

СОВМЕСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХЕМЫ

Е.И. Беляев
(Новосибирск)

Известно, что процесс проектирования интегральной схемы (ИС) обладает замкнутостью: для расчета оптимальных электрических параметров ИС необходимо знание её физико-технологических характеристик (разбросы параметров, перегрев, интенсивность отказов), точное установление которых возможно лишь после полного изготовления и испытания ИС.

Предлагается практический графоаналитический метод замкнутой оптимизации параметров простой ИС, основанный на совместном решении электрических и технологических уравнений. Метод допускает широкую сферу применения. В работе, как частный случай, производится оптимизация по минимуму габаритов компонента при заданной надежности ИС (что целесообразно, например, при оптимизации параметров пассивных компонент). Применение метода может служить предварительным этапом для сокращения объема походной статистики и времени итеративного процесса при последующем решении задачи на ЭЦМ.

Отметим, что при отрыве электротехнического расчета ИС от разработки технологии потенциальный оптимум технических данных ИС, вообще говоря, не достигается.

I. Последовательность процесса оптимизации ИС

1⁰. Схема задается в виде принципиальной электрической конфигурации с наложенными требованиями логической функциональности (инвертор, НЕ-И, НЕ-ИЛИ, триггер, соединение) разветвления по входу и выходу ($N_{вх}$, $N_{вых}$), надежности (Q_0), срока службы (T_0).

2⁰. Изучение принципа работы и предварительные электротехнические (нестатистические) расчеты позволяют составить электрическое описание схемы в следующей форме:

a - входной электрический параметр;

$\delta = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{min}}$ - диапазон его изменения, допустимый по условиям работоспособности схемы;

E - напряжение питания;

y - выходной электрический параметр, значение которого служит показателем работы схемы (обычно - какие-либо характеристики выходного сигнала);

$y = f(a, \delta, E)$ - функция схемы, определяемая её электрической конфигурацией;

$$D_y(y) = D(a, \delta, E) = 0 \quad (1)$$

- граница области работоспособности в пространстве параметров схемы;

$$V = V(a, \delta, E) \quad (2)$$

- значение электрической нагрузки компонента (напряжение, ток, мощность) в рабочем состоянии схемы.

3⁰. Изучение технологического процесса, физических свойств компонента и условий работы системы дают физико-технологическое описание ИС:

$\Phi (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ - номинальные неслучайные параметры техпроцесса: геометрия компонента, материал, режимы изготовления.

При этом далее считаем произвольно перестраиваемой только геометрию компонента $\gamma (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, а остальные параметры - фиксированными.

$P\left(\frac{a}{\Phi, V}\right)$ - условный закон распределения параметра a ;

$\lambda = \lambda(t, \Phi, V)$ - интенсивность отказов компонента;

$T^0 = T^0(\Phi, V)$ - температурная характеристика компонента.

4°. Цель проектирования - оптимальное сочетание геометрических параметров ИС γ , удовлетворяющей исходным требованиям (п. 1°).

Критерий оптимизации при этом вводится в виде некоторой функции этих параметров $- \Phi(\gamma)$ - имеющей смысл производительности, стоимости или - в нашем случае - габаритов (например, - площадь: $\Phi = \sum \gamma_i \gamma_j$, объем: $\Phi = \sum \gamma_i \gamma_j \gamma_k$).

5°. Для удобства практического решения задачи примем допущение, что входной параметр a можно представить в виде суммы фиксированной и случайной величин:

$$a = a_0(1 + \eta). \quad (3)$$

Здесь a_0 - минимальное при всех условиях производства и работы компонента значение параметра a ; η - его случайное относительное приращение вследствие несовершенства технологии (γ) и действия электрической нагрузки V .

Распределение $p(a/\Phi, V)$ определяет однозначную функциональную (не корреляционную) зависимость:

$$a_0 = a_0(\gamma) \quad (4)$$

и распределение величины η :

$$p\left(\frac{\eta}{\Phi, V}\right) = p\left[\frac{a_0(\gamma)(1 + \eta)}{\gamma, V(a_0(\gamma), E)}\right] = p\left(\frac{\eta}{\gamma E}\right). \quad (5)$$

Следует отметить, что такое допущение приводит к некоторому отклонению от потенциального оптимума ИС, ибо содержит элемент расчета на худший случай: считается, что часть деталей в процессе работы схемы сохраняет минимальное значение a_0 параметра a , не потребляя мощности и не подвергаясь взаиморазогреву; распределение температуры по ИС не учитывается. Строго говоря, a_0 наряду с η должно быть также случайной величиной.

