УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ

В.И. Арнольд (Москва)

Многие гипотезы, подсказанные экспериментальным материалом теории особенностей, со временем превратились в теоремы (см. обзор [1]). Поэтому кажется полезным привести и список некоторых задач, оставшихся нерешенными. Я буду пользоваться без пояснений терминологией обзора [1] , где можно найти и более полный список литературы.

1. Является ли гладким страт $\mu = const$? В пределах таблиц, в частности при $\mu \leq 16$, является. Недавно А.Н.Шошитайшвили доказал, что функции с изоморфными локальными кольцами образуют гладкое многообразие в базе версальной деформации. Гладкость страта $\mu = const$ вытекала бы из положительного решения следующей задачи.

Пусть дано алгебраическое действие комплексной алгебраической группы в конечномерном аффинном пространстве (например, линейное представление). Рассмотрим множество точек, стационарные группы которых имеют данную размерность. Является ли это множество гладким многообразием?

2. Совпадает ли вещественная модальность вещественной функции с комплексной? Это, очевидно, верно для простых особенностей, а В.М.Муравлев проверил, что это так и для унимодальных. Число вещественных модулей не превосходит числа комплексных. Как указал мне Э.Б.Винберг, для представлений произвольных вещественных алгебраических групп совпадение уже не обязательно. Например, число модулей стандартного действия группы кватернионов в R^4 равно 0, а после комплексификации отлично от нуля.

3. Всякая ли функция стабильно эквивалентна Γ-невырожденной (в окрестности конечнократной критической точки)?

4. Для каких весов $\alpha_s = A_s/N$ существует невырожденная квазиоднородная функция степени 1? Для функций меньше четырех переменных необходимое и достаточное условие заключается в том, что дробь

$$\prod_s \frac{1-z^{N-A_s}}{1-z^{A_s}}$$

представляет собой многочлен. Для функций четырех переменных это уже не так, как показал Б.М.Ивлев [2, с.22].

Эксперимент показывает, что все разумные характеристики Γ-невырожденной особенности просто выражаются через геометрию многогранника Ньютона. Вот несколько примеров, уточняющих эту гипотезу.

5. Вычислить модальность Γ-невырожденной функции по многограннику Ньютона Γ. В частности, для полуквазиоднородных функций доказать, что модальность равна числу мономов базиса локального кольца на диаграмме и выше. Для функций двух переменных модальность равна, по-видимому, числу целых точек в многоугольнике, ограниченном координатными лучами, выходящими из точки $(2,2)$, и диаграммой Ньютона Γ.

Частичные результаты в этом направлении получены А.Г.Кушниренко и А.М. Габриэловым [3, 4].

6. Вычислить сигнатуру квадратичной формы, заданной индексом пересечения в гомологиях средней размерности локального неособого множества уровня Γ-невырожденной функции $n=3 \pmod 4$ переменных. Ответ известен лишь для суммы степеней (Хирцебрух [5]) и для нескольких простейших случаев (Габриэлов [6]). Экспериментальные данные подсказывают для квазиоднородной функции формулу: число положительных (отрицательных) квадратов = количеству чисел λ_s в верхней (нижней) полуплоскости*), где λ_s – квадратные корни из собственных чисел оператора монодромии, фиксированные условием

$$\lambda_s = e^{\pi i[(m_s,\alpha)+\sum\alpha_k]}.$$

Здесь m_s – показатель монома x^{m_s}, определяющего собственный вектор монодромии по формуле $\omega_s = x^{m_s}\dfrac{dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n}{df}$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – веса. (Число ν_τ мономов x^{m_s}, для которых $(m_s,\alpha)=\tau$, дается формулой $\sum \nu_\tau t^{\tau N} = \prod \dfrac{1-t^{N-A_k}}{1-t^{A_k}}$, где $\alpha_k = A_k/N$.)

Числа λ_s являются собственными числами для симплектического оператора $W = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Var} \\ -t\operatorname{Var}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, действующего на $H^* + H_*$. Квадрат этого оператора дает монодромию.

