ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ОДНОРОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

В.Г.Хорошевский

(Новосибирск)

П о д в р е м е н е м п е р е к л ю ч е н и я в однородной универсальной вычислительной системе (УВС) [I] будем понимать время, которое тратится на то, чтобы исправная резервная элементарная машина (ЭМ) приступила к решению задачи вместо отказавшей ЭМ из основной группы.

Пусть n ЭМ системы образуют основную группу, а $(N-n)$ машин - нагруженный резерв. Считается, что в УВС имеется $1 \leqslant m \leqslant N$ абсолютно надежных восстанавливающих устройств.

Будем предполагать, что время безотказной работы, время восстановления и время переключения распределены по экспоненциальным законам соответственно с интенсивностями λ, μ, ν. Допущенные предположения близки к истине [2,3].

Требуется определить основные характеристики надежности рассматриваемой УВС.

Обозначим через P_{ij} в е р о я т н о с т ь того, что в стационарном режиме i машин находятся в состоянии отказа и j машин переключаются, причем $(i + j) \leqslant N$.

С помощью известных методов теории массового обслуживания [3,4,5] наиболее просто вычисляются вероятности P_{ij} для двух нижеследующих случаев.

<u>Случай I. $m = 1$.</u> Этот случай может иметь место в сосредоточенных однородных УВС [I].

Справедлива следующая система линейных алгебраических урав-

нений:

$$\left.\begin{aligned}
&1\le i\le N-n-1,\quad 1\le j\le n-1,\\
&-N\lambda P_{00}+\mu P_{10}+\nu P_{01}=0,\\
&-(N\lambda+j\nu)P_{0j}+\mu P_{1j}+(j+1)\nu P_{0,j+1}=0,\\
&-(N\lambda+n\nu)P_{0n}+\mu P_{1n}=0,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu]P_{i0}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,0}+\mu P_{i+1,0}+\nu P_{i,1}=0,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu+j\nu]P_{ij}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,j}+\mu P_{i+1,j}+\\
&\qquad+(j+1)\nu P_{i,j+1}=0,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu+n\nu]P_{in}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,n}+\mu P_{i+1,n}=0,\\
&-(n\lambda+\mu)P_{N-n,0}+(n+1)\lambda P_{N-n-1,0}+\nu P_{N-n,1}=0,\\
&-(n\lambda+\mu+j\nu)P_{N-n,j}+(n+1)\lambda P_{N-n-1,j}+\mu P_{N-n+1,j-1}+\\
&\qquad+(j+1)\nu P_{N-n,j+1}=0,\\
&-(\mu+n\nu)P_{N-n,n}+(n+1)\lambda P_{N-n-1,n}+\mu P_{N-n+1,n-1}=0,\\
&N-n+1\le i\le N-i,\quad 1\le j\le N-n-1,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu]P_{i0}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,0}+\nu P_{i1}=0,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu+j\nu]P_{ij}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,j}+\mu P_{i+1,j-1}+\\
&\qquad+(j+1)\nu P_{i,j+1}=0,\\
&-[\mu+(N-i)\nu]P_{i,N-i}+(N-i+1)\lambda P_{i-1,N-i}+\mu P_{i+1,N-i-1}=0,\\
&-\mu P_{N0}+\lambda P_{N-1,0}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

Для УВС $1/\nu$ является малой величиной, поэтому P_{ij} естественно искать в виде