При практическом графоаналитическом проектировании ИС на заданную надежность Q_0 желательно избежать полного построения функции $p\left(\frac{\eta}{\Phi, V}\right)$. С этой целью физико-технологическое описание компонента приводится к Q_0 - процентным доверитель-

ным границам величины η [7,8], т.е. таким значениям ϵ в пространстве $[\gamma, E]$ что неравенство $\eta \leq \epsilon$ удовлетворяется с вероятностью Q_0 .

Уравнение Q_0 - процентных границ, согласно общепринятой методике теории надежности [6], представляется в виде:

$$Q(\epsilon, \gamma, E) = Q_1(\epsilon, \gamma, E) Q_2(\gamma, E) = Q_0 \quad (6)$$

где Q_1 - вероятность того, что величина η не превысит значение ϵ под действием несовершенства технологии и перегрева:

$$Q_1(\epsilon, \gamma, E) = \int_0^{\epsilon} \rho\left(\frac{\eta}{\gamma E}\right) d\eta. \quad (7)$$

Q_2 - вероятность отсутствия внезапного отказа компонента:

$$Q_2(\gamma, E) = \exp \left[- \int_0^{\tau_0} \lambda(t, \gamma, \Phi) dt \right]. \quad (8)$$

Типичный вид Q_0 - процентных границ представлен на рис. I.

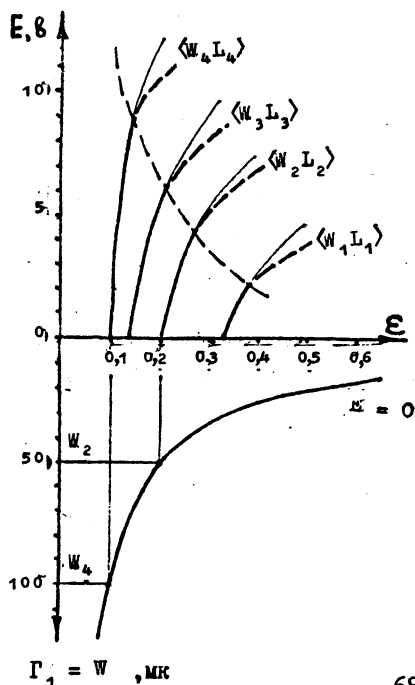


Рис. I.

Q_0 - процентные границы для тонкопленочного титанового сопротивления:

$W_1 = 30 \text{ мк}, L_1 = 6 \text{ мм},$

$W_2 = 50 \text{ мк}, L_2 = 10 \text{ мм},$

$W_3 = 75 \text{ мк}, L_3 = 15 \text{ мм},$

$W_4 = 100 \text{ мк}, L_4 = 20 \text{ мм}.$

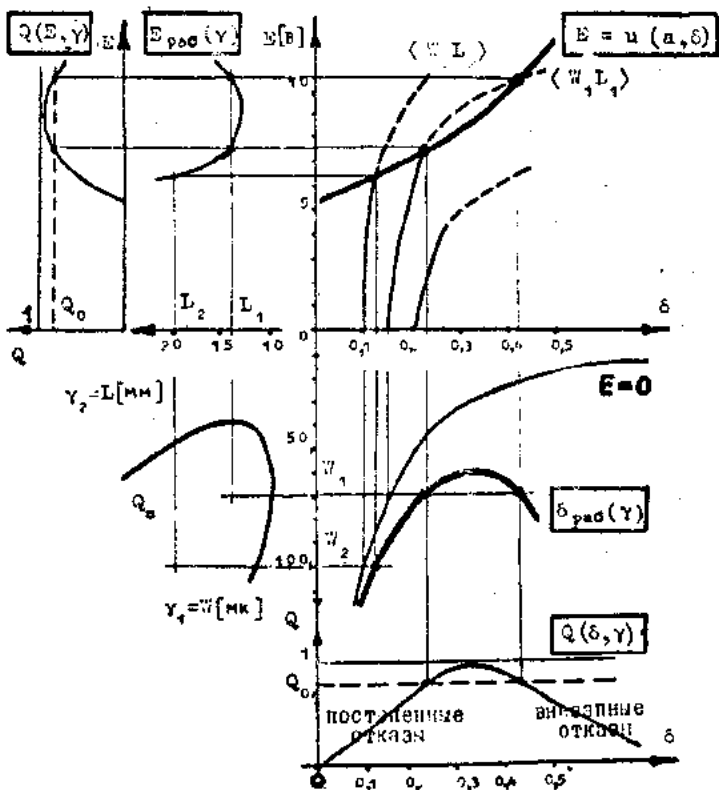


Рис. 2. Совместное решение уравнений Q - процентных границ с уравнениями схемы.