7. Найти нормальную форму, к которой приводятся все Γ-невырожденные функции с данной диаграммой Ньютона Γ. Ответ частично известен лишь для случая, когда диаграмма имеет всего одну грань. Эксперимент показывает, что и в других случаях получаются довольно простые нормальные формы. Но даже для однородных функций неизвестно, всегда ли существует простая или хотя бы полиномиальная единая нормальная форма для всех Γ-невырожденных однородных функций данной степени.

8. Найти жорданову нормальную форму оператора монодромии Γ-невырожденных функций с данной диаграммой Ньютона Γ. Характеристический полином вычислен А.Н.Варченко. Недавние работы А.Тодорова и Гордона о "геометрической монодромии" позволяют надеяться, что эта задача близка к решению.

---
*) Эта гипотеза доказана Стинбринком осенью 1975 г.

9. Каково наибольшее число компонент локальных вещественных множеств уровня морсовизации вещественной функции с данной (скажем, Γ-невырожденной) особенностью? В случае функций двух переменных число всех компонент (овалов и выводящих из окрестности данной точки) не превосходит $g+k$ $(g+1,k)$, где g - род соответствующей римановой поверхности (число ручек), а k - число компонент края. Если исходная функция Γ-невырождена, то род g есть в точности число целых точек строго между Γ и осями координат (это легко вывести из формулы Кушниренко [3]), а $k+1$ - число целых точек на Γ .

Однако уже в случае двух переменных неизвестно, всегда ли существует морсовизация с $k+g$ компонентами, а также сколько среди этих компонент овалов и как их расположение зависит от особенности. В случае большого числа переменных наряду с числом компонент естественно рассматривать суммы чисел Бетти, а также эйлеровы характеристики множеств уровня или множеств меньших значений (ср. работы Петровского, Олейник, Гудкова, Рохлина, Харламова, Звонилова, Уткина, Крахнова, Краснова, Мишачева и др. по 16-й проблеме Гильберта [7]). В работах Харламова показано, какую роль играют в этих задачах размерности $h^{p,q}$ пространств форм типа p,q . Мы приходим, в частности, к вопросу, как определить играющее роль рода число $h^{p,0}$ для локального множества уровня голоморфной функции и как вычислить это число по диаграмме Ньютона?

10. Полиномы Чебышева от многих переменных. С каждой конечнократной критической точкой функции связан свой "полином Чебышева" - морсовизация с минимальным возможным числом критических значений. (Обычные полиномы Чебышева получаются из функций одной переменной вида z^n .) Спрашивается, какие из замечательных свойств полиномов Чебышева от одной переменной переносятся и на определенные таким образом полиномы от нескольких переменных?

11. Равномерные оценки осциллирующих интегралов. Осциллирующий интеграл имеет вид

$$I(h,\lambda)=\int_{R^n} e^{\frac{i}{h}\mathcal{F}(x,\lambda)}\varphi(x)dx, \quad h\to 0 ,$$

где φ - сосредоточенная в достаточно малой окрестности начала координат гладкая функция, $\mathcal{F}$ - вещественная деформация функции $f(x)=\mathcal{F}(x,0)$, гладко зависящая от параметра λ ; h - малый параметр; $\mathcal{F}(0,0)=0$.

Равномерным показателем β особенности функции f в точке 0 называется точная нижняя грань чисел γ , для которых при любой деформации $\mathcal{F}$

$$|I(h,\lambda)|\leqslant C(\varphi)|h|^{\frac{n}{2}-\gamma} \qquad (1)$$

при всех достаточно малых $|\lambda|$.

Задача состоит в том, чтобы вычислить показатель β (скажем, для Γ-невырожденных функций f).

В примерах, где β удалось найти (Виноградов [8] , Дюистермаат [9]), этот показатель совпадает с показателем β_0 первого члена асимптотического разложения $$I(h,0) \sim Ch^{\frac{n}{2}-\beta_0} \ln^{z_0} h + \ldots$$

Для Γ-невырожденных функций показатель β_0 гипотетически вычисляется по точке пересечения $(z,\ldots,z)$ диаграммы Ньютона с диагональю первого октанта: $\beta_0 = \frac{n}{2} - \frac{1}{z}$. Эта гипотеза доказана В.Н. Карпушкиным для полуквазиоднородного случая и А.Н. Варченко – для Γ-невырожденного в предположении, что $z > 1$.

