УДК 517.948.32

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ПО ОДНОМУ СЕМЕЙСТВУ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.Г. Жалнин, С.В. Успенский

Изучаемая в работе задача относится к задачам интегральной геометрии. Она рассматривалась для различных классов поверхностей многочисленными авторами. Отметим здесь работы [1 - 7], в которых можно найти дальнейшую библиографию.

Для формулировки результатов введем некоторые определения.

Пусть E_m - m-мерное пространство точек $x=(x',x'')=(x_1,\dots x_n, x_{n+1},\dots x_m)$, S - единичная сфера в E_m:

$$S=\{\omega:\ \omega\in E_m,\ \sum_{k=1}^{m}\omega_k^2=1\}, \tag{1}$$

$$E_m^+=(x_j>0,\ j=1,\dots,m), \tag{2}$$

$\psi(x): E_m^+\to E_m^+$ - диффеоморфизм класса $C^1(E_m^+)$. Определим множества:

$$K=\{x\in E_m^+,\ \sum_{k=1}^{n}[\psi_k(x)]^2-\sum_{k=n+1}^{m}[\psi_k(x)]^2<0\}, \tag{3}$$

$$K_\omega=\{x\in E_m^+,\ \sum_{k=1}^{n}[\omega_k\psi_k(x)]^2-\sum_{k=n+1}^{m}[\omega_k\psi_k(x)]^2<0\}. \tag{4}$$

Рассмотрим m-параметрические поверхности вида

$$\Gamma_{\omega,\rho}=\{L[\omega,x]=b\sum_{k=1}^{n}[\omega_k\psi_k(x)]^2-\sum_{k=n+1}^{m}[\omega_k\psi_k(x)]^2=\rho\cap K_\omega\}, \tag{5}$$

где $\omega(\omega_1,\dots\omega_m)\in S,\ \rho<0,\ x\in E_m^+$, b фиксировано и принадлежит интервалу (0, 1).

В работе изучается следующая задача: на каждой поверхности из семейства (5) задан интеграл

$$\int_{\Gamma_{y,\rho}}\frac{f(x)}{|grad_x L[y,x]|}ds_x=\Phi(y,\rho). \tag{6}$$

Требуется определить класс функций, в котором задача об определении функции f через ее интегралы $\Phi(y,\rho)$ единственна. Эта задача не является корректной и поэтому вопрос о существовании не рассматривается. Ниже установлен класс единственности задачи (6), и получено в этом классе представление. Как частный случай из рассматриваемой задачи получаем класс единственности для случая m параметрического семейства плоскостей, сфер, эллипсоидов и конических поверхностей.

Докажем некоторые вспомогательные леммы. Значале рассмотрим частный случай, когда отображение ψ является тождественным. Определим класс $\mathfrak{M}_1$. Тогда $f \in \mathfrak{M}_1$, если

1. $f \in L_1(E_m)$;

2. $supp\,\hat{f} \subset K$, $\hat{f} \in L_1(E_m)$,

где $\hat{f}(x) = \int\limits_{E_m} e^{-ix\xi} f(\xi)d\xi$, множество K определено равенством (3). Определим класс $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$, если

1) $\mathcal{F} \in L_1(E_m^+)$.

2) Обозначим через $\bar{\mathcal{F}}$ нечётное продолжение $\mathcal{F}$ на E_m. Будем считать, что

$$\mathcal{F}_1(x) = \bar{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{x}\right) \prod_{p=1}^{m} \frac{1}{x_p} \in \mathfrak{M}_1 .$$

3) Для любого мультииндекса $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$,

$$x^\nu \mathcal{F}_1(x) \in L_1(E_m).$$

Пусть $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_m)$. Определим

$G_0(x) = exp\{\varepsilon |x'|^2 - |x''|^2\}$; $\quad G(x) = -2\{\varepsilon |x'|^2 - |x''|^2\} G_0(x)$.

Л е м м а 1. <u>Пусть</u> $f \in \mathfrak{M}_1$, <u>для</u> $h > 0$ <u>положим</u>

$$f_h(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{E_m} e^{ix\xi} G_0(h\xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{7}$$

<u>Тогда для всех</u> $x \in E_m$

$$f_h(x) \to 0 \quad \text{при } h \to \infty,$$
$$f_h(x) \to f(x) \quad \text{при } h \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$|\hat{f}_h(x)| \leq (2\pi)^{-m} \int\limits_{E_m} |G_0(h\xi)| \cdot |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq$ (так как $supp\,\hat{f} \subset K$ и $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}) \leq (2\pi)^{-m} \|f\|_{L_1} \int\limits_K G_0(h\xi) d\xi =$ (замена $\xi = h^{-1}s) = C_f h^{-m} \int\limits_K G_0(s) ds \leq$ (так как для $s \in K$ $\quad G_0(s) \leq exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)}{2}|s|^2\right)\Big) \leq C_f \int\limits_{E_m} exp\left(-\frac{(1-\varepsilon)}{2}|s|^2\right) ds\, h^{-m} \to 0$ при $h \to \infty$.