В плоскости $[\epsilon, E]$ (при $\gamma = \text{const}$) форма кривых определяется при малых E - перегревом, при больших E - перегревом и внезапными отказами совместно.

В плоскости $[\epsilon, \gamma]$ (при $E = \text{const}$, в частности, при $E = 0$) вид границ определяется физическими факторами, снижающими точность параметра при уменьшении габаритов компонента (флуктуации размеров, поверхностные явления, локальные дефекты и т.п.) [1,2].

7°. Работоспособность описанного таким способом компонента в исходной принципиальной схеме обуславливается выполнением неравенства

$$\epsilon \leq \delta \quad (9)$$

в рабочем состоянии ИС.

Следовательно, полным для нашей задачи описанием ИС может служить система, состоящая из уравнения принципиальной электрической схемы (I) и уравнений экспроцесса (4), (6) с подстановкой (9):

$$D(a, \delta, E) = 0 \quad \text{или} \quad z = U(a, \delta), \quad (I)$$

$$\delta = \epsilon(\gamma, E) \quad \text{или} \quad \lambda(\epsilon, \gamma, E) = Q_0, \quad (IO)$$

$$a_0 = a_0(\gamma). \quad (4)$$

Подчеркнем важную физическую тенденцию зависимости (I) (рис.2, квадрант $[\delta, E]$): рост δ - допустимого диапазона изменения входного параметра - для сохранения условий работоспособности требует увеличения напряжения питания E [3-5].

Совместное решение составленной системы дает интересную характеристику:

$$Q[\delta, U(a_0(\gamma), \delta), \gamma] = Q_0 \quad (II)$$

или

$$\delta = \epsilon[U(a_0(\gamma), \delta), \gamma], \quad (IIa)$$

которую назовем $\delta_{\text{раз}}(\gamma)$. Ее физический смысл: разброс δ возникающий в данной конструкции γ при подаче в эту конструк-

цию питания, необходимого для обеспечения работоспособности схемы при этом значении разброса.

В этом определении и в форме записи (IIa) ясно проявилось вышеупомянутое "замыкание", свойственное процессу проектирования микроэлектронных схем.

Зависимость (II) есть также Q_0 - процентная граница ухода параметра a , но не в исходном состоянии компонента (в отличие от выражения (6), рис. I внизу), а в рабочем, что вызывает принципиальную особенность её формы: минимум размера γ (рис. 2, квадрант $[\delta, \gamma]$). Видим, что увеличение расчетного разброса сверх некоторого значения требует увеличения габаритов деталей вместо кажущейся (судя по зависимости (6), рис. I) возможности их уменьшения (один из несложных "парадоксов" конструирования в микроэлектронике: изготовление менее точной ИС оказывается задачей более сложной).

Физически это явление объясняется необходимостью улучшения теплоотвода при возросших (согласно (I)) уровнях питания.

Отсюда следует важный в задачах оптимизации ИС вывод: расчетный разброс сам должен быть предметом расчета, а не задаваться извне, как это имеет место в технике дискретных компонент.

Описанное физическое явление отразилось и в кривой $Q(\delta, \gamma)$ (II) (рис. 2, внизу). Рост расчетного разброса сначала вызывает повышение надежности схемы, а затем её снижение благодаря перегреву и повышению интенсивности внезапных отказов.

В практических расчетах последняя зависимость может принести пользу, ибо построение Q_0 - процентной границы (6) с учетом внезапных отказов затруднительно.

Решению уравнений (I), (4), (IO) можно придать вид:

$$Q[\theta(a_0(\gamma), E), E, \gamma] = Q_E(E, \gamma) = Q_0 \quad (I2)$$

или

$$E = U[a_0(\gamma), c(E, \gamma)] \quad (I2a)$$

где $\theta(a, E) = \delta$ - просто иная форма записи выражения (I).

Зависимость (I2a) по аналогии с (IIa) назовем $E_{\text{раб}}(\gamma)$. По физическому смыслу - это питание E , необходимое для обеспечения работоспособности данной конструкции γ при разбросе, возникающем в ней под действием этого питания.

