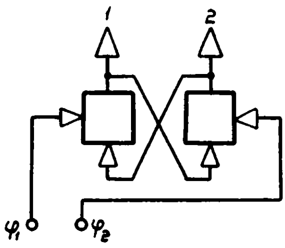
О СИНТЕЗЕ СХЕМ НА АВТОМАТАХ ПАМЯТИ СО МНОГИМИ СОСТОЯНИЯМИ

С.И. Баранов

(Ленинград)

Рассматриваются вопросы выбора числа состояний автоматов памяти для минимизации оборудования автомата. Предлагается один метод построения этих автоматов памяти на универсальных элементах, реализующих функцию ИЛИ-НЕ.

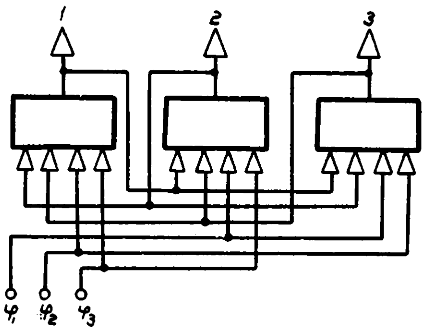
При синтезе автоматов в качестве их элементов памяти выбираются автоматы Мура, обладающие полнотой таблиц переходов и выходов[I], причем наибольшее распространение на практике получили триггеры с раздельными входами (рис. I). Триггер с раздельными входами строится из двух элементов ИЛИ-НЕ с об-



$\varphi_1\varphi_2$	1	2
00	1	2
10	1	1
01	2	2

Рис.I. Триггер с раздельными входами

ратными связями. Аналогичным образом можно построить автоматы памяти на любое число n состояний, используя для этого n элементов ИЛИ-НЕ с 2(n-I) входами у каждого элемента. В качестве примера на рис. 2 приведен автомат памяти на 3 состояния и его таблица переходов.



$\varphi_1\varphi_2\varphi_3$	1	2	3
000	1	2	3
100	1	1	1
010	2	2	2
001	3	3	3

Рис.2. Автомат Мура с 3 состояниями.

Поставим задачу получения аналитических зависимостей, позволяющих для любого произвольного автомата выбрать такие элементы памяти, которые обеспечат минимальную схему синтезируемого автомата. Рассмотрим произвольный автомат Мили А, часть графа которого приведена на рис. 3.

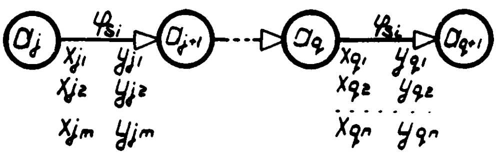


Рис.3. Участок графа автомата Мили

Основные характеристики автомата А:

N – число состояний;

r – число ребер графа автомата (число пар переходов);

p – суммарное число входных сигналов, приписанных ребрам графа автомата.

Предполагается, что один и тот же переход может вызываться несколькими входными сигналами. Так, из состояния a_j в состояние a_{j+1} автомат может перейти под воздействием любого из входных сигналов x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m} с выдачей выходных сигналов y_{j_1}, y_{j_2}, ..., y_{j_m}, соответственно.

В качестве элемента памяти автомата А выберем автомат Мура В рассмотренного выше типа с n состояниями. Необходимое число таких автоматов $k = \log_n N$, если $\log_n N$ - целое число, и $k = \text{entire}[\log_n N + 1]$ при дробном $\log_n N$. Для простоты в дальнейшем будем всегда пользоваться первой формулой. Также для простоты будем предполагать, что автомат А можно закодировать соседним кодом, хотя все рассуждения легко распространить и на случай несоседнего кодирования.

При переходе автомата А из состояния a_j, код которого $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_k)$, в состояние a_{j+1} $(t_1, \ldots t_{i-1}, s_i, t_{i+1} \ldots, t_k)$ происходит переход автомата памяти B_i $(1 \le i \le k)$ из состояния t_i в состояние $s_i (1 \le t_i \le n, 1 \le s_i \le n)$, для чего комбинационная схема должна выдать сигнал функции возбуждения $\varphi_{s_i} = I$. Очевидно, что функция φ_{s_i} будет принимать значение "единица" каждый раз, когда автомат B_i переходит в состояние s_i, что может иметь место и на других переходах автомата А, например из состояния a_q в состояние a_{q+1} (рис.3). Часть комбинационной схемы автомата А, соответствующая функции возбуждения φ_{s_i}, приведена на рис. 4, где

$$\varphi_{s_i} = t_1 \ldots t_k (x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_m}) \vee \ldots \vee v_1 \ldots v_k (x_{q_1} \vee \ldots \vee x_{q_n});$$