$$P_{ij}=\sum_{k=0}^{\infty}a_{ijk}\,1/\nu^{k}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в систему (I) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях $1/\nu$, для a_{ijk} получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&-N\lambda a_{00k}+\mu a_{10k}+a_{0,1,k+1}=0,\\
&-[(N-i)\lambda+\mu]a_{i0k}+(N-i+1)\lambda a_{i-1,0,k}+\mu a_{i+1,0,k}+\\
&\qquad+a_{i,1,k+1}=0,\\
&\qquad 0<i<(N-n),
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\left[(N-i)\lambda+\mu\right]a_{i0k}+(N-i+1)\lambda a_{i-1,0,k}+a_{i,1,k+1}=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (N-n)\leqslant i<N,\\
&-\mu a_{N0k}+\lambda a_{N-1,0,k}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&ja_{0jk}=-N\lambda\sum_{l=1}^{k-1}a_{0,l,k-1}+\mu\sum_{l=j}^{k-1}a_{1,l,k-1},\\
&ja_{ijk}=-\left[(N-i)\lambda+\mu\right]\sum_{l=j}^{k-1}a_{i,l,k-1}+(N-i+1)\lambda\sum_{l=j}^{k-1}a_{i-1,l,k-1}+\\
&\qquad+\mu\sum_{l=j}^{k-1}a_{i+1,l,k-1}\,; \qquad 0<i<(N-n),\\
&ja_{ijk}=-\left[(N-i)\lambda+\mu\right]\sum_{l=j}^{k-1}a_{i,l,k-1}+(N-i+1)\lambda\sum_{l=j}^{k-1}a_{i-1,l,k-1}+\\
&\qquad+\mu\sum_{l=j}^{k}a_{i+1,l-1,k-1}\,, \qquad (N-n)\leqslant i<N.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$a_{ijk}=0$, если хотя бы один индекс меньше 0.

$$\left.\begin{aligned}
&a_{ijk}=0 &&\text{при}\quad k<j,\\
&a_{ikk}=0 &&\text{при}\quad i<(N-n),\quad k>0,\\
&a_{ikk}=\mu^k/k!\;a_{i+k,0,0} &&\text{при}\quad (N-n)\leqslant i,\quad k>0.
\end{aligned}\right\}\quad(4^*)$$

Подставляя в (3) вместо $a_{i,1,k+1}$ выражение (4) и прибавляя к каждому уравнению предыдущее, получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-(N-i)\lambda a_{i0k}+\mu a_{i+1,0,k}+c_{i,1,k+1}=0, \qquad 0\leqslant i<N,\\
&-\lambda a_{N-1,0,k}+\mu a_{N,0,k}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

где

$$c_{i,1,k+1}=-(N-i)\lambda\sum_{l=1}^{k}a_{ilk}+\mu\sum_{l=1}^{k}a_{i+1,l,k}\,, \qquad 0\leqslant i\leqslant(N-1). \qquad (5^*)$$

Из (5) следует, что

$$a_{i0k} = \frac{N!}{(N-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i} a_{00k} - \sum_{r=0}^{i-1} \frac{(N-r-1)!\,\lambda^{(i-1-r)}}{(N-i)!\,\mu^{(i-r)}} c_{r,1,k+1} \quad (6)$$

$$0 < i \leq N .$$

Легко показать справедливость следующих равенств:

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} a_{ij0} = 1, \qquad \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} a_{ijk} = 0, \quad k > 0. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) находим

$$\left.\begin{aligned} a_{000} &= \left[1 + \sum_{l=1}^{N} \frac{N!}{(N-l)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l}\right]^{-1}, \\ a_{00k} &= \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{i-1} \frac{(N-r-1)!\,\lambda^{(i-r-1)}}{(N-i)!\,\mu^{(i-r)}} c_{r,1,k+1} - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} a_{ijk}\right] a_{000}, \quad k > 0. \end{aligned}\right\} (8)$$

Из (4), (5'), (6), (8) видно, что получено рекуррентное соотношение для a_{ijk} по k.

Случай 2. $m = N$. Данный случай имеет место в распределенных однородных УВС [I] .

Рассуждения, аналогичные для случая I, приводят к следующим результатам:

$$ja_{ijk} = -\left[(N-i)\lambda + i\mu\right] \sum_{l=j}^{k-1} a_{i,l,k-1} +$$

$$+ (N-i+1)\lambda \sum_{l=j}^{k-1} a_{i-1,l,k-1} + (i+1)\mu \sum_{l=j}^{k-1} a_{i+1,l,k-1}, \quad (9)$$

$$0 \leq i < (N-n),$$

$$j a_{ijk} = -\left[(N-i)\lambda + i\mu\right] \sum_{l=j}^{k-1} a_{i,l,k-1} +$$

$$+ (N-i+1)\lambda \sum_{l=j}^{k-1} a_{i-1,l,k-1} + (i+1)\mu \sum_{l=j}^{k} a_{i+1,l-1,k-1}, \quad (9)$$

$$(N-n) \leq i < N,$$

$a_{ijk} = 0$, если хотя бы один индекс меньше 0.