Для каждой пары целых чисел n и ℓ можно определить универсальный равномерный показатель $\beta(n,\ell)$ как точную нижнюю грань чисел γ, для которых осциллирующий интеграл допускает равномерную по параметру λ оценку (1) для всех семейств $\mathcal{F}$ функций n переменных x и ℓ параметров λ, исключая тощее множество в функциональном пространстве.

Задача вычисления рациональных чисел $\beta(n,\ell)$ представляется очень трудной, так как она кажется почти эквивалентной задаче полной классификации всех особенностей. При фиксированном ℓ и при $n \to \infty$ числа $\beta(n,\ell)$ стабилизируются: $\beta(n,\ell) = \beta(\infty,\ell) = \beta(\ell)$. Первые 10 чисел $\beta(\ell)$ имеют вид:

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β	0	1/6	1/4	1/3	3/9	5/12	1/2	1/2	13/24	9/16	2/3

(начиная с $\ell = 6$, использована недоказанная гипотеза $\beta = \beta_0$). Гипотетически $\beta(\ell)$ растет при $\ell \longrightarrow \infty$ как $\sqrt{2\ell}/6$ (при этом гипотетически максимальное число Милнора и число модулей ℓ-параметрического семейства общего положения растут как $2^{\sqrt{2\ell}}$.

12. Равномерные оценки вариаций прообраза. Пусть g – росток диффеоморфизма n-мерного вещественного (или комплексного) пространства в другое такое же пространство и пусть $g(O_1) = O_2$ – μ-кратная точка пространства образа. В зависимости от типа особенности g в точке O_1, μ прообразов точки O_2 могут сливаться по-разному.

Чтобы описать различие между этими способами, полезно исследовать асимптотические геометрические характеристики прообраза малого шара с центром в точке O_2.

Пусть $\mathcal{D}$ – достаточно хорошее множество в евклидовом n-мерном пространстве. Тогда можно определить его объем $\sigma_n(\mathcal{D})$, число компонент $\sigma_0(\mathcal{D})$ и так называемые вариации всех размерностей $\sigma_k(\mathcal{D})$ (см. Витушкин [10]). По определению, $\sigma_k(\mathcal{D})$ есть среднее по всем k-мерным подпространствам n-мерного пространства значение k-мерного объема ортогональной проекции $\mathcal{D}$ на k-мерные подпространства с учетом кратности – числа компонент, проектирующихся в одну точку. Если $\mathcal{D}$ выпукло, то числа $\sigma_k(\mathcal{D})$ с точностью до независящих от $\mathcal{D}$ коэффициентов совпадают с коэффициентами формулы для объема ε-окрестности

$$\operatorname{mes}(\mathcal{D}+\varepsilon) = \sigma_n(\mathcal{D}) + c_1\sigma_{n-1}(\mathcal{D})\varepsilon + \ldots + c_n\sigma_n(\mathcal{D})\varepsilon^n.$$

Если граница $\mathcal{D}$ гладкая, то эти коэффициенты можно вычислить как интегралы от симметрических функций главных кривизн края $\mathcal{D}$. Одномерная вариация $\sigma_1(\mathcal{D})$ характеризует длину $\mathcal{D}$, но отнюдь не диаметр!

Величины, асимптотика которых нас интересует, – это вариации прообраза шара радиуса δ с центром O_2 при отображении g :

$$w_k(\delta) = \sigma_k\left(g^{-1}\{y : |y| < \delta\}\right).$$

(Имеется в виду часть прообраза в шаре достаточно малого радиуса ρ с центром в точке O_1 : $\delta < \delta_0(\rho)$.)

Как и для осциллирующих интегралов, можно определить индивидуальные показатели

$$\mathcal{l}_k^{(0)}(g) = \inf\{\xi_k : w_k(\delta) < C\delta^{\xi_k}\}. \qquad (2)$$

Например, для отображения $y_k = x_k^{a_k}$ показатели равны $\mathcal{l}_n^{(0)} = \sum\alpha_i$, $\mathcal{l}_{n-1}^{(0)} = (\sum\alpha_i) - \alpha_{max}, \dots, \mathcal{l}_1^{(0)} = \alpha_{min}$ (где $\alpha_i = 1/a_i$ – веса).