Так как $f, \hat{f} \in L_1(E_m)$, то

$$G_0(h\xi)\hat{f} \to \hat{f}(\xi) \quad \text{при} \quad h \to 0$$

для почти всех $\xi \in E_m$

$$|G_0(h\xi)\hat f(\xi)| \le |\hat f(\xi)| \in L_1(E_n)$$

и, следовательно, для почти всех x при $h \to 0$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{E_m} e^{ix\xi} G_0(h\xi)\hat f(\xi)d\xi \longrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{E_m} e^{ix\xi}\hat f(\xi)d\xi = f(x).$$

Лемма 2. <u>Пусть $f \in \mathfrak{M}_1$, тогда для всех</u> $x \in E_m$

$$f(x) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ N\to\infty}} (2\pi)^{-m} \int_\delta^N h^{-m-1} \int_{E_m} e^{ix\xi h^{-1}} C(\xi)\hat f\left(\frac{\xi}{h}\right) d\xi\, dh. \qquad (8)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial f_h}{\partial h} = -(2\pi)^{-m} h^{-1} \int_{E_m} e^{ix\xi} G(h\xi)\hat f(\xi)\,d\xi = (\text{замена } \xi = h^{-1}s) =$$

$$= -(2\pi)^{-m} h^{-m-1} \int_{E_m} e^{ixsh^{-1}} G(s)\hat f\left(\frac{s}{h}\right)ds.$$

Интегрируя это соотношение по h от δ до N, находим

$$f_\delta(x) = f_N(x) + (2\pi)^{-m}\int_\delta^N h^{-m-1}\int_{E_m} e^{ix\xi h^{-1}} G(\xi)\hat f\left(\frac{\xi}{h}\right)d\xi\,dh.$$

Устремляя $\delta \to 0$, $N \to \infty$ и учитывая лемму 1, получаем (8). Лемма доказана.

Пусть q - фиксированное вещественное число. Определим:

$$\begin{aligned}
f_\ell^{\,r} &= \frac{(r+2\ell-1)!!}{(r-1)!!}\, q^\ell,\\
h_\ell^{\,r} &= \frac{(r+2\ell-1)!!}{(r+1)!!}\, q^\ell,\\
q_{\ell,s}^{\,r} &= \frac{(r+2\ell-1)!!}{(r+2s+1)!!}\, q^{\ell-s},\\
\Phi^{r,p}_{\ell,s_1\ldots s_p} &= \prod_{j=1}^{p} q^{r+j-1}_{s_{j-1},s_j} \qquad (s_0=\ell),\\
f^{\,r}_{\ell,j} &= \sum_{\substack{\ell>s_1>\ldots>s_j\ge 1\\ (s_1\ldots s_j)}} \Phi^{r,j}_{\ell,s_1,\ldots,s_j}\, f^{\,r+j}_{s_j},\\
H^{\,r}_{\ell,j} &= \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_j\\ \ell>s_1>\ldots>s_j\ge 1}} \Phi^{r,j}_{\ell,s_1,\ldots,s_j}\, h^{\,r+j+1}_{s_j},\\
\varphi^{\,r}_{\ell,k} &= \begin{cases} f_\ell^{\,r}, & k=0,\\ h_\ell^{\,r}+f^{\,r}_{\ell,1}, & k=1,\\ f^{\,r}_{\ell,k}+H^{\,r}_{\ell,k-1}, & k=2,\ldots,\ell-1,\\ H^{\,r}_{\ell,\ell-1}, & k=\ell. \end{cases}
\end{aligned} \qquad (9)$$

Положим

$$\theta_\kappa^\ell = \varphi_{\ell,\kappa}^0, \quad \kappa=0,1,\dots,\ell,$$
$$P_\ell(\tau) = \sum_{\kappa=0}^{\ell} \theta_\kappa^\ell \tau^\kappa. \tag{10}$$