$$\left.\begin{array}{lll} a_{ijk} = 0 & \text{при} & k < j, \\ a_{ikk} = 0 & \text{при} & i < (N-n), \quad k > 0, \\ a_{ikk} = \binom{i+k}{k}\mu^k a_{i+k,0,0} & \text{при} & (N-n) \leq i, \quad k > 0. \end{array}\right\} \quad (9^*)$$

$$a_{i0k} = \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i a_{00k} - \sum_{r=0}^{i-1} \frac{(N-r-1)!\; r!\; \lambda^{(i-r-1)}}{(N-i)!\; i!\; \mu^{(i-r)}} c_{r,1,k+1}, \quad (10)$$

$$0 < i \leq N.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{00k} = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{i-1} \frac{(N-r-1)!\; r!\; \lambda^{(i-r-1)}}{(N-i)!\; i!\; \mu^{(i-r)}} c_{r,1,k+1} - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{k} a_{ijk}\right] a_{000}, \quad k > 0, \\ a_{000} = \left[1 + \sum_{l=1}^{N} \binom{N}{l}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l\right]^{-1}. \end{array}\right\} \quad (11)$$

$$c_{i,1,k+1} = -(N-i)\lambda \sum_{l=1}^{k} a_{ilk} + (i+1)\mu \sum_{l=1}^{k} a_{i+1,l,k}, \quad (12)$$

$$0 \leq i < N-1.$$

Из (9) - (I2) видно, что имеется рекуррентное соотношение для a_{ijk} по k.

Вероятность того, что в стационарном режиме i ЭМ находятся в состоянии отказа, то есть

$$P_i = \bar{\Delta}(i-N+n) \sum_{j=0}^{n} P_{ij} + \Delta(i-N+n) \sum_{j=0}^{N-i} P_{ij},$$

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Зная P_i, легко определить коэффициент готовности [5], математическое ожидание и дисперсию числа отказавших ЭМ и т.д.

Стационарная функция надежности равна

$$R(t) = P\{\xi > t\},$$

где ξ - момент первого отказа системы в стационарном режиме; $P\{\xi > t\}$ -вероятность события $\xi > t$.

Обозначим через $P_i\{\xi > t\}$ условную вероятность того, что отказ системы произойдет после момента времени t, если i машин находятся в состоянии отказа.

Тогда

$$R(t) = \sum_{i=0}^{N-n} P_i P_i\{\xi > t\}.$$

Случай I.

$$P_i\{\xi > t\} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^l}{l!} e^{-\mu t} \sum_{r=0}^{N-n-i+1} \frac{[(N-i)\lambda t]^r}{r!} e^{-(N-i)\lambda t}.$$

Случай 2.

$$P_i\{\xi > t\} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\mu t)^l}{l!} e^{-i\mu t} \sum_{r=0}^{N-n-i+1} \frac{[(N-i)\lambda t]^r}{r!} e^{-(N-i)\lambda t}.$$

Стационарная функция невосстановимости равна

$$V(t) = P\{\eta > t\},$$

где η -момент восстановления отказавшей системы (в стационарном режиме).

Обозначим через $P_i\{\eta > t\}$ условную вероятность события $\eta > t$ в предположении, что в системе i ЭМ находятся в состоянии отказа. Тогда

$$V(t) = \sum_{i=N-n+1}^{N} P_i \; P_i\{\eta > t\}.$$

Случай I.

$$P_i\{\eta > t\} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(N-i)\lambda t]^l}{l!} e^{-(N-i)\lambda t} \sum_{r=0}^{i-1-N+n+1} \frac{(\mu t)^r}{r!} e^{-\mu t}.$$

Случай 2.

$$P_i\{\eta > t\} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[(N-i)\lambda t]^l}{l!} e^{-(N-i)\lambda t} \sum_{r=0}^{i-1-N+n+1} \frac{(i\mu t)^r}{r!} e^{-i\mu t}.$$

Для вычислительной системы "Минск-222" [6] при $N=16$ стационарные функции надежности $R(t)$ и восстановимости $U(t)=1-V(t)$ (без учета времени переключения) при различных значениях n для $m = 1$ изображены соответственно на рис.I и рис.2, а для $m = 16$ - на рис.3 и рис.4. Видно, что при небольшом резерве УВС "Минск-222" имеет достаточно высокую надежность.