Отмечаем и в этой зависимости проявление вышеупомянутого "замыкания", а также наличие минимума размеров на кривой (I2) и максимума надежности на характеристике (I2), легко объяснить теми же физическими соображениями.

Запись совместного решения уравнений (I), (4), (IO) в форме (I2) представляется весьма естественной. Действительно, γ и E являются при нашем подходе единственными свободными (первичными) параметрами, и результат проектирования следует ожидать в виде некоторого наложенного на них условия (в нашем случае - условия надежности).

8°. Задача оптимизации ИС при этом заключается в нахождении экстремума критерия $\Phi(\gamma)$ (см. п. 4°) при условии (I2).

Лишняя переменная E , вносящая отличие от классической задачи условного экстремума, исключается с помощью дополнительного условия (см. приложение):

$$\frac{\partial Q_E}{\partial E} = 0. \quad (I3)$$

Физический смысл этого требования ясен: для обеспечения минимальных при заданной надежности габаритов ИС необходимо, чтобы заданное значение надежности являлось её частным максимумом по напряжению питания. В самом деле: противное означало бы возможность повышения надежности сверх значения Q_0 в ИС с данной конструкцией путем простого изменения питания E , т.е. наличие в данной конструкции запаса надежности, который физически мог образоваться только за счет запаса по габаритам.

В общем виде уравнения (I2) и (I3) описывают Q_0 -процентную границу области годных ИС в пространстве возможных конструкций. В частности, на рис. 2 уравнение (I3), тождественное условию $\frac{\partial Q_E}{\partial \gamma} = \infty$, описывает контур проекции области

(I2) на плоскость $[\gamma_1, \gamma_2]$. На этой границе, согласно приложению, и находится искомый экстремум некоторого критерия $\Phi(\gamma)$.

При графоаналитическом решении задачи учитываем, что условие (I3) соответствует в плоскости $[E, \gamma]$ касанию кривых (I) и (IO):

$$-\frac{\partial D/\partial E}{\partial D/\partial \delta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial E} \quad (14)$$

В самом деле, подстановка (I) в (6), (7) и затем в (13) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_E}{\partial E} &= \frac{\partial}{\partial E} \left(Q_0 \int_0^\delta \left(\frac{n}{\gamma E} \right) d\eta \right) = \\ &= Q_0 \left[\int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial E} d\eta + p \left(\frac{\delta}{\gamma E} \right) \frac{\partial D/\partial E}{\partial D/\partial \delta} \right] + \frac{\partial Q_0}{\partial E} \int_0^\delta p \left(\frac{n}{\gamma E} \right) d\eta = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

что, как нетрудно установить, совпадает с (14).

Требование касания кривых (I) и (IO) физически оправдано, ибо их пересечение (рис. 2, случай $\eta_1 L_1$) означало бы, что данная конструкция ИС допускает нестабильность величины E , т.е. обладает запасом по надежности, и, следовательно, по габаритам.

10⁰. Подведем краткий итог. Итак, процесс оптимизации ИС заключается в совместном решении уравнений, описывающих принципиальную электрическую схему (I), (2) с уравнениями, описывающими техпроцесс (4), (IO) при дополнительном требовании (13). С учетом того, что $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, система 5 уравнений (I), (2), (4), (IO), (13) с 4 + s неизвестными — a, δ, E, v, γ дает условие, наложенное на s неизвестных:

$$Q_s(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s) = Q_0. \quad (16)$$

При условии (16) классическими методами находится экстремум принятого критерия $\phi(\gamma)$.

Подчеркнем, что в итоге проектирования одновременно с конструктивными данными получаются оптимальные значения электрических параметров схемы: a, δ, E, v .

П р и м е р

В качестве примера рассмотрим расчет тонкопленочного сопоставления нагрузки R в переключательном каскаде на полевом триоде (рис. 3а).

Исходные данные:
Материал — титан.

Удельное сопротивление $R = 100 \frac{\text{ОМ}}{\text{КВ}}$ (при толщине 1000А).

Теплоемкость $c = 0,1+0,15 \frac{\text{МВТ}}{\text{град.мм}^2}$.

Интенсивность отказов λ - см. график (рис. 3в).

Заданная надежность $Q_0 = 0,99$.

Срок службы - 1000 час.

Погрешность изготовления масс $\Delta = 10 \text{ мк}$.

