, теорема 280] имеем

$$\|\mathcal{J}(\cdot,\tau)\|_q=\left\|\int\limits_{E^1}\int\limits_{E^1} f(y,t)\mathcal{L}(y-\cdot,t,\tau)\,dy\,dt\right\|_q\le$$
$$\le\int\limits_{E^1}dt\left\|\int\limits_{E^1} f(y,t)\mathcal{L}(y-\cdot,t,\tau)\,dy\right\|_q\le$$
$$\le\int\limits_{E^1}\|f(\cdot,t)\|_p\cdot\|\mathcal{L}(\cdot,t,\tau)\|_p\,dt.$$

Очевидно, $\|\mathcal{L}(\cdot,t,\tau)\|_p$ является однородной функцией переменных t и τ степени „$-\frac{1}{\tau}$", и, в силу (34), для нее выполнены соотношения (6) предложения 1.1 (с заменой q на σ). Поэтому на основании неравенства (7) получаем

$$\|\mathcal{J}\|_{(q,\sigma)}\le K\,\|f\|_{(p,\theta)},$$

что и требовалось.

Отметим, что функции

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t,\tau)=|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha}\,|t|^{-\frac{1}{\theta'}+\beta}\left(\sqrt{y^2+t^2+\tau^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p}+\alpha+\beta\right)} \tag{37}$$

и

$$\mathcal{L}'_{\alpha}(y,t,\tau)=|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha}\left(\sqrt{y^2+t^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\theta'}+\alpha\right)}\left[\left|\frac{t}{\tau}\right|\right]_1^{2\alpha}, \tag{38}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}$, удовлетворяют условию (34). Это следует из того, что $\|\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(\cdot,t,\tau)\|_p$ и $\|\mathcal{L}'_{\alpha}(\cdot,t,\tau)\|_p$ с точностью до константы совпадают с ядрами

(10) и (10$'$) (с заменой в них q на σ), для которых выполнено условие (6). Следовательно, $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ и $\mathcal{L}'_{\alpha}$ удовлетворяют условию (34).

К ядрам типа $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}(y,t,\tau)$ относятся также следующие функции:

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{\sigma},\beta}(y,t,\tau)=|t|^{-\frac{1}{\theta}+\beta}\left(\sqrt{y^2+t^2+\tau^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\sigma}+\beta\right)}, \tag{39}$$

$$\mathcal{L}_{\alpha,\frac{1}{\theta'}}(y,t,\tau)=|\tau|^{-\frac{1}{\sigma}+\alpha}\left(\sqrt{y^2+t^2+\tau^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p}+\alpha+\frac{1}{\theta'}\right)}, \tag{40}$$

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\theta'}}(y,t,\tau)=\left(\sqrt{y^2+t^2+\tau^2}\right)^{-\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+\frac{1}{\theta'}+\frac{1}{\sigma}\right)}, \tag{41}$$

которые получаются из $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ соответственно при $\alpha=\frac{1}{\sigma}$ или $\beta=\frac{1}{\theta'}$, или при $\alpha=\frac{1}{\sigma}$ и $\beta=\frac{1}{\theta'}$.

Поскольку в случае ядра $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ справедливость неравенства (36) доказана при $\alpha>0$ и $\beta>0$, отсюда вытекают следующие ограничения на основные параметры, при которых гарантируется неравенство (36) для функций $J(x,\tau)$, определяемых ядрами (39) - (41):

$$\begin{aligned}
&1)\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ 1\leqslant\theta\leqslant\sigma<\infty,\ \beta>0 - \text{ в случае ядра } \mathcal{L}_{\frac{1}{\sigma},\beta};\\
&2)\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ 1<\theta\leqslant\sigma\leqslant\infty,\ \alpha>0 - \text{ в случае ядра } \mathcal{L}_{\alpha,\frac{1}{\theta'}};\\
&3)\ 1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\ 1<\theta\leqslant\sigma<\infty - \text{ в случае ядра } \mathcal{L}_{\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\theta'}}.
\end{aligned} \tag{42}$$

Если воспользоваться предложениями П.2$'$, П.3$'$ и П.1, то справедливость неравенства (36) для функций $J(x,\tau)$, определяемых указанными ядрами, можно установить и при других соотношениях между параметрами. В частности, в случае ядра $\mathcal{L}_{\frac{1}{\sigma},\frac{1}{\theta'}}$ неравенство (36) справедливо не только при соотношениях (42), но и при любом из следующих групп соотношений:

а) $\theta=1,\ 1<p<q\leqslant\infty,\ p\leqslant\sigma<\infty$;

б) $\sigma=\infty,\ 1\leqslant p<q<\infty,\ 1<\theta\leqslant q$;

в) $\theta=1,\ \sigma=\infty,\ 1<p<q<\infty$.

Литература

1. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж. Е. и Полиа Г. Неравенства. М., ГИИЛ, 1948.

2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

3. Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. - "Труды Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР", 1961, т.60, с.42-81.

4. Ильин В.П. Некоторые интегральные неравенства и их применение к теоремам вложения. - В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ им. В.А.Стеклова АН СССР, 1970, т.18, с.191-216.

5. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., "Наука", 1975.