Пусть $G(x,\lambda)$ – деформация отображения g, зависящая от l параметров λ (так что $G(x,0) = g(x)$).

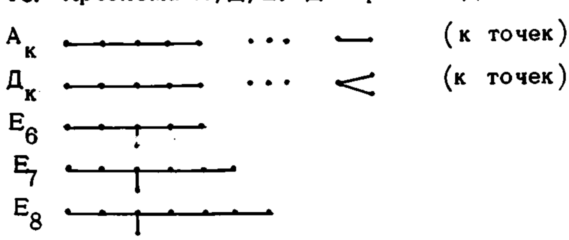
Равномерные показатели $\mathcal{l}_k(g)$ определяются формулой (2), в которой w_k заменено на $w_k(\delta,\lambda) = \sigma_k\{x : |G(x,\lambda)| < \delta\}$ и константа C не зависит от λ, меняющегося в окрестности нуля. Требуется научиться вычислять все эти показатели (скажем, для градиента Γ-невырожденной функции), а также соответствующие универсальные показатели $\mathcal{l}_k(n,l)$ (где $n = \dim\{x\}$, $l = \dim\{\lambda\}$).

Единственный известный мне результат в этом направлении – следующая теорема Н.Н.Нехорошева [11], доказанная им для нужд небесной механики: равномерная по λ, близким к 0, оценка деформации G отображения g

$$\max_{0 \le r \le x}\ \min_{|x| = r} |G(x,\lambda)| \ge Cx^{p} \qquad (3)$$

нарушается лишь на множестве растущей с p коразмерности в пространстве функций g. Оценка такого вида вытекала бы из равномерной оценки первой вариации сверху. Таким образом, вычисление универсального показателя $\mathcal{l}_1(n,l)$ для градиентных отображений даже для малых значений n и l позволило бы получить оценки скорости эволюции переменных действия в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым. Для функций одной переменной оценка (3) с точным значением константы C получается из теории полиномов Чебышева, наименее уклоняющихся от нуля.

13. Проблема А, Д, Е. Диаграммы Дынкина.



неожиданно появляются при решении столь разных классификационных задач таких, как классификация: 1) критических точек функций; 2) правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$; 3) категорий линейных пространств, 4) каустик; 5) волновых фронтов; 6) групп, порожденных отображениями; 7) простых групп Ли.

Некоторые связи между этими объектами известны, однако в большинстве случаев (например, в случаях $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$) совпадение ответов в разных задачах не имеет пока никакого объяснения. Проблема "А, Д, Е" состоит в том, чтобы найти такую общую классификационную теорему, из которой получались бы решения всех перечисленных задач так, чтобы можно было бы выводить, скажем, классификацию простых устойчивых особенностей каустик из классификации правильных многогранников.

14. Проблема $K(\pi,1)$. С 1972 года известно, что дополнения к бифуркационным многообразиям функций и к бифуркационным многообразиям для их множеств уровня в случаях простых особенностей А, Д, Е являются пространствами Эйленберга-Маклейна $K(\pi,1)$.

Допускает ли этот результат какое-либо обобщение на случай не простых особенностей?

15. Особенности и отражения. С каждой простой особенностью связаны две группы, порожденные отражениями: группа, порожденная отражениями в сторонах сферического треугольника (с помощью которой особенность строится как спектр кольца инвариантов), и группа, порожденная отражениями Пикара-Лефшеца (с помощью которой описывается группа монодромии и бифуркационная диаграмма множеств уровня).

И.В.Долгачев [12, 13] обобщил первую конструкцию и получил все квазиоднородные особенности при помощи многоугольников Лобачевского и колец автоморфных функций. Спрашивается, не допускает ли и вторая конструкция обобщения на не простые особенности? Иными словами, требуется дополнить диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Построение простых особенностей по правильным многогранникам} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Построение квазиоднородных двумерных особенностей из автоморфных форм} \arrow[d] \\
\text{Построение бифуркационных диаграмм простых особенностей} \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}
$$

до коммутативной.

Для модулярной группы (и ее обобщений на случай кривых K рода $g>1$) естественной областью действия является не пространство комплексных гомологий $H_1(K,\mathbb{C})$, а верхняя полуплоскость Зигеля (т.е. многообразие Грассмана лагранжевых комплексных подпространств в $H_1(K,\mathbb{C})$ с положительно определенной мнимой частью функции действия).