Известно, [11] что работа цепочки переключательных каскадов описывается передаточными характеристиками:

$$U = f_1(U_{\text{ВХ}}); \quad U_{\text{ВХ}} = f_2(U). \quad (\text{п.1})$$

Используя аналитические выражения характеристик полевого триода [12], запишем (см. рис. 3а)

$$\Delta U(U_{\text{ВХ}}, R, \delta, E) = \frac{1}{2} \frac{E - U_{\text{ВХ}}}{pRU_{\text{ВХ}}} + U_{\text{ВХ}} - (pU_{\text{ВХ}}^2 + I_0)R(1 + \delta), \quad (\text{п.2})$$

где $p = \frac{\partial^2 i}{\partial U_{\text{ВХ}}^2}$ и $I_0 = i|_{U_{\text{ВХ}}=0}$ - параметры триода, далее принятые фиксированными в состоянии худшего случая:

$$p_1 = p_{\text{max}} = 10 \frac{\text{мкА}}{\text{В}^2}; \quad p_2 = p_{\text{min}} = 6 \frac{\text{мкА}}{\text{В}^2}; \quad I_{01} = I_0 = 40 \text{мкА}; \quad I_{02} = 0.$$

Кроме того, в [2] обозначено $R = R_2$; $R(1 + \delta) = R_1$. Величину

$\Delta U_{\text{max}}(U_{\text{ВХ}}) = \Delta U_0(R, \delta, E)$, полученную из (п. 2) при условии

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial U_{\text{ВХ}}} = 0, \text{ удобно считать выходным параметром схемы.}$$

Работоспособность схемы, т.е. возможность передачи без затухания двух неперекрывающихся диапазонов напряжения, обуславливается пересечением передаточных характеристик:

$$\Delta U_0(R, \delta, E) \geq 0, \quad (\text{п. 3})$$

что и задает область $D(1)$ в пространстве $[R, \delta, E]$ (рис.3б). Электрический режим компонента (2) упрощенно выразим в форме:

$$V(R, \delta, E) = P = \frac{E^2}{R}. \quad (\text{п. 4})$$

Затем переходим к технологическому описанию сопротивления.

Ясно, что в нашем случае $\gamma_1 = W$ - ширина, $\gamma_2 = L$ - длина.

Выражение (4) примет вид:

$$a_0(\gamma) = R_0 = R_{\text{уд}} \frac{L}{W}, \quad (\text{п. 5})$$

(напомним, что R_0 - величина неслучайная).

Далее строим распределение $\rho(\eta)$ (5). Учитывая соображения п. 5⁰, признаем оптимальным по трудоемкости построения и точности результата приближенное распределение

$$\rho(\eta) = \rho\left(\frac{R_1 - R_2}{R_0}\right), \quad (\text{п.6})$$

где R_1, R_2 - случайные значения сопротивлений, распределение которых $p(R_1) = p(R_2)$ (одинаковое для обоих R) известно из опыта.

Отметим, что форму (п.6) мы предпочли теоретически точному, но сложному для построения закону $\rho\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)$, а также простому, но слишком грубому и дающему завышенные результаты при проектировании закону $\rho\left(\frac{R_1 - R_0}{R_0}\right)$.

Закон (п.6) принципиально несложно строится по обычным правилам композиции законов распределения двух случайных величин R_1 и R_2 [7].

Построение гистограммы величины $\Delta = R_1 - R_2$ приведено на рис. 4. В качестве ячейки (разряда) результирующей гистограммы выбрана площадь между двумя соседними диагональными линиями. Распределения $p(R_1)$ и $p(R_2)$ приняты некоррелированными.

