

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРАНЗИСТОРА ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ

*А.В. Николаев, Г.М. Паратов, Г.С. Шульгина*  
(Москва)

Расчет транзисторных схем, работающих на большом сигнале, может дать обоснованные рекомендации к их построению. Но обычно он трудно выполним аналитически и требует применения современных методов расчета (например, метода математического моделирования) и средств выполнения этих расчетов (например, ЭЦВМ). Применение таких методов и средств позволит, учитывая их возможности, поставить и решить ряд неразрешимых ранее задач и в связи с этим потребует уделить более тщательное внимание вопросам их математической постановки и математическому моделированию структуры схемы, ее активных и пассивных компонентов.

С появлением интегральной электроники функции технологов и схемотехников во многом становятся неразделимыми, что требует создания единого подхода к расчету интегральных схем, связывающему требования к ним непосредственно с требованиями к технологическим и структурным параметрам активных и пассивных компонентов. В этом случае анализ физических процессов и электрических показателей интегральной схемы, очевидно, сведется к решению на ЭЦВМ общей математической модели всей схемы, куда будут входить модели транзисторов, диодов и пассивных компонентов [7].

Вопросам разработки различных моделей транзистора посвящено большое количество работ [1,2,3,4] и др. . Все предложенные модели транзистора являются частным случаем так называемой математической модели, в основе которой лежат соотношения (I), описывающие поведение носителей в полупроводниковом материале, и уравнения p-n переходов.

Непосредственное использование математической модели возможно лишь в самых простых случаях при анализе процессов, происходящих в триоде, обособленном от схемы (случай генератора тока или генератора напряжения, действующего на его входе).

Даже расчет статики транзисторного ключа связан с решением системы трансцендентных уравнений, которое трудно выполнить вручную.

Математически процесс переноса заряда неосновных носителей в базе полупроводникового триода описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных (математическая модель).

Для плотности дырочного тока:

$$j_p = q \cdot \mu_p \cdot p \cdot E - q \cdot D_p \nabla p ,$$

для плотности электронного тока:

$$j_n = q \cdot \mu_n \cdot n \cdot E + q \cdot D_n \nabla n ,$$

уравнение непрерывности для дырок

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \nabla j_p - \frac{1}{\tau_p} (p - p_n) , \quad (I)$$

уравнение непрерывности для электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \nabla j_n + \frac{1}{\tau_n} (n - n_p) ,$$

где  $q$  - заряд электрона;

$\mu_p, \mu_n$  - подвижности дырок и электронов;

$\tau_p, \tau_n$  - время жизни дырок и электронов.

Только трудности аналитического решения этих уравнений привели к появлению большого числа моделей транзистора, которые отличаются друг от друга лишь степенью сделанных допущений и этапом, на котором они вводятся.

Подробный анализ применяющихся моделей, их сходства и отличия приведен в статье группы американских авторов [6].

Модель Эберса-Молла [2] представляет коэффициенты передачи по току транзистора в прямом и инверсном направлении  $\alpha_N$  и  $\alpha_I$  как однополюсные функции от оператора  $S$ , что эквивалентно использованию двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\alpha_N(s) = \frac{\alpha_N}{1 + s\tau_{\alpha_N}}; \quad \alpha_I(s) = \frac{\alpha_I}{1 + s\tau_{\alpha_I}} \quad (2)$$

В модели Бофуа-Спаркса [3] (модель управления зарядом) зависимость заряда от пространственных координат устраняется путем интегрирования плотности заряда неосновных носителей по объему базы:

$$\frac{d}{dt} \int q_p(x,t) dv = \int \nabla j_p dv - \frac{1}{\tau_p} \int q_p(x,t) dv, \quad (3)$$

$$\frac{dQ_\delta(t)}{dt} = -I_\delta(t) + Q_\delta(t) : \tau_p,$$

где  $Q_\delta(t)$  — интегральный заряд в базе.

