О НАДЕЖНОСТИ ОДНОРОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

В.Г.Хорошевский

(Новосибирск)

Однородные универсальные вычислительные системы (УВС)[I], состоящие из достаточно большого числа элементарных машин (ЭМ), в дальнейшем будем называть однородными УВС высокой производительности.

В настоящей работе используется аппарат математической теории массового обслуживания [2,3] .

§ I. Микроструктурный подход к оценке надежности УВС высокой производительности

Пусть УВС состоит из N машин, причем N - достаточно большое число, то есть $N \to \infty$. Пусть также имеется $m \geq 1$ абсолютно надежных восстанавливающих устройств.

Будем предполагать, что время безотказной работы и время восстановления ЭМ распределены по экспоненциальным законам соответственно с интенсивностями λ , μ . Эти предположения близки к истине [4].

Требуется определить характеристики надежности рассматриваемой УВС.

Пусть $\varepsilon(t)$ означает число исправных ЭМ УВС в момент времени t , причем $\varepsilon(t) \in E$, $E = \{0,1,2,\dots\}$.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что

$\varepsilon(t) = k$. Для вероятностей $P_k(t)$ справедлива следующая система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_0'(t) &= -m\mu P_0(t) + \lambda P_1(t), \\ P_k'(t) &= m\mu P_{k-1}(t) - (m\mu + k\lambda) P_k(t) + (k+1)\lambda P_{k+1}(t), \\ &\qquad k > 0, \end{aligned}\right\} \quad (I.I)$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1.$$

Решая систему (I.I) методом производящих функций, получаем:

$$P_k(t) = e^{-\frac{m\mu}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})} \sum_{l=0}^{k} b_l(t) \frac{\left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^{k-l} (1-e^{-\lambda t})^{k-l}}{(k-l)!}. \quad (I.2)$$

Величины $b_l(t)$ ($l \geq 0$, $t \geq 0$) могут быть определены из следующего:

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) x^l = \sum_{l=0}^{\infty} a_l (xe^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t})^l,$$

где $|x| \leq 1$,

$$a_l = P_l(0), \qquad \sum_{l=0}^{\infty} a_l = 1.$$

Легко показать, что

$$\lim_{t \to \infty} b_0(t) = 1, \qquad \lim_{t \to \infty} b_l(t) = 0, \qquad l > 0.$$

Из (I.2) следует, что стационарные вероятности равны

$$P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t) = \left(\frac{m\mu}{\lambda}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{m\mu}{\lambda}}. \quad (I.3)$$

Пусть n - минимальное число исправных ЭМ в УВС, при котором система обладает свойствами УВС высокой производительности.

Функцией готовности рассматриваемой УВС назовем функцию

$$S(t) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(t). \quad (I.4)$$

Стационарной функцией надежности УВС высокой производительности назовем функцию

$$R(t) = P\{\xi > t\},$$

где ξ является первым моментом времени, когда в стационарном

режиме в УВС останется $l \in E_1$ исправных машин,

$$E_1 = \{0, I, \ldots, n - I\}, \quad E_1 \subset E.$$

Легко показать, что

$$R(t) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \sum_{l=o}^{\infty} \frac{(m\,\mu t)^l}{l!} e^{-m\mu t} \sum_{r=o}^{k-n+1} \frac{(k\lambda t)^r}{r!} e^{-k\lambda t}. \quad (I.5)$$

С т а ц и о н а р н о й   ф у н к ц и е й   н е в о с с т а н о в и м о с т и УВС высокой производительности назовем функцию

$$V(t) = P\{\eta > t\},$$

где η является первым моментом времени, когда в стационарном режиме в системе станет $l \in E_2$ исправных машин, $E_1 \cup E_2 = E$.

$$V(t) = \sum_{k=o}^{n-1} p_k \sum_{l=o}^{\infty} \frac{(k\lambda t)^l}{l!} e^{-k\lambda t} \sum_{r=o}^{n-1-k+1} \frac{(m\mu t)^r}{r!} e^{-m\mu t}. \quad (I.6)$$

По формулам (I.2) - (I.6) можно оценить надежность УВС высокой производительности.

§ 2. Макроструктурный подход к оценке надежности УВС высокой производительности

Предположим, что на восстанавливающую систему поступает простейший поток [2] отказавших ЭМ с интенсивностью Λ.