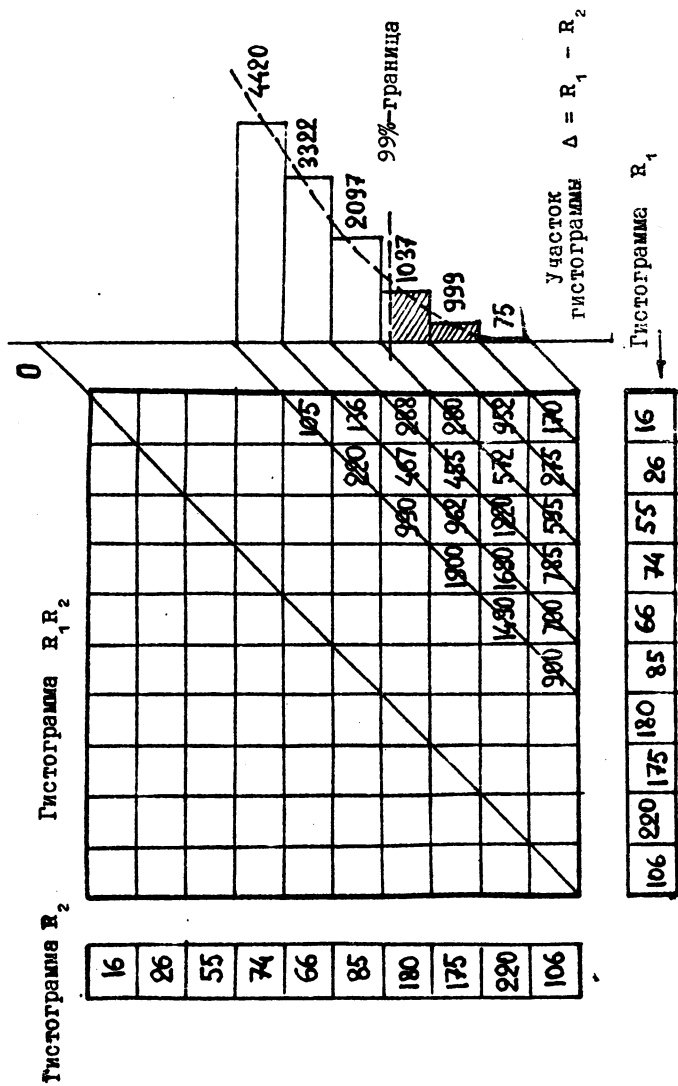
По причинам, изложенным в п.6⁰, распределение $\rho(\eta)$ полностью не строим. Кроме того, отметим, что оно будет симметричным (в отличие от законов $p(R_1)$, $p(R_2)$, по которым оно построено).

Закон (п.6) описывает исходный технологический разброс; что касается перегрева, то будем считать, что под его действием кривая $\rho(\eta)$ расширяется на величину $\alpha \Delta T^0$, где ΔT^0 находится по мощности рассеяния, геометрии и физическим характеристикам титановой пленки, приведенным в исходных данных.

Вторая составляющая надежности - Q_2 - в соответствии с (8) у нас рассчитывается по упрощенной формуле:

$$Q_2 \approx 1 - \lambda T_0, \quad (\text{п.7})$$

где λ зависит от режима, конструкции и свойств пленки (рис. 3в).



Полученное распределение $\rho(\eta)$ в сочетании с (п.7) дает возможность построить 99-процентные границы, вид которых для различных геометрий представлен в квадранте $[P, \delta]$ на рис. 5 кривыми $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}, \epsilon_{14}$, а также в квадранте $[\delta, W]$ кривой ϵ_0

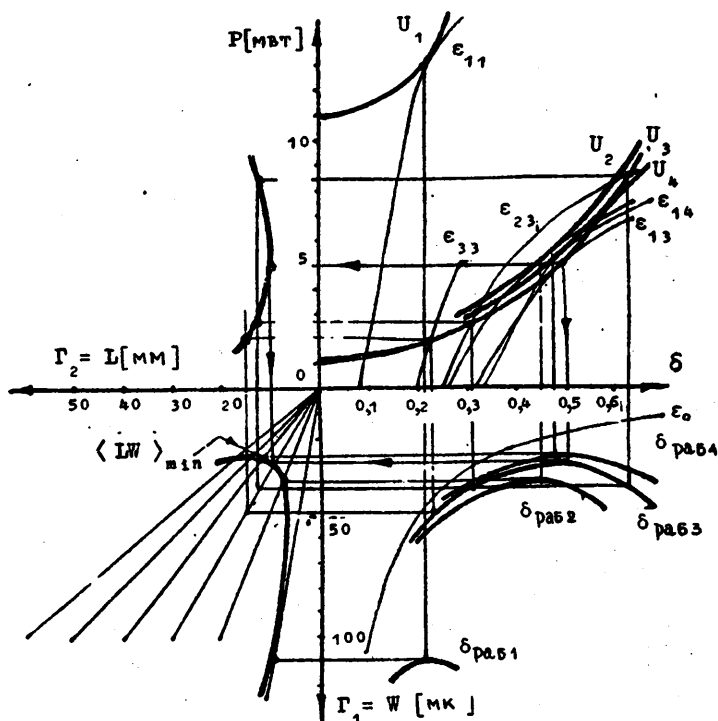


Рис. 5. Графоаналитический расчет сопротивления в схеме рис. 3а.