Быть может, и для особенностей естественной областью действия группы монодромии является не пространство комплексных гомологий, а нечто вроде верхней полуплоскости? Здесь мы снова приходим к вопросу о фильтрации Ходжа для особенностей (ср. задачу 9). Этому вопросу посвящены недавние работы Стинбринка [14] .

16. Особенности и обобщенные группы Уайтхеда. Дополнить до коммутативной диаграмму:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Теория Морса} & \longrightarrow & \text{Обобщенные группы Уайтхеда} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Теория Пикара-Лефшеца} & \longrightarrow & ?
\end{array}
$$

Здесь верхняя горизонтальная стрелка – теория Серфа-Вагонера-Володина-Хатчера [15-18], выражающая гомотопические свойства пространства функций Морса через естественную стратификацию пространства гладких вещественных функций. Можно думать, что по естественной стратификации пространства ростков голоморфных функций тоже можно строить своего рода комплексную теорию Серфа-Вагонера-Володина-Хатчера, которая должна относиться к вещественной так же, как классы Черна относятся к классам Штифеля-Уитни.

17. Стабильное кольцо когомологий. С критической точкой голоморфной функции f связано кольцо $H^*(f)$ когомологий дополнения к бифуркационной диаграмме множеств уровня в базе версальной деформации.

Пусть f_2 – росток функции из версальной деформации функции f_1. Тогда трансверсаль к соответствующему f_2 страту в базе версальной деформации задает вложение дополнений и гомоморфизм колец когомологий $H^*(f_1)\to H^*(f_2)$. Например, если $f_1=x^n, f_2=x^{n-1}$, то H^* – это кольца когомологий групп кос из n и из $n-1$ нити, а гомоморфизм индуцирует стабилизацию колец когомологий групп кос при $n\to\infty$.

Спрашивается, происходит ли подобная стабилизация и в общем случае, и если да, то каково стабильное кольцо когомологий (его можно считать кольцом когомологий дополнения к бифуркационной диаграмме в базе версальной деформации функции $f\equiv 0$)?

Прежде всего нужно выяснить, задает ли вложение трансверсали канонический (не зависящий от вложения) гомоморфизм колец. Это было бы так, если бы 1) страт f_2 в базе для f_1 был неприводим, 2) сохраняющие бифуркационную диаграмму голоморфные автоморфизмы базы версальной деформации оставляли бы на месте кольцо $H^*(f_2)$.

В действительности, например, страт $f_2=A_3$ в базе версальной деформации для $f_1=D_4$ состоит из трех неприводимых компонент. Однако для наших целей вместо свойства 1) было бы достаточно доказать стабильную неприводимость страта f_2 (в базе версальной деформации функции, более вырожденной, чем f_1).

Аналогичные вопросы можно поставить и для дополнений к бифуркационным диаграммам функций. В этом случае возникают также следующие интересные объекты:

а) подгруппа группы кос, возникающая из движения критических значений при обходе параметрами бифуркационной диаграммы;

б) подкольцо кольца когомологий дополнения к бифуркационной диаграмме, индуцированное из кольца когомологий группы кос при отображении, сопоставляющем точке базы версальной деформации неупорядоченный набор критических значений.

Эти подгруппы и подкольца неизвестны даже для хорошо изученных классов особенностей. Интересная гипотеза, дающая описание групп, сформулирована Лойенгой [19].

В заключение сформулируем несколько задач, связанных с приложениями теории особенностей.

18. Обращение теоремы Лагранжа-Дирихле. Доказать, что положение равновесия 0 системы Ньютона $\ddot{x}=-\operatorname{grad} U$ неустойчиво, если критическая точка 0 многочлена $U(x_1,\ldots,x_n)$ – не точка локального минимума.

Ошибочное доказательство опубликовано Н. Г.Четаевым. Для случая $n=2$ имеется неопубликованное доказательство В.П.Паламодова. Упомяну еще задачу Р.Тома: доказать, что хотя бы одна из фазовых кривых системы $\dot{x}=\operatorname{grad} U$ входит в критическую точку 0 с определенной касательной (если U – многочлен).