$E = \{0, I, 2, \ldots\}$ - пространство состояний для УВС. Пусть $\varepsilon(t)$ означает число неисправных машин в УВС в момент времени t, $\varepsilon(t) \in E$. Обозначим через $P_k(t)$ **в е р о я т н о с т ь** того, что $\varepsilon(t) = k$. Наиболее просто определить величины $P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)$.

$$\left.\begin{aligned}
P_o &= \left[\sum_{k=o}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k + \frac{\mu}{(m-1)!\,(m\mu - \Lambda)}\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^m\right]^{-1}, \\
P_k &= \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k \left[\bar{\Delta}(k-m)\frac{1}{k!} + \Delta(k-m)\frac{1}{m!\, m^{k-m}}\right] P_o, \\
\Delta(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \le 0 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

при $\Lambda/m\mu < 1$, которое является условием конечной очереди в восстанавливающей системе.

Зная вероятности P_k, можно определить другие характеристики надёжности. Например, среднее число отказавших ЭМ, ожидающих начала восстановления, то есть математическое ожидание очереди, равно

$$M_1 = \frac{\Lambda}{m\mu(1 - \Lambda/m\mu)^2} P_m . \qquad (2.2)$$

Математическое ожидание числа отказавших ЭМ, находящихся как в очереди, так и в восстановлении, равно

$$M_2 = M_1 + P_0 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k + \frac{m}{(1 - \Lambda/m\mu)} P_m . \qquad (2.3)$$

Среднее число восстанавливающих устройств, не занятых восстановлением отказавших ЭМ, равно

$$M_3 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k)}{k!}\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k P_0 . \qquad (2.4)$$

Вероятность того, что все восстанавливающие устройства заняты, равна

$$\Pi = \frac{m\mu}{(m\mu - \Lambda)} P_m . \qquad (2.5)$$

Вероятность того, что время ожидания начала восстановления γ больше произвольного отрезка времени t будет

$$P\{\gamma > t\} = \Pi \cdot e^{-(m\mu - \Lambda)t} , \quad t \geq 0. \qquad (2.6)$$

Среднее время ожидания начала восстановления равно

$$M\gamma = \bar{\gamma} = \frac{1}{m\mu - \Lambda}\Pi , \qquad (2.7)$$

а дисперсия

$$D\gamma = \bar{\gamma}\left(\frac{2}{m\mu - \Lambda} - \bar{\gamma}\right) . \qquad (2.8)$$

Пусть n - минимальное число отказавших машин в УВС, при котором последняя считается ещё системой высокой производительности.

Коэффициент готовности

$$S = \lambda (n - m) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k p_0 + \Lambda (n - m) \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)^k \times$$

$$\times [\lambda (k - m)\frac{1}{k!} + \Lambda (k - m)\frac{1}{m!\, m^{k-m}}]p_0. \qquad (2.9)$$

Стационарная функция надежности вычислительной системы

$$R(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^l}{l!} [\lambda (k - m)\cdot k^l \cdot e^{-k\mu t} +$$

$$+ \Lambda (k - m)\cdot m^l \cdot e^{-m\mu t}] \sum_{r=0}^{n-k+1} \frac{(\Lambda t)^r}{r!} e^{-\Lambda t}. \qquad (2.10)$$

Стационарная функция невосстановимости УВС высокой производительности

$$V(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^l}{l!} \cdot e^{-\Lambda t} \sum_{r=0}^{k-n-1+l} \frac{(\mu t)^r}{r!} \times$$

$$\times [\lambda (k - m)\cdot k^r \cdot e^{-k\mu t} + \Lambda (k - m)\, m^r\, e^{-m\mu t}]. \qquad (2.11)$$

По формулам (2.I) - (2.II) можно оценить надежность однородной УВС высокой производительности.

Результаты, полученные в данной работе, применимы и для вычислительных сред [5].

В качестве примера рассмотрим систему высокой производительности, в которой элементарная машина обладает такой же надежностью, что и ЭМ системы "Минск-222" [6,7] .

Зависимость коэффициента готовности (при микроструктурном подходе) от числа восстанавливающих устройств, то есть функция $S(m)$ для $n = 100$ и $n = 110$, изображена на рис. I в виде точек (o). Здесь же изображена функция $S(m)$ в виде точек (.), которая рассчитывалась по более точным формулам [8] , справедливым для систем любой производительности, при $n = 100$, $n = 110$ и числе машин в резерве $(N - n) = 10$, $(N - n) = 0$.

На рис.2 представлена функция $S(m)$ для $n = 1000$, $n = 1100$ и $(N - n) = 100$.