В том же квадранте $[P, \delta]$ кривые U_1, U_2, U_3, U_4 представляют собой совместное решение уравнений (п.3), (п.4), описывающих схему и не относящихся к технологии.

Производя совместное графическое решение уравнений:

U_1 и ϵ_{11} построенных для $R_{10} = 10$ ком;

U_2 и ϵ_{12} построенных для $R_{20} = 20$ ком;

U_3 и $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{33}$ построенных для $R_{30} = 30$ ком;

U_4 и ϵ_{14} построенных для $R_{40} = 40$ ком;

получаем, согласно описанному в п. 7 - зависимости $\delta_{\text{раб}1}(\gamma)$, $\delta_{\text{раб}2}(\gamma)$, $\delta_{\text{раб}3}(\gamma)$, $\delta_{\text{раб}4}(\gamma)$ (соответственно), а также область рабочих точек схемы в пространстве геометрий $[L, W]$ в соответствии со значениями $[L, W]$, для которых были построены ϵ -линии.

Согласно соображениям п. 9, граница указанной области (на которой и находится решение) образуется теми значениями геометрий, для которых ϵ -линии касаются соответствующих U -линий (на чертеже - ϵ_{11} (110 мк x 10 мм), ϵ_{12} (38 мк x 7 мм), ϵ_{13} (30 мк x 9 мм), ϵ_{14} (26 мк x 13 мм).

Критерий оптимизации - в нашем случае площадь

$$\Phi(\gamma) = LW, \quad (\text{п.8})$$

как легко видеть из чертежа, при ϵ_{13} принимает минимальное значение; последнее автоматически определяет и остальные расчетные параметры.

Результат расчета

$R = 30$ ком; $P = 5$ мвт; $E = 12$ в; $W = 30$ мк; $L = 9$ мм; $\delta = 0,5$ (причем $\delta = \delta_0 + \delta_T$, $\delta_0 = 0,33$, $\delta_T = 0,17$. Здесь δ_0 - исходный технологический разброс: δ_T - уход под действием мощности рассеяния).

Выводы:

1. В интегральной технике возможна оптимизация схем по методике условного экстремума, ибо электрические параметры и допустимые режимы компонент являются непрерывными функциями параметров техпроцесса.

2. Параметры техпроцесса целесообразно использовать в качестве входных (первичных). В их пространстве рассчитывается граница области годных ИС (далее служащая условием опти-

мизации) и задается в виде функции критерий оптимизации (производительность, стоимость, габариты).

3. Конечный результат расчета ИС получается в виде оптимального по принятому критерию сочетания параметров техпроцесса. Как следствие - определяются оптимальные значения электрических параметров, исходных и рабочих разбросов и напряжения питания.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

При оптимизации электронных схем может представить интерес задача нахождения экстремума функции в переменных:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (I')$$

при условии, изложенном на ($s + I$) переменную:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n, \zeta) = Q_0. \quad (2')$$

Покажем, что искомый экстремум достигается при дополнительном условии:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \quad (3')$$

Для исходной задачи можно записать обычную систему $(n+1)$ уравнений по методу Лагранжа с неопределенным множителем α :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 0, \quad (4')$$

Исключением α сводим систему (5) к системе β уравнений:

$$\frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial x_s} - \frac{\partial Q / \partial x_1}{\partial Q / \partial x_s} = 0, \quad (5')$$

Введем обозначения:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_s, \zeta) = Q_s;$$

$$\frac{\partial Q / \partial x_{i-1}}{\partial Q / \partial x_s} = \frac{\partial Q / \partial x_{i-1}}{\partial Q / \partial x_s} = Q_j(x_1, x_2, \dots, x_s) = Q_j;$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = Q'_{j1}; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \zeta} = Q'_{j\zeta},$$

в соответствии с которыми запишем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & \dots & Q'_{1s} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & \dots & Q'_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q'_{s1} & Q'_{s2} & \dots & Q'_{ss} \end{vmatrix} \quad \dots \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & \dots & Q'_{1\zeta} & \dots & Q'_{1s} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & \dots & Q'_{2\zeta} & \dots & Q'_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q'_{s1} & Q'_{s2} & \dots & Q'_{s\zeta} & \dots & Q'_{ss} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Здесь Δ - функциональный определитель (якобиан) системы (5), Δ_1 - определитель, полученный из Δ заменой i -го столбца столбцом из членов $-Q'_{j\zeta}$.