19. Алгоритмическая неразрешимость проблемы устойчивости. Является ли алгоритмически разрешимой задача об устойчивости положения равновесия 0 для системы $\dot{x}_k=P_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$, где P_k – многочлены с рациональными коэффициентами? Близкие задачи, алгоритмическая неразрешимость которых, вероятно, повлекла бы за собой неразрешимость предыдущей:

1) Задача о существовании предельного цикла у системы $\dot{x}=P(x,y)$, $\dot{y}=Q(x,y)$, где P и Q – многочлены с рациональными коэффициентами.

2) Задача о положительности вещественного абелева интеграла $\oint R(x,y)dx$ по овалу кривой $P(x,y)=0$ (коэффициенты P и R – рациональные числа).

Все эти задачи, во всяком случае, не допускают алгебраического алгоритма (см. [20]).

20. Типичные особенности решений вариационных задач. Известно, что вариационные задачи приводят к разрывам и особенностям даже в случае, когда в постановке задачи все гладко. Возникающие при этом особенности могут быть патологически сложными из-за бесконечнократных вырождений. Спрашивается, можно ли избежать патологий, ограничиваясь случаями общего положения?

В качестве примера рассмотрим задачу о кратчайшем пути из точки A евклидова пространства в точку B, избегающем область C, ограниченную гладким подмногообразием $\mathcal{D}$.

Систему необходимых условий мы будем называть почти достаточной, если для многообразий $\mathcal{D}$ общего положения для любого $L>0$ среди кривых, соединяющих A с B вне C и имеющих длину меньше L, лишь конечное число удовлетворяет необходимым условиям.

Можно ли выписать явно почти достаточную систему необходимых условий? Насколько мне известно, такая система не выписана даже для случая, когда $\mathcal{D}$ – поверхность в трехмерном пространстве.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о скорейшем пути из точки A в точку B при условии, что скорость движения в каждой точке x принадлежит заданному гладкому подмногообразию F_x касательного пространства к R^n в точке x. (Многообразие F_x называется индикатрисой в точке x.)

Если индикатриса невыпукла, то следует пользоваться смешанными стратегиями, т.е. следует заменить индикатрису ее выпуклой оболочкой. Мы приходим, таким образом, к следующей задаче:

Описать особенности выпуклой оболочки k-мерного подмногообразия $\mathcal{F}_x$ общего положения в n-мерном евклидовом пространстве.

Кроме тривиального случая $n=2$, эта задача решена лишь для $n=3$, $k=2$ (В.М.Закалюкин) и $n=3$, $k=1$ (В.Д.Седых).

Чтобы искать почти достаточные системы необходимых условий, нужно было бы также описать перестройки этих особенностей в n-параметрических семействах (параметром является точка x). Общий вопрос о существовании явно выписываемых почти достаточных систем необходимых условий можно, вероятно, решить, и не выписывая явно самих условий.

Отмечу здесь же задачу описания особенностей множества достижимых из A точек (для $\mathcal{F}_x$ общего положения). В частности, пусть A – точка пространства с релятивистский метрикой общего положения. Рассмотрим множество точек, достижимых из A времяподобными кривыми. Какие особенности могут иметь его граница и множество точек, достижимых изотропными кривыми?

Примыкающие сюда задачи об описании особенностей функции "величины экстремума функционала в зависимости от конечной точки" для задач общего положения частично решены в теории лагранжевых и лежандровых особенностей (см. [1, 21]).

21. Особенности в теории уравнений с частными производными. В теории уравнений с частными производными встречается много различных случаев вырождения (когда какие-либо определители обращаются в нуль). Например, встречаются случаи вырождения эллиптичности или гиперболичности, появление кратных характеристик и т.п. При анализе этих вырождений необходимо исследование коразмерности соответствующих подмногообразий в пространствах струй и выяснение того, в каких задачах полностью исследованы случаи общего положения, в каких – вырождения, неустранимые малым шевелением однопараметрического семейства задач и т.д.

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу с косой производной для уравнения Лапласа в трехмерном шаре.