Видно, что если $(N - n)/n \geq 0{,}1$, то можно пользоваться

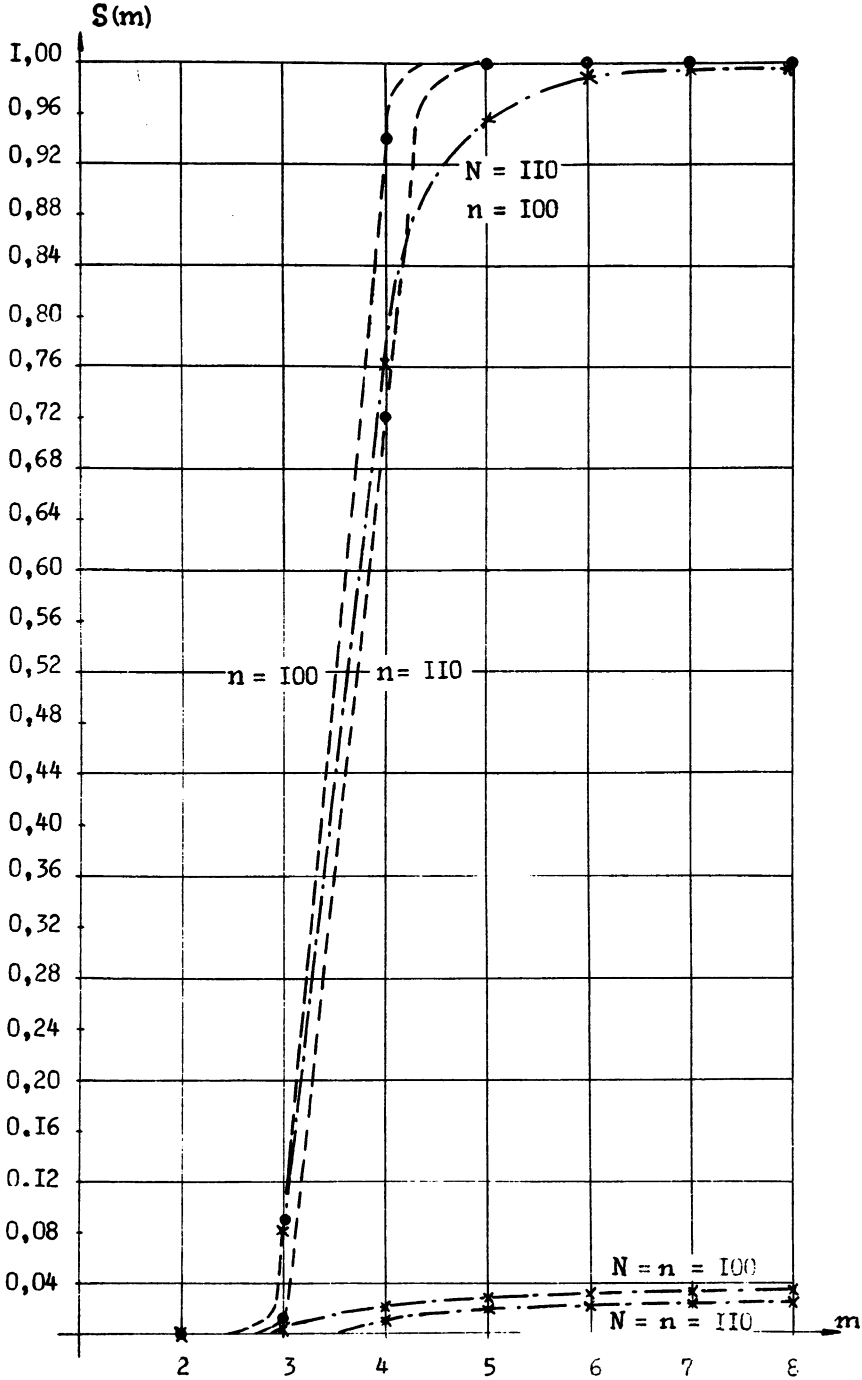
S(m)
I,00
0,96
0,92
0,88
0,84
0,80
0,76
0,72
0,68
0,64
0,60
0,56
0,52
0,48
0,44
0,40
0,36
0,32
0,28
0,24
0,20
0.I6
0.I2
0,08
0,04
N = II0
n = I00
n = I00
n= II0
N = n = I00
N = n = II0
m
2
3
4
5
6
7
8

Рис. I.

