УДК.681.142.352.3

СГЛАЖИВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Л.М. Кузьмина
(Рига)

Одной из задач первичной обработки информации является фильтрация или "сглаживание" измерительной информации. Под "сглаживанием" понимается выделение полезного сигнала из его смеси с шумом. "Сглаживание" измерительной информации особенно актуально при экспресс-измерениях, когда процесс проходит быстро во времени и нельзя провести несколько измерений в одной точке, а, следовательно, применить усреднение. Другой пример необходимости "сглаживания" - наличие лишь одной-двух реализаций измерений параметра, многократное измерение которого недопустимо по условиям опыта.

Пусть на вход фильтра поступает аддитивная смесь полезного сигнала и шума:

$$y(t) = x(t) + \xi(t) \tag{I}$$

Далее, полагаем, что полезному сигналу соответствует кусочно-полиномиальная модель, то есть на разных отрезках времени он описывается полиномами с разными коэффициентами и

различными степенями. Шум имеет среднее значение равное нулю. Известный метод средневзвешенных использует при сглаживании все значения измерений с одинаковыми весами, что приводит к большим ошибкам, если модель процесса не есть константа.

Метод экспоненциального сглаживания

Метод экспоненциального сглаживания использует исходные данные с весами, убывающими по экспоненциальному закону. Простейшая формула экспоненциального сглаживания имеет вид:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1 - \alpha)\, S_{t-1}(y) , \qquad (2)$$

где $0 \le \alpha \le 1$ – коэффициент сглаживания, а S_t – оператор экспоненциального сглаживания, выражаемый через наблюденные значения следующим образом:

$$S_t(y) = \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j\, y_{t-j} + (1 - \alpha)^t\, y_0 . \qquad (3)$$

Из (2) видно, что чем больше α, тем меньше учитываются предыдущие результаты измерений (меньшее сглаживание). Для кратного сглаживания определим n-ый порядок оператора:

$$S_t^n(y) = S\,[S_t^{n-1}(y)] = \alpha S_t^{n-1}(y) + (1 - \alpha) S_t^n(y) , \qquad (4)$$

где

$$S_t^0(y) = I y_t = y_t .$$

Рассмотрим простейший случай, когда модель процесса – медленно меняющаяся функция, т.е. её можно разбить на интервалы, где она постоянна:

$$y(t) = x(t) + \xi(t), \qquad (5)$$

где

$$x(t) = a.$$

Известно, что если имеется последовательность независимых измерений $n(t)$ с дисперсией δ_n^2, а каждое значение m определяется как линейная комбинация $n(t)$ с некоторыми весами w_k, то дисперсия δ_m^2 равна:

$$\delta_m^2 = \delta_n^2 \sum_{k=0}^{N} w_k^2 . \quad (6)$$

При экспоненциальном сглаживании $w_k = \alpha(1-\alpha)^k$, подставив значение w_k в (6), получим оценку для дисперсии сглаженных значений (при условии, что модель процесса есть константа):

$$\delta^2 = \delta_\xi^2 \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) . \quad (7)$$

Если шум коррелирован, то оценка (7) умножается на дополнительный член, зависящий от автокорреляционной функции шума.

Пусть модель процесса - полином степени n:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n , \quad (8)$$

тогда согласно фундаментальной теореме экспоненциального сглаживания (3) коэффициенты полинома (8) выражаются в виде линейной комбинации экспоненциально сглаженных величин до (N+1) порядка включительно.

В этом случае

$$y_{сгл}(t) = a_0 = [I - (I - S)^{N+1}]_t(y) . \quad (9)$$

Оценка для дисперсии сглаженных значений получается аналогично вышеописанной. Пример: если модель процесса - прямая:

$$x(t) = a + bt,$$

то

$$y_{сгл}(t) = a = 2S_t(y) - S_t^2(y) \quad (10)$$

и

$$\delta^2_{сгл} = \frac{\alpha\,(1 + 4\,\beta + 5\beta^2\,)}{(1 + \beta)^3}\,\delta^2_\xi$$

где

$$\beta = 1 - \alpha\ .$$

На машине "Днепр" была проведена сравнительная оценка следующих методов сглаживания:

I) скользящей средней,

2)разностные методы (4-ые разности, метод Родса),

3) сглаживание рядом Фурье,

4) экспоненциальное сглаживание.

Последний метод дал наилучшее отношение $\dfrac{\delta^2_{сгл}}{\delta^2_\xi}$, которое приблизительно равнялось 5-6 и превосходило оценку для других методов в I,5 ÷ 2 раза. Оптимальное α для сильно зашумленных кривых лежало в пределах 0,0I ÷ 0,I, менее зашумленных – 0,I ÷ 0,4. Оптимальное α зависит от вида кривой, в результате чего невозможно его определение по эталонному сигналу. Метод экспоненциального сглаживания удобен для реализации на ВМ. Если модель процесса – полином n -ой степени, то на каждом шаге сглаживания требуется хранить в памяти (n + 1) значение, в то время как при сглаживании методом наименьших квадратов требуется (2n + 1) значений. Недостаток этого метода в том, что он применим только к последовательностям равноотстоящих, равноточных измерений. В настоящее время ведутся поиски методов для сглаживания неравноотстоящих и неравноточных измерений с помощью нелинейной фильтрации. В основе нелинейной фильтрации лежит идея Л.В. Канторовича [I] о новом подходе к задачам обработки результатов наблюдений. Последний заключается в следующем: полученную в результате измерений систему уравнений выписывают с учетом погрешностей в форме неравенств:

$$y_i - \delta \le \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, t_k \le y + \delta \qquad \text{(II)}$$

$$i = 1,2,\dots,m$$

и методами линейного программирования разыскивают возможные границы для $x(t)$. Этот подход был применен для построения

нелинейного фильтра сглаживания. Предположим, что статистические свойства шума нам неизвестны, кроме условия, что ограничен по амплитуде и область его возможных значений симметрична.

Пусть модель измеряемого процесса есть полином n-ой степени:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n \qquad (12)$$

тогда результаты измерений $y(t_i)$, полученные в моменты времени t_i должны лежать в области, ограниченной неравенствами:

$$y(t_i) - \delta \leq a_0 + a_1 t_i + \ldots + a_n t_i^n \leq y(t_i) + \delta \qquad (13)$$
$$i = 1, 2, \ldots, m,$$

где δ – максимальное по модулю возможное значение шума. Если шум не превосходит δ, то система неравенств (13) не противоречива и определяет некоторую конечную область. За оценку коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n брались координаты центра тяжести области, определяемой неравенствами (13). Последняя определялась с помощью симплекс-метода. Подобный фильтр для процесса, модель которого – константа, рассмотрен [2]. Нами ведутся исследования по применению данного фильтра к сглаживанию спектральных кривых.

Однако здесь встречается трудность, заключающаяся в том, что зашумлены не только значения функции, но и сам аргумент. Следующим этапом в разработке методов сглаживания является поиск методов, ведущих сглаживание по нескольким зашумленным координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сибирский математический журнал, т. II, № 5, 1962 г.
2. Радиотехника, № 12, 1966 г.
3. Brown R.G., Mayer R.F. "The fundamental theorem of exponential smoothing". Operation Research, 1963, vol.11, N 3.