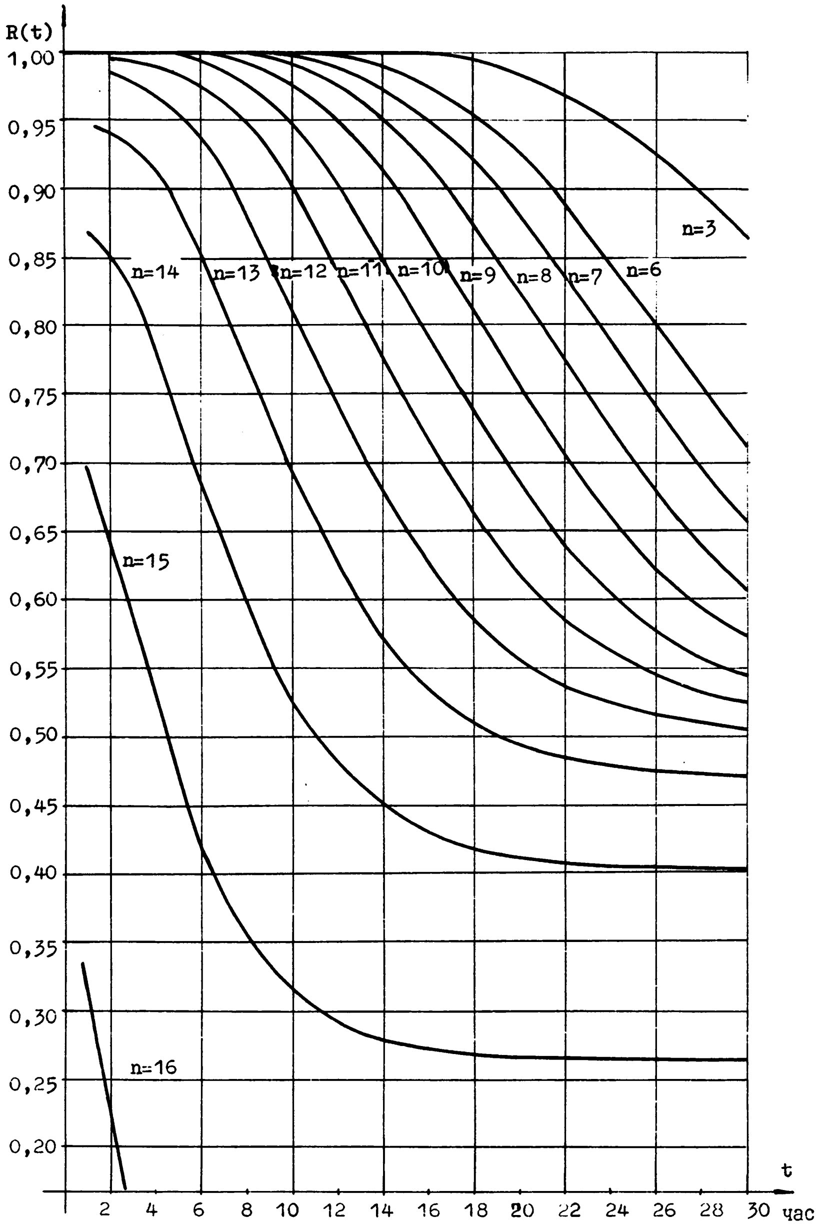
R(t)
1,00
0,95
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,55
0,50
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
n=3
n=14
n=13
n=12
n=11
n=10
n=9
n=8
n=7
n=6
n=15
n=16
t
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
час

Рис. I.