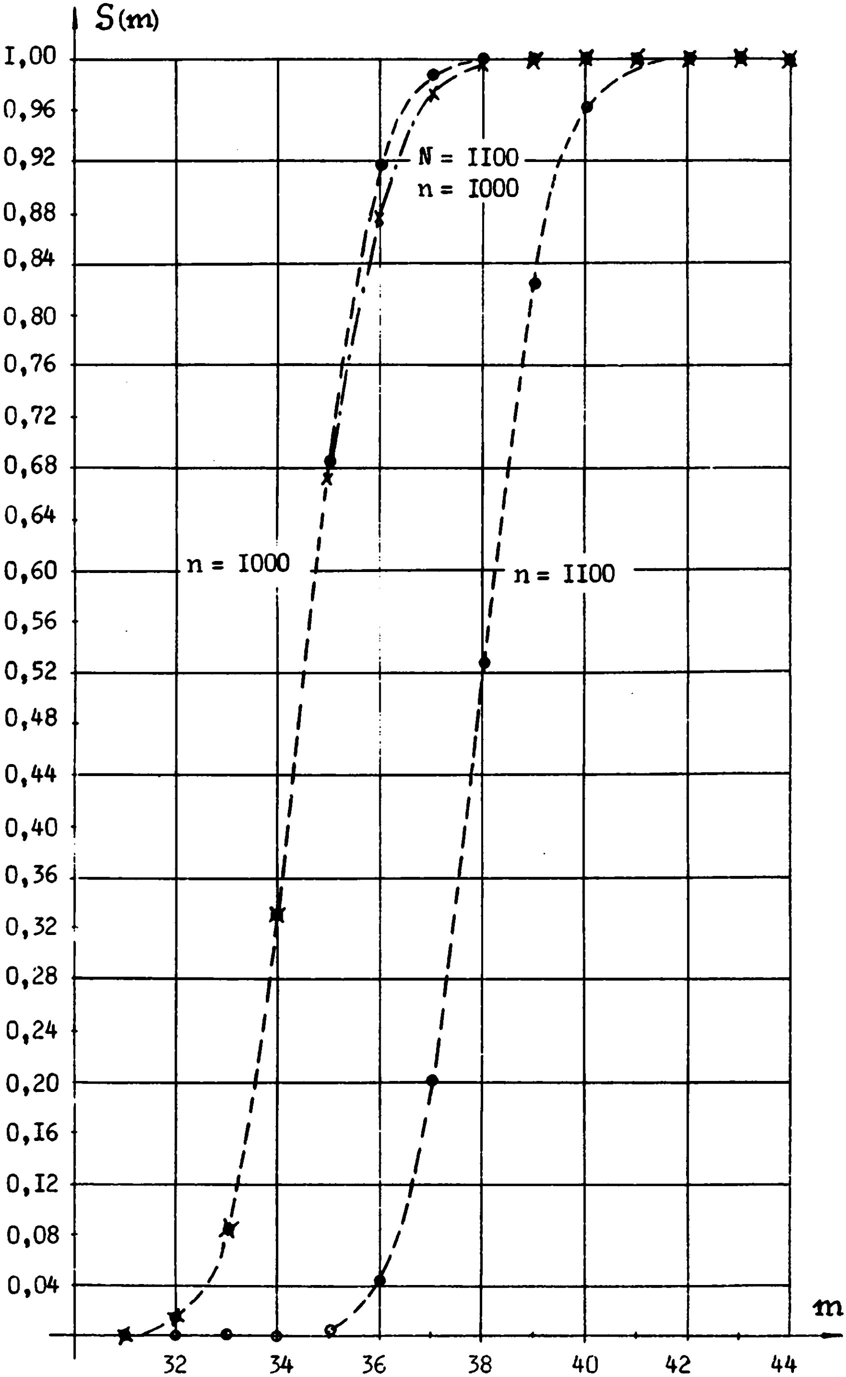
S(m)
I,00
0,96
0,92
0,88
0,84
0,80
0,76
0,72
0,68
0,64
0,60
0,56
0,52
0,48
0,44
0,40
0,36
0,32
0,28
0,24
0,20
0,I6
0,I2
0,08
0,04
N = II00
n = I000
n = I000
n = II00
m
32
34
36
38
40
42
44

Рис. 2.

для расчета коэффициента готовности УВС высокой производительности простыми формулами (I.3) и (I.4).

ЛИТЕРАТУРА

I. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение (в печати).

2. А.Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. М.,Физматгиз, 1963.

3. Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. Математические методы в теории надежности. М.,Изд-во "Наука",1965.

4. О.В. Щербаков. Математические вопросы оценки надежности цифровых вычислительных машин.- Кибернетику на службу коммунизму. М.-Л., Изд-во "Энергия", 1964, т.2,стр.218-227.

5. Э.В. Евреинов. Теоретические основы построения вычислительных сред.- Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1965, вып.16,стр. 3-72.

6. Э.В. Евреинов, Г.П. Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222".- Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966,вып. 23, стр.13-20.

7. В.Г. Хорошевский. Некоторые вопросы надежности однородных универсальных вычислительных систем.- Вычислительные системы, Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966, вып.23, стр.69-90.

8. В.Г. Хорошевский, Э.Г. Хорошевская. Оценка надежности однородных универсальных вычислительных систем с учетом восстановления.- Тезисы докладов IX областной научно-технической конференции, посвященной дню радио.Секция вычислительной техники. Новосибирск,1966, стр.7-8.