Л е м м а 3. Пусть $f \in \mathfrak{M}$,

$$q_j = \begin{cases} -\frac{1}{2\ell}, & j=1,\dots,n; \\ \frac{1}{2}, & j=n+1,\dots,m. \end{cases}$$

$$\nu=(\nu_1,\dots,\nu_m),\quad Q_\nu(\xi)=\prod_{j=1}^{m} P_{\nu_j}(\xi_j),$$

где полиномы $P_{\nu_j}(\xi_j)$ определяются формулой (10) при $q = q_j$. Тогда

$$\int_{E_m^+} s^\nu G_0(s) \int_{E_m^+} e^{-\frac{ixs}{h}} f(x)\,dx\,ds =$$
$$= \int_{E_m^+}\int_{E_m^+} e^{-\frac{ixs}{h}} G_0(s) Q_\nu\left(-\frac{ixs}{h}\right) f(x)\,dx\,ds. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$J_{\tau+2\ell}^\tau = \int_{E_m^+} s_j^{\tau+2\ell} G_0(s) D_j^\tau \int_{E_m^+} e^{-\frac{ixs}{h}} f(x)\,dx\,ds.$$

Так как

$$s_j G_0(s) = -q_j D_j G_0(s),$$

то, интегрируя по частям, находим, что $J_{\tau+2\ell}^\tau$ удовлетворяет при $q=q_j$, $1\le j\le n$ рекуррентному соотношению

$$J_{\tau+2\ell}^\tau = (\tau+2\ell-1) q J_{\tau+2(\ell-1)}^\tau + q J_{\tau+1+2(\ell-1)}^{\tau+1}. \tag{12}$$

Применяя (12) ℓ раз к первому слагаемому выражения (12), находим

$$J_{\tau+2\ell}^\tau = \frac{(\tau+2\ell-1)!!}{(\tau-1)!!} q^\ell J_\tau^\tau + \frac{(\tau+2\ell-1)!!}{(\tau+1)!!} q^\ell J_{\tau+1}^{\tau+1} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\ell-1} \frac{(\tau+2\ell-1)!!}{(\tau+2s+1)!!} q^{\ell-s} J_{\tau+1+2s}^{\tau+1}. \tag{13}$$

Положим

$$A_\ell^\tau = f_\ell^\tau J_\tau^\tau + h_\ell^\tau J_{\tau+1}^{\tau+1},$$

где константы f_ℓ^τ, h_ℓ^τ определены в (9) при $q = q_j$. Тогда

$$J_{\tau+2\ell}^\tau = A_\ell^\tau + \sum_{s=1}^{\ell-1} q_{\ell,s}^\tau J_{\tau+1+2s}^{\tau+1}, \tag{14}$$

где константа $q_{\ell,s}^\tau$ определена в (9) при $q = q_j$. Применяя (14) последовательно достаточное число раз, получим, используя обозначение

$$\Phi^{r,\rho}_{\ell,s_1,\dots,s_\rho}=\prod_{j=1}^{\rho} q^{r+j-1}_{s_{j-1},s_j}\qquad (s_0=\ell),$$

$$\mathcal{J}^{r}_{r+2\ell}=A^{r}_{\ell}+\sum_{s_1=1}^{\ell-1}\Phi^{r,1}_{\ell,s_1}A^{r+1}_{s_1}+\sum_{s_1=1}^{\ell-1}\sum_{s_2=1}^{s_1-1}\Phi^{r,2}_{\ell,s_1,s_2}A^{r+2}_{s_2}+\dots$$

$$\dots+\sum_{\substack{(s_1,\dots,s_\rho)\\ \ell>s_1>\dots>s_\rho\geq 1}}\Phi^{r,\rho}_{\ell,s_1,\dots,s_\rho}A^{r+\rho}_{s_\rho}+\Phi^{r,\ell-1}_{\ell,\ell-1,\dots,1}A^{r+\ell-1}_{1}.$$

Или, вводя обозначения $f^{r}_{\ell,j},\ H^{r}_{\ell,j},\ \varphi^{r}_{\ell,\kappa}$, из (9) получим

$$\mathcal{J}^{r}_{r+2\ell}=A^{r}_{\ell}+\Phi^{r,\ell-1}_{\ell,\ell-1,\dots,1}A^{r+\ell-1}_{1}+\sum_{j=1}^{\ell-2}f^{r}_{\ell,j}\mathcal{J}^{r+j}_{r+j}+$$

$$+H^{r}_{\ell,j}\mathcal{J}^{r+j+1}_{r+j+1}=\sum_{\kappa=0}^{\ell}\varphi^{r}_{\ell,\kappa}\mathcal{J}^{r+\kappa}_{r+\kappa}. \tag{15}$$

