ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Панкевич
(Варшава)

Ниже предлагается метод решения систем нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений, удобный для использования на универсальных вычислительных системах.

Описание метода. Дана система из n нелинейных уравнений с n неизвестными:

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{I}$$

для которой k-ым приближением решения является:

$$A_0^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}). \tag{2}$$

Если для всех i справедливо неравенство

$$|f_i(A_0^{(k)})| < \varepsilon , \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ – заданное число, то приближение (2) считаем решением системы (I), в противном случае – вычисляем следующее приближение.

С помощью n отличных от нуля чисел

$$h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \dots, h_n^{(k)}, \tag{4}$$

построим n новых вспомогательных точек:

$$A_i^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_{i-1}^{(k)}, y_i^{(k)} + h_i^{(k)}, y_{i+1}^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Вычислим значения всех функций f_i во всех точках $A_i^{(k)}$. На $n+1$ узлах (2) и (5) построим n интерполяционных многочленов первой степени с n переменными.

Эти многочлены ω_i должны удовлетворять условиям:

$$\omega_i^{(k)}(A_j^{(k)}) = f_i(A_j^{(k)}), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Решим систему n линейных уравнений

$$\omega_i^{(k)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7)$$

Решение системы (7) будем считать очередным ($k+1$)-ым приближением решения нелинейной системы (I).

Описанный алгоритм при достаточно близком к решению начальном приближении и числах $h_i^{(k)}$ (4), стремящихся с ростом верхнего индекса к нулю, даст последовательность, сходящуюся к решению системы (I).

Ф о р м ы м е т о д а. Пусть имеется система из n нелинейных уравнений (I) и некоторое приближение решения (2). Нужно найти следующее приближение решения системы из n линейных уравнений (7).

Легко проверить, что интерполяционным многочленом, удовлетворяющим условиям (6), построенным с помощью k -того приближения, для i -той функции является следующий:

$$\omega_i^{(k)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_i(A_0^{(k)}) + \sum_{m=1}^{n} g_{im}^{(k)}(y_m - y_m^{(k)}), \qquad (8)$$

где

$$g_{im}^{(k)} = [f_i(A_m^{(k)}) - f_i(A_0^{(k)})] / h_m^{(k)}. \qquad (9)$$

Приравнивая многочлены (8) к нулю, получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} g_{im}^{(k)} y_m = -f_i(A_0^{(k)}) + \sum_{m=1}^{n} g_{im}^{(k)} y_m^{(k)}, \qquad (10)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Решим систему (I0) методом Крамера. Тогда

$$y_l = G_l^{(k)} / G^{(k)}, \qquad (11)$$

где $G^{(k)} = |g_{ij}^{(k)}|$, $(i, j, l = 1, 2, \ldots n)$ а $G_l^{(k)}$ получен заменой в определителе $G^{(k)}$ l-го столбца, правыми частями равенства (I0). Если из l-го столбца $G^{(k)}$ вычесть остальные, соответственно умноженные на $y_m^{(k)}$ $(m = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n)$, то в l-ом столбце останутся разности:

$$g_{il}^{(k)} y_l^{(k)} - f_i(A_0^{(k)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12)$$

Тогда можем определитель $G_l^{(k)}$ записать как сумму двух определителей:

$$G_l^{(k)} = G^{(k)} \cdot y_l^{(k)} - G_l'^{(k)}, \qquad (13)$$

$G_l'^{(k)}$ отличается от $G^{(k)}$ только тем, что элементами l-го столбца определителя $G_l'^{(k)}$ будут значения $f_i(A_0^{(k)})$ $(i=1,2,..n)$.

Из (II), учитывая (I3), получаем

$$y_l = y_l^{(k)} - G_l'^{(k)} / G^{(k)}, \qquad l = 1,2,\ldots,n. \qquad (14)$$

Из (9) видно, что из каждого столбца определителя $G^{(k)}$ можно вынести $1/h_i^{(k)}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. То же самое можно сделать для каждого столбца, за исключением l-го в определителе $G_l'^{(k)}$. Тогда $G_l'^{(k)}$ можно значительно упростить, суммируя l-ый столбец с остальными.

Если $F^{(k)} = |f_i(A_j^{(k)})|$ $(i,j=1,..n)$ и $F_l^{(k)}$ отличается от $F^{(k)}$ только l-ым столбцом, элементами которого являются значения $f_i(A_0^{(k)})$ $(i=1,2,\ldots,n)$, то из (I4) имеем

$$G_l'^{(k)}/G^{(k)} = F_l^{(k)} h_l^{(k)} / [F^{(k)} - \sum_{m=1}^{n} F_m^{(k)}] = Z_l^{(k)} h_l^{(k)} / (1 - \sum_{m=1}^{n} z_m^{(k)}), \qquad (15)$$

где $z_m^{(k)} = F_m^{(k)} / F^{(k)}$, а это, как легко заметить, есть m-ая компонента решения следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{m=1}^{n} f_i(A_m^{(k)}) z_m = f_i(A_0^{(k)}), \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (16)$$

Окончательно

$$y_l^{(k+1)} \equiv y_l = y_l^{(k)} - z_l^{(k)} h_l^{(k)} / \alpha^{(k)}, \quad l = 1,2,\ldots,n, \qquad (17)$$

где $\alpha^{(k)} = 1 - \sum_{m=1} z_m^{(k)}$. Убывающую последовательность чисел $h_i^{(k)}$ можно задать следующим образом:

$$h_i^{(k)} = h^{(k)} \qquad \text{для} \quad i = 1,2,\ldots, n \qquad (18)$$

и $h_i^{(k+1)} = h_i^{(k)} \cdot \beta$, где $0 < \beta < 1$.

П а р а л л е л ь н ы й   а л г о р и т м. Описанный алгоритм можно реализовать на универсальной вычислительной системе [I] состоящей из n машин.

Зададим приближение (2) во все машины. По своим программам машины вычисляют значения левых сторон системы (I) для приближения (2):

M_i (i-ая машина) вычисляет $f(A_0^{(k)})$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Если не для всех i выполнено неравенство (3), тогда определяем первую вспомогательную точку (5) и вычисляем:

M_i : $f_i(A_1^{(k)})$, затем вторую, третью и, наконец,

M_i : $f_i(A_n^{(k)})$.

Таким образом, в памяти каждой из машин хранятся коэффициенты одного из уравнений системы (I6). Для решения этой системы можно воспользоваться p-алгоритмом, описанным в работе [I]. Поскольку требуется систему линейных уравнений [I] записать в виде $X = BX+G$, то приведем нашу систему к такому же виду, обозначив:

$$b_{ij} = -f_i(A_j^{(k)}) \quad \text{для} \quad i \neq j, \quad b_{ii} = 1 - f_i(A_i^{(k)})$$

и $g_i = f_i(A_0^{(k)})$, $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Координаты решения нашей линейной системы (I6), решенной указанным p-алгоритмом, будут находиться во всех машинах:

$$M_i : z_i^{(k)} .$$

Для получения числа $\alpha^{(k)}$ просуммируем все $z_i^{(k)}$ и сумму вычтем из единицы.

Затем по формулам (I7) вычислим координаты нового приближения

$$M_i : y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} - z_i^{(k)} h^{(k)} / \alpha^{(k)} ,$$

вычислим новое значение $h^{(k+1)}$ по формуле (I8) и начинаем новый цикл.

Литература

I. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. О решении задач на универсальных вычислительных системах. Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1965, вып. I7, стр. I06-I64.