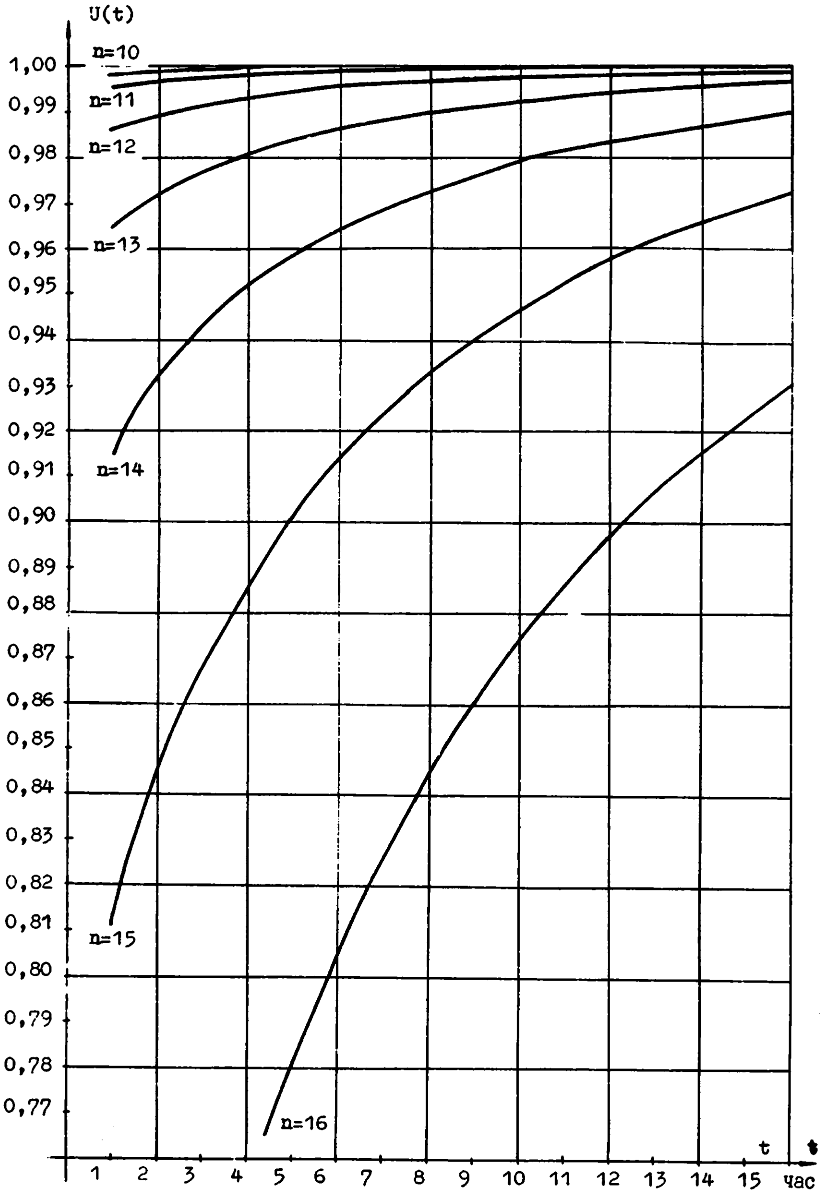
U(t)
1,00
0,99
0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,93
0,92
0,91
0,90
0,89
0,88
0,87
0,86
0,85
0,84
0,83
0,82
0,81
0,80
0,79
0,78
0,77
n=10
n=11
n=12
n=13
n=14
n=15
n=16
t
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 час