При $r=0$ из (15) имеем

$$\mathcal{J}^{0}_{2\ell}-\sum_{\kappa=0}^{\ell}\theta^{\ell}_{\kappa}\mathcal{J}^{\kappa}_{\kappa}=\sum_{\kappa=0}^{\ell}\theta^{\rho}_{\kappa}\int_{E^+_m}s^{\kappa}_{j}G_0(s)D^{\kappa}_{j}\hat{f}\left(\frac{s}{h}\right)ds=\sum_{\kappa=0}^{\ell}\theta^{\ell}_{\kappa}\int_{E^+_m}s^{\kappa}_{j}G_0(s)\int_{E^+_m}e^{-isxh^{-1}}(-ix_jh^{-1})^{\kappa}f(x)\,dx\,ds=$$

$$=\iint_{E^+_mE^+_m}e^{-ixsh^{-1}}G_0(s)\sum_{\kappa=0}^{\ell}\theta^{\ell}_{\kappa}s^{\kappa}_{j}(-ix_jh^{-1})^{\kappa}f(x)\,dx\,ds=\int_{E^+_m}\int_{E^+_m}e^{-ixsh^{-1}}G_0(s)P_{\ell}(-is_jx_jh^{-1})f(x)\,dx\,ds.$$

Полагая последовательно $j=1,\dots,m$, получим утверждение леммы.

Пусть

$$W(x,t,h)=(2\pi)^{-m}h^{-m-1}\cdot 4^{m}\times$$

$$\times\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}P_j\,\frac{(ixh)^{-2\nu}}{(2\nu)!}\cdot\left[Q_{\nu+\ell_j}(-ith^{-1})\prod_{\rho=1}^{m}e^{-it_\rho h^{-1}}\cdot x_\rho^{-1}+Q_{\nu+\ell_j}(ith^{-1})\prod_{\rho=1}^{m}e^{it_\rho h^{-1}}x_\rho^{-1}\right], \tag{16}$$

где

$$P_j=\begin{cases}-\varepsilon, & j=1,\dots,n;\\ 1, & j=n+1,\dots,m;\end{cases}$$

$Q_{\nu+\ell_j}$ - полином, определенный в лемме 3.

Л е м м а 4. <u>Пусть</u> $F\in\mathfrak{M}$ и

$$\varphi(\omega,\rho)=\int_{\Gamma_{\omega,\rho}}\frac{F(x)}{|\operatorname{grad}_x L[\omega,x]|}\,d\sigma_x,$$

<u>где</u> $L[\omega,x]$ и $\Gamma_{\omega,\rho}$ <u>определены в (5) при</u> $\varphi\equiv E$. <u>Тогда</u>

$$F(x)=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ N\to 0}}\int_{\delta}^{N}\int_{E_m^+}W(x,t,h)\int_{-\infty}^{0}e^{|t|^2\rho}\varphi\left(\frac{t}{|t|},\rho\right)d\rho\,dt\,dh. \tag{17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $F\in\mathfrak{M}$, то

$$F_1(x)=\bar F\left(\frac{1}{x_1},\ldots,\frac{1}{x_m}\right)\prod_{p=1}^{m}\frac{1}{x_p}\in\mathfrak{M}_1,$$

и согласно лемме 2 имеем

$$F_1(x)=(2\pi)^{-m}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ N\to\infty}}\int_{\delta}^{N}h^{-m-1}\mathcal{J}(x,h)dh,$$

где

$$\mathcal{J}(x,h)=\int_{E_m}e^{ix\zeta h^{-1}}G(\zeta)\hat F_1(\zeta h^{-1})d\zeta.$$

Так как G и $\hat F_1$ – четные по каждому переменному функции, то

$$\mathcal{J}(x,h)=2^m\int_{E_m^+}\prod_{p=1}^{m}\cos(x_p\zeta_p h^{-1})G(\zeta)\hat F_1(\zeta h^{-1})d\zeta=$$

$$=2^m\int_{E_m^+}\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\frac{(ix\zeta h^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!}G(\zeta)\hat F_1(\zeta h^{-1})d\zeta.$$

Так как $\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\left|\frac{(ix\zeta h)^{-\frac{1}{2\nu}}}{(2\nu)!}\right||G(\zeta)|\leqslant|\zeta|^2e^{-\frac{(1+\varepsilon)}{2}|\zeta|^2}\prod_{p=1}^{m}e^{|x_p\zeta_p h^{-1}|}$