Из физических соображений можем считать, что наша исходная задача имеет решение, т.е. якобиан Δ не обращается тождественно в нуль в допустимой области значений переменных.

Известно [13], что при этом система (5') неявно задает s непрерывных функций переменной ζ

$$x_{10}(\zeta), x_{20}(\zeta), \dots, x_{s0}(\zeta), \quad (7')$$

имеющих непрерывные производные, которые выражаются через определители (6') формулами Крамера:

$$\frac{dx_{10}}{d\zeta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \quad (8')$$

Функции (7') задают для каждого значения ζ свое значение условного экстремума функции (1') в виде новой функции:

$$\varphi_0(\zeta) = \varphi[x_{10}(\zeta), x_{20}(\zeta), \dots, x_{s0}(\zeta)], \quad (9')$$

полная производная которой имеет вид:

$$\frac{d\varphi_0}{d\zeta} = \sum_1 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_{10}} \cdot \frac{dx_{10}}{d\zeta}. \quad (10')$$

Ясно, что решением исходной задачи является абсолютный экстремум этой функции, необходимый по обычному условию:

$$\frac{d\phi_0}{d\zeta} = 0. \quad (II')$$

Подставляя (8') и (10') и используя уравнения (4') получим:

$$\frac{d\phi_0}{d\zeta} = \frac{-\alpha \sum_1^s Q'_{1i} \cdot \Delta_i}{\Delta}. \quad (I2')$$

С учетом выражений (6') нетрудно заметить, что сумма в числителе (I2') представляет собой определитель (s+1)-ого порядка:

$$\sum_1^s Q'_{1i} \cdot \Delta_i = - \begin{vmatrix} 0 & Q'_{11} & Q'_{12} \dots Q'_{1s} \\ Q'_{1\zeta} & Q'_{11} & Q'_{12} \dots Q'_{1s} \\ Q'_{2\zeta} & Q'_{21} & Q'_{22} \dots Q'_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots \\ Q'_{s\zeta} & Q'_{s1} & Q'_{s2} \dots Q'_{ss} \end{vmatrix} \quad (I3')$$

Разлагая полученный определитель по членам I-го столбца и учитывая, что I-я и 2-я строки его начиная со второго члена одинаковы - получим:

$$\sum_1^s Q'_{1i} \cdot \Delta_i = - Q'_{1\zeta} \cdot \Delta. \quad (I4')$$

Подставляя (I4') в (I2') видим, что условие (3') при наличии дополнительных уравнений (5') эквивалентно условию (II'), что и требовалось доказать.

Тем самым исходная задача (I') и (2') в сочетании с условием (3') сводится к классической задаче условного экстремума.

Идентичными приемами результат легко обобщается на случай произвольного числа m дополнительных переменных

$$\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m.$$

Но при этом вопрос существования экстремумов функций Φ, Φ_0, Q и их характера относительно друг друга в общем виде не решается и требует специального исследования для каждой конкретной задачи.

Л и т е р а т у р а

1. J.Wallmark, A.Marcus. Минимальные размеры и максимальная плотность упаковки полупроводниковых устройств без избыточности, Труды ИРИ, т. 49, № 3, 1960.
2. А.А. Колосов, Ю.И. Горбунов, Ю.Е. Наумов. Полупроводниковые твердые схемы. М., 1965.
3. J.Suran. Проблемы микроразмерных устройств. Труды ИРИ, т. 50, № 3, 1962.
4. J.Suran. Effect of circuit design on system reliability.- IRE Transactions on RQC-10, N 3, 1960.
5. P.Becker, R.Warr. Reliability & Component tolerances in microelectronics.- Proc. IEEE, 1963, vol.51, N 9.
6. В.А. Луцкий. Расчет надежности и эффективности радиоэлектронной аппаратуры. Киев, 1960.
7. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., 1950.
8. L.Ragone. Метод проектирования интегральных схем. Труды ИИЭР, т. 52, № 12, 1964.
9. В.Murphy. Оптимальный размер и стоимость интегральных схем (там же).
10. К.А. Ивуду. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. М.-Л., 1966 г.
11. В.П. Панферов. О надежности работы элементов ЭЦВМ в статическом режиме. Вопросы радиоэлектроники, УП, 1965, вып. 3.
12. G.Wright. Solid State Electronics, v.7, № 2, p. 167, 1964.
13. Г.М. Фихтенгольц. Основы дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М.-Л., 1947.