Вырождения возникают из-за того, что поле может касаться поверхности сферы вдоль некоторой кривой и может касаться этой кривой в отдельных точках. В этой задаче (и в аналогичной n-мерной задаче) все вырождения общего положения описаны (см. [22]). К сожалению, влияние этих вырождений общего положения на поведение решений вблизи особых многообразий на поверхности n-

мерного шара до сих пор исследовано только при $n=2$, в общем случае известны лишь функциональные пространства, в которых задача становится фредгольмовой [23] . Аналогичная ситуация имеется во многих задачах математической физики, решение которых ищется методами функционального анализа в пространствах С.Л.Соболева или их обобщениях.

Задача состоит здесь в том, чтобы описать характер особенностей на поверхностях, кривых и в точках пространства, которые фактически имеются у решений уравнений с гладкими начальными или граничными условиями общего положения и которые ответственны за то, что решение оказывается не бесконечно гладким, но лишь принадлежащим соответствующему функциональному пространству.

Первые работы в этом направлении начаты Дж.Гукенхеймером [24] .

Литература

1. Арнольд В.И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы. - "Успехи математических наук", 1975, т.30, № 5, с. 3-65.
2. Арнольд В.И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек. - "Успехи математических наук", 1974, т.29, № 2, с. 11-49.
3. Кушниренко А.Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора. - "Функциональный анализ и его приложения", 1975, т.9, № 1, с.74-75.
4. Габриэлов А.М., Кушниренко А.Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций. - "Функциональный анализ и его приложения", 1975, т.9, № 4, с.67-68.
5. Brieskorn E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten.-"Invent. Math.", 1966,v. 2 , N 1, p.1-14.
6. Габриэлов А.М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей. - "Функциональный анализ и его приложения", 1973, т.7, № 3, с.18-32.
7. Гудков Д.М. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий. - "Успехи математических наук", 1974, т.29, № 4, с.3-79.
8. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., "Наука", 1971.
9. Duistermaat J. Oscillatory Integrals, Lagrange Immersious and Unfolding of Singularities, Preprint, 1973.
10. Витушкин А.Г. О многомерных вариациях. М., Гостехиздат, 1955.
11. Нехорошев Н.Н. Устойчивые оценки снизу для гладких отображений и для градиентов гладких функций. - "Математический сборник", 1973, т.90, № 3, с.432-478.
12. Долгачёв И.В. Факторконические особенности комплексных поверхностей. - "Функциональный анализ и его приложения", 1974, т.8, № 2, с.75-76.

13. Д о л г а ч ё в И.В. Автоморфные формы и квазиоднородные особенности. – "Функциональный анализ и его приложения", 1975, т.9, № 2, с.67–68.

14. S t e e n b r i n k J. Limits of Hodge structures, IHES, Preprint,1975.

15. C e r f J. La stratification naturelle des espaces de fonctions differentiables réeles et le théorème de la pseudo-isotopie.-"IHES Publ.Sci.", 1970, v.39,p.5–173.

16. W a g o n e r J.B. Algebraic invariants for pseudoisotopies.-"Proceedings of Liverpool Singularities Simposium II", Springer Lecture Notes in Math.,1971,v.209,p.164–190.

17. H a t c h e r A.E. Parametrized h-cobordism theory.-"Ann.Inst. Fourier." 1973,v.23, N 2, p.61–74.

18. В о л о д и н И.А. Обобщенные группы Уайтхеда и псевдоизотопии. – "Успехи математических наук",1972, т.27, № 5, с.229–230.

19. L o o i j e n g a E. The Complement of the Bifurcation Variety of a simple singularity.-"Invent.Math.", 1974,v.23, N 2,p.105–116.

20. А р н о л ь д В.И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. – "Функциональный анализ и его приложения", 1970, т.4, № 3, с.1–9.

21. З а к а л ю к и н В.М. О лагранжевых и лежандровых особенностях. – "Функциональный анализ и его приложения", 1976, т.10, № 1.

22. В и ш и к С.М. Векторные поля в окрестности края многообразия. – "Вестник МГУ . Сер.математическая", 1972, № 1, с.21–28.

23. М а з ь я В.Г. О вырождающейся задаче с косой производной. –"Математический сборник", 1972, т.87, № 3, с.417–454.

24. G o u k e n h e i m e r J. Solving a single couservation low, Preprint, 1973.