(при $\zeta\in K$) и при каждом фиксированном x ряд $\sum\frac{(ix\zeta h^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!}$ равномерно сходится на каждом компакте, а функция $\hat F_1$ непрерывна и ограничена, то

$$\mathcal{J}(x,h)=2^m\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\frac{(ixh^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_{E_m^+}\zeta^{2\nu}G(\zeta)\hat F_1(\zeta h^{-1})d\zeta=$$

$$=2^{m+1}\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{(ixh^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!}\rho_j\int_{E_m^+}\zeta^{2\nu+2\ell_j}G_0(\zeta)\hat F_1(\zeta h^{-1})d\zeta=$$

(учитывая четность функции F_1)

$$=4^m\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{(ixh^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!}\rho_j^{2\nu}\int_{E_m^+}\zeta^{2\nu+2\ell_j}G_0(\zeta)\times$$

$$\times\int_{E_m^+}(e^{-i\zeta sh^{-1}}+e^{i\zeta sh^{-1}})F_1(s)ds\,d\zeta=$$

(учитывая (11))

$$= 4^m \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} \frac{(ixh^{-1})^{2\nu}}{(2\nu)!} p_j \int_{E_m^+}\int_{E_m^+} G_0 \times \left[Q_{\nu+e_j}\left(\frac{-is\zeta}{h}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-is\zeta h^{-1}} + Q_{\nu+e_j}\left(\frac{is\zeta}{h}\right)e^{is\zeta h^{-1}}\right] F_1(s)ds\,d\zeta. \tag{18}$$

Положим

$$\eta(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\le 0;\\ 0, & \tau>0;\end{cases}$$

тогда, учитывая условие на $supp\, F_1$ и рассматривая один член (18), получим

$$\int_{E_m^+}\int_{E_m^+} G_0(\zeta)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{is\zeta}{h}\right)e^{-is\zeta h^{-1}}F_1(s)ds\,d\zeta =$$

$$=\int_{E_m^+}\int_{E_m^+}\eta(|\zeta'|^2-|\zeta''|^2)G_0(\zeta)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{is\zeta}{h}\right)e^{-is\zeta h^{-1}}F_1(s)ds\,d\zeta=$$

$$=(\text{замена } s_k=\frac{1}{u_k}\quad k=1,\dots,m)=\int_{E_m^+}\int_{E_m^+}\eta(|\zeta'|^2-|\zeta''|^2)G_0(\zeta)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{i\zeta}{uh}\right)\times e^{-\frac{i\zeta}{uh}}\times$$

$$\times F_1\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u_1^2\cdot\ldots\cdot u_m^2}\,d\zeta=(\text{замена } \zeta_k=u_k t_k,\quad k=1,\dots,m)=$$

$$=\int_{E_m^+}\int_{E_m^+}\eta(|u't'|^2-|u''t''|^2)G_0(ut)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{it}{h}\right)\times e^{-\frac{it}{h}}\times$$

$$\times F_1\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u_1\cdot\ldots\cdot u_m}\,dt=(\text{т.к. } F_1\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u_1\cdot\ldots\cdot u_m}=F(u))=$$

$$=\int_{E_m^+}\int_{E_m^+}\eta(|u't'|^2-|u''t''|^2)G_0(ut)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{it}{h}\right)e^{-ith^{-1}}F(u)du\,dt=$$

$$=\int_{E_m^+}\left\{\int_{K_{\frac{t}{|t|}}}G_0(ut)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{it}{h}\right)e^{-ith^{-1}}F(u)du\right\}dt. \tag{19}$$

Разбивая внутренний интеграл на два интеграла, один из которых есть интеграл по $\Gamma_{\frac{t}{|t|},\rho}$ (см. [9], с. 773), находим

$$\int_{E_m^+}\int_{E_m^+}G_0(\zeta)Q_{\nu+e_j}\left(-\frac{i\zeta s}{h}\right)F_1(s)ds\,d\zeta=$$

$$=\int_{E_m^+}Q_{\nu+e_j}\left(\frac{it}{h}\right)e^{-ith^{-1}}\int_{-\infty}^{0}e^{|t|^2\rho}\int_{\Gamma_{\frac{t}{|t|},\rho}}\frac{F(x)}{|grad_x L[\frac{t}{|t|},x]|}d\sigma_x\,d\rho\,dt. \tag{20}$$

Утверждение леммы следует из (18) и (20).