Рис. 2

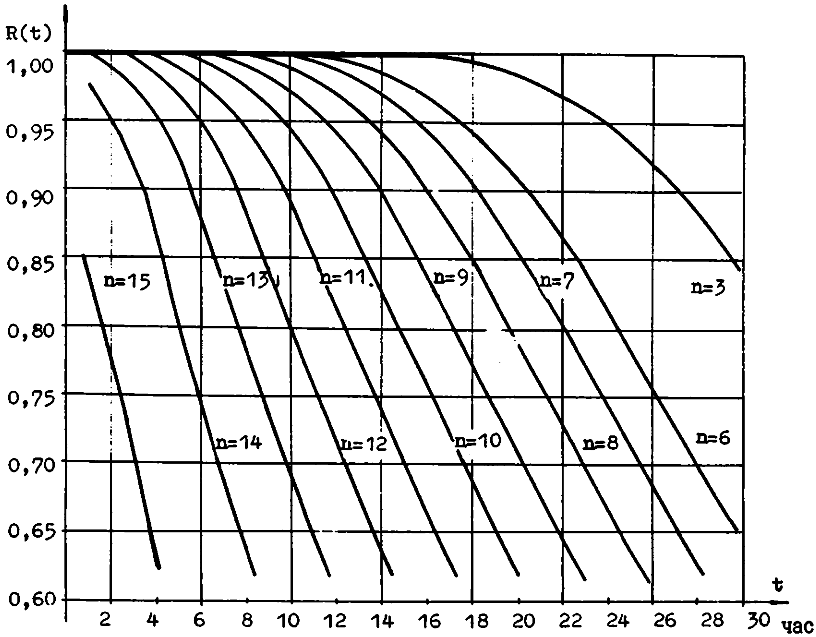
R(t)
1,00
0,95
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
n=15
n=13
n=11
n=9
n=7
n=3
n=14
n=12
n=10
n=8
n=6
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
t
час

Рис. 3

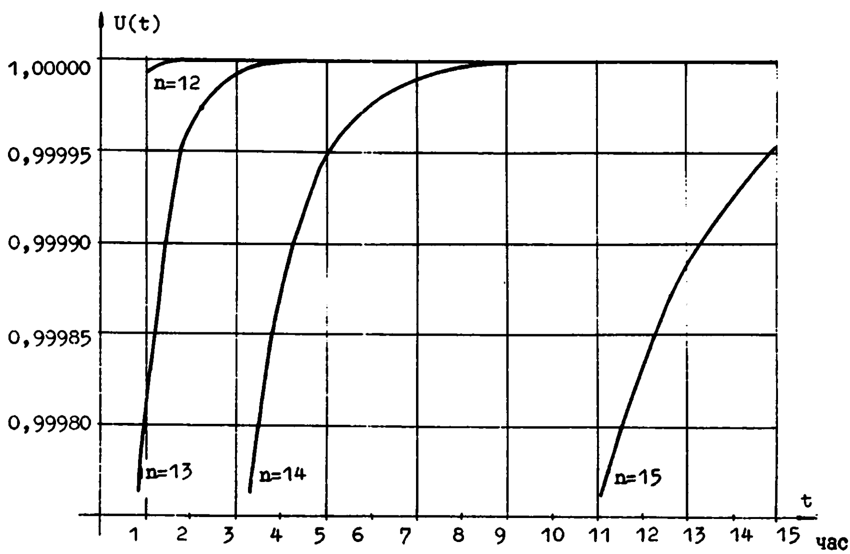
U(t)
1,00000
0,99995
0,99990
0,99985
0,99980
n=12
n=13
n=14
n=15
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
t
час

Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

I. Э.В.Евреинов, Ю.Г.Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы. Новосибирск, Изд-во "Наука" (в печати).

2. О.В.Щербаков. Математические вопросы оценки надежности цифровых вычислительных машин.- Кибернетику на службу коммунизму. М.-Л.,Изд-во "Энергия", 1964,т.2, стр. 218-227.

3. В.А.Ивницкий. Об одной задаче теории резервирования с переключением.- Кибернетику на службу коммунизму.М.-Л., Изд-во "Энергия", 1964, т.2, стр.153-159.

4. А.Я.Хинчин. Работы по математической теории массового об - служивания. М.,Физматгиз, 1963.

5. Б.В.Гнеденко, Ю.К.Беляев, А.Д.Соловьев. Математические методы в теории надежности. М.,Изд-во "Наука", 1965.

6. Э.В.Евреинов, Г.П.Лопато. Универсальная вычислительная система "Минск-222".- Вычислительные системы, Ново - сибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966, вып.23, стр.13-20.