$$y_{j_1} = t_1 \ldots t_k x_{j_1}; \ldots; y_{j_m} = t_1 \ldots t_k x_{j_m};$$

$$y_{q_1} = v_1 \ldots v_k x_{q_1}; \ldots; y_{q_n} = v_1 \ldots v_k x_{q_n}.$$

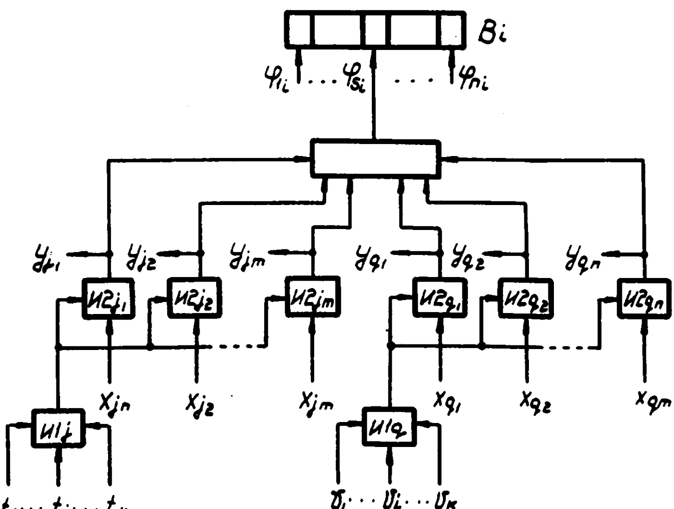


Рис.4. Функциональная схема участка автомата, приведенного на рис.3.

Количество схем И1 равно r (число ребер автомата).

Количество схем И2 равно p (суммарное число входных сигналов, приписанных ребрам автомата).

Количество схем ИЛИ равно $n \cdot k$ (число входов во все элементы памяти).

Количество входов в I элемент И1 равно k .

Количество входов в I элемент И2 равно 2 .

Количество входов во все элементы ИЛИ равно p .

Оборудование автомата V складывается из оборудования памяти автомата (V_n) и оборудования комбинационной схемы ($V_{k\,c}$).

$$V = V_n + V_{k\,c}, \tag{I}$$

$$V_{k\,c} = k \cdot r + r + 2p + p + n \cdot k = k(r+n) + r + 3p. \tag{2}$$

Второй (r) и последний ($n \cdot k$) члены появились вследствие необходимости инвертирования сигналов при переходе от выражений в булевой алгебре к схеме на универсальных элементах ИЛИ-НЕ.

$$V_n = 2n\,(n - 1) \cdot k; \tag{3}$$

$$k = \log_n N = \frac{\ln N}{\ln n}. \tag{4}$$

Подставив (2), (3) и (4) в (I), получим

$$V = \frac{\ln N}{\ln n}(r + 2n^2 - n) + r + 3p. \tag{5}$$

Поставим задачу выбора таких элементов памяти (из рассмотренных выше), которые приведут к минимуму оборудования для различных синтезируемых автоматов.

Приравнивая производную $\frac{dV}{dn}$ нулю, получаем

$$\begin{gathered} (r - n + 2n^2)\left(- \frac{\ln N}{n} \cdot \frac{1}{\ln^2 n}\right) + \frac{\ln N}{\ln n}(4n - 1) = 0, \\ \ln N \neq 0; \quad \ln n \neq 0. \\ - \frac{r - n + 2n^2}{n \ln n} + 4n - 1 = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА: Выбор числа состояний элементов памяти для получения минимального оборудования синтезируе-

мого автомата зависит только от числа ребер графа (пар переходов) этого автомата (и не зависит, таким образом, от числа состояний синтезируемого автомата).

Решение полученного трансцендентного уравнения (6) представляет известные трудности, поэтому значительно проще исследовать функцию V в интересующих нас точках определения n. Из (6) получим

$$r = n\cdot\left[2n\ln n + (\ln n - 1)(2n - 1)\right] \quad . \qquad (7)$$

Для $n = 2,3,\ldots,10$ получим следующие значения r, при которых объем оборудования V синтезируемого автомата будет минимальным:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	4	22	56	108	182	278	396	540	708

Легко убедиться, что функция V в этих точках принимает именно минимальное значение. Вторая производная $\frac{d^2V}{dn^2}$ при $n = 2,3,\ldots,10$ положительна.

Решим теперь задачу нахождения не минимальных точек, а границ диапазонов, в пределах которых целесообразней использовать тот или иной элемент памяти. Пусть V_1 - оборудование синтезируемого автомата, в качестве элементов памяти которого взяты автоматы с n_1 состояниями, а V_2 - оборудование того же автомата, построенного на элементах памяти с $n_2 = n_1 + 1$ состояниями. Найдем условие, при котором $V_1 \le V_2$. Воспользовавшись формулой (5) и решив неравенство относительно r, получим

$$r \le R = \frac{(2n_1^2 + 3n_1 - 1)\ln n_1 - (2n_1^2 - n_1)\ln(n_1 + 1)}{\ln(n_1 + 1) - \ln n_1} \qquad (8)$$

Результаты подстановки в (8) значений $n_1 = 2,3,\ldots,9$ сведены в таблицу:

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9
R	9	35	78	137	227	330	467	626

В зависимости от числа ребер графа синтезируемого автомата можно определить число состояний элемента памяти, которое

должно быть выбрано для получения минимального оборудования автомата. Так, если автомат имеет $r = 23$ ребра ($23 < 35$), то его целесообразно строить на автоматах памяти с 3 состояниями. При $r = 40$ ($40 > 35$) уже необходимо выбирать в качестве элементов памяти автоматы с 4 состояниями.

Аналогичное исследование можно провести для автоматов памяти, синтезируя их в зависимости от числа ребер (пар переходов) из автоматов с меньшим числом состояний. Подобное "многоэтажное" построение должно привести к еще большей экономии за счет сокращения оборудования элементов памяти.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.М. Глушков. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, М., 1962.