Пусть $\psi=(\psi_1(x)\dots\psi_m(x))$ – отображение $E_m^+\to E_m^+$ класса C^1. Определим класс функций $\mathcal{M}_\psi$. Будем говорить, что $F(x)\in\mathcal{M}_\psi$, если

$$f(\psi^{-1}(x))\left|\frac{D\psi}{Dx}(\psi^{-1}(x))\right|\in\mathfrak{M}_1,$$

где $\psi^{-1}(x)$ – отображение, обратное ψ, а $\left|\frac{D\psi(y)}{Dy}\right|$ – якобиан отображения ψ в точке y. Рассмотрим на классе $\mathfrak{M}_\psi$ оператор

$$Au(\omega,p)=\int\limits_{\Gamma_{\omega,p}}\frac{u\,d\sigma_x}{|grad_x L[\omega,x]|},\tag{21}$$

где $\Gamma_{\omega,p}$ – поверхность, определяемая условием (5). Тогда имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Уравнение

$$Au(\omega,p)=0$$

в классе $\mathfrak{M}_\psi$ имеет только тривиальное решение. Если $f\in\mathfrak{M}_\psi$, то для почти всех $x\in E_m^+$ имеет место представление

$$f(x)=\left|\frac{D\psi(x)}{Dx}\right|\lim_{\substack{\delta\to0\\ N\to\infty}}\int\limits_\delta^N\int\limits_{E_m}W(\psi(x),t,h)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{0}e^{|t|^2p}Af\left(\frac{t}{|t|},p\right)dp\,dt\,dh,\tag{22}$$

где функция $W(x,t,h)$ определена в (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения класса $\mathfrak{M}_\psi$ следует, что для каждой функции $\mathcal{F}(x)$ существует такая единственная функция $f\in\mathfrak{M}_1$, что

$$\mathcal{F}(x)=f(\psi(x))\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|.\tag{23}$$

Обозначим $A_1f(\omega,p)=\int\limits_{\Gamma_{\omega,p}}\frac{f(x)}{|grad_xL_{[\omega,x]}|}d\sigma_x$, где $L[\omega,x],\Gamma_{\omega,p}$ удовлетворяют (5) при $\psi=J$. Имеем

$$A_1f(\omega,p)=\frac{\partial}{\partial p}\int\limits_{-\infty}^{p}A_1f(\omega,\tau)d\tau=\frac{\partial}{\partial p}\int\limits_{L[\omega,x]<p}f(x)dx=\text{(замена } x=\psi(\xi))=$$

$$=\frac{\partial}{\partial p}\int\limits_{L[\omega,\psi(\xi)]<p}f(\psi(\xi))\left|\frac{D\psi}{D\xi}\right|d\xi=\frac{\partial}{\partial p}\int\limits_{L[\omega,\psi(\xi)]<p}\mathcal{F}(\xi)d\xi=A_1\mathcal{F}(\omega,p).$$

Таким образом, если $A_1\mathcal{F}\equiv0$, то в силу леммы 4 $f\equiv0$ и, следовательно, $\mathcal{F}(x)\equiv0$. Формула (22) вытекает из (23) и леммы 4.

Л и т е р а т у р а

1. Г е л ь ф а н д И.М., Г р а е в М.И., В и л е н к и н Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.

2. К о с т е л я н е ц П.О., Р е ш е т н я к Ю.Г. Определение вполне аддитивной функции по ее значениям на полупространстве. –"Успехи мат. наук", 1954, т.9, вып. 3, с.135–140.

3. Й о н Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., ИЛ, 1958.

4. П л а к с и н Г.И. Об одной задаче И.М.Гельфанда. – "Докл. АН СССР", 1966, т.170, № 4.

5. У с п е н с к и й С.В. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству эллипсоидов.–"Сиб. мат. журн.", 1972, т. 13, № 6, с. 1374–1382.

6. У с п е н с к и й С.В., С а д ы к о в а С.Б. О некоторых задачах интегральной геометрии.–"Сиб. мат. журн.", 1976, т. 17, № 2, с. 414–425.

7. Л а в р е н т ь е в М.М., Р о м а н о в В.Г., В а с и л ь е в В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, "Наука", 1969.

8. В а т с о н Д.И. Теория бесселевых функций. М., 1949, ч. 1.

9. Ш в а р ц Л. Анализ. "Мир", 1972, т. 1.

10. С т е й н Е., В е й с Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. "Мир", 1975.