В модели Динвилла [4] пространственные переменные устраняются путем применения метода конечных разностей по пространственной координате вдоль базы. Диффузионное уравнение для  $k$ -той точки базы запишется:

$$s_k \frac{dp_k}{dt} = H_{dk} \cdot (p_{k-1} - p_k) - H_{dk+1} \cdot (p_k + p_{k+1}) - \\ - H_{ck} p_k + H_{ck} p_n, \quad (4)$$

где

$$H_{dk} = \frac{q \cdot s \cdot D_p}{h_k},$$

$$S_k = q \cdot s \cdot (h_{k+1}/2 + h_k/2),$$

$$H_{ok} = \frac{q \cdot s}{\tau_p} \cdot (h_{k+1}/2 + h_k/2).$$

$h_k$  — шаг по базе.

Каждая модель описывается двумя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Это существенное упрощение исходной задачи, так как теперь, зная форму входного

сигнала, задавшись определенным режимом, можно при помощи операторного исчисления найти форму сигнала на выходе транзистора. Однако для этого, как говорилось, надо знать функцию  $i(t)$  или  $u(t)$ . Если же входной сигнал приложен не непосредственно к базе транзистора, а к другим элементам схемы, или транзистор является нагрузкой себе подобного, то в этом случае даже запись граничных условий в силу специфики построения упрощающих моделей становится затруднительной, а в некоторых случаях (модель Эберса-Молла, зарядная модель) — невозможной. Преимущества, связанные с применением операторного исчисления, также кончатся, как только мы переходим к реальным схемным граничным условиям, которые содержат нелинейные элементы (вольт-амперная характеристика перехода) и в общем случае зависят от решения самого дифференциального уравнения.

Так что применение более простых моделей не избавляет от необходимости идеализировать граничные условия триода, что приводит к изолированному его рассмотрению от схемы. Такая идеализация не всегда оправдана.

Например, для цепочки инверторов, связанных последовательно, при включении первого транзистора идеальным перепадом тока в цепи базы второго транзистора будет протекать инверсный ток сложной формы. Эффект воздействия первого транзистора на второй не может быть сведен ни к случаю генератора тока, ни к генератору напряжения. Ошибка, получаемая при чисто условном использовании идеальных граничных условий, может быть очень большой в количественном отношении, не говоря уже о невозможности оценки качественного вида протекающих процессов.

Поэтому в настоящее время, когда цифровые вычислительные машины позволяют оперировать численными методами при расчете транзисторных схем, представляется разумным для анализа как их статики, так и динамики отказаться от применения той или иной упрощающей модели триода и перейти к непосредственному численному решению его математической модели.

Рассмотрим пример такого расчета для общего вида инвертора, имеющего напряжение питания  $E_k$ , сопротивление коллектора  $R_k$ , сопротивление базы  $R_b$ , омическое сопротивление база-эмиттер  $r_b$ , сопротивление тела коллектора  $r_k$ , тела эмиттера  $r_e$ .

Для решения уравнения запишем начальные и граничные условия, отражающие факт включения транзистора в схему.

Для входной и выходной цепей получим:

$$E_{cm} + u_{вх}(t) + I_{\delta}(t)(R_{\delta} + r_{\delta}) + \Phi_{\delta}(t) + I_{\delta}(t)r_{\delta} = 0 \quad (5)$$

$$E_k + I_k(t)(R_k + r_k) + \Phi_{\delta}(t) - \Phi_k(t) + I_{\delta}r_{\delta} = 0, \quad (6)$$

где  $\Phi_{\delta}(t)$ ,  $\Phi_k(t)$  - напряжения на эмиттерном и коллекторном переходах.

Пренебрегая электронной составляющей токов, имеем:

$$I_{\delta}(t) = -q D_p s \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (7)$$

$$I_k(t) = -q D_p s \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=w},$$

где  $D_p$  - коэффициент диффузии дырок,  
 $s$  - площадь эмиттерного перехода.

Учитывая, что

$$\Phi_{\delta}(t) = m \varphi_T \ln \left[ \frac{p(x,t)}{p_0} + 1 \right]_{x=0}; \quad (8)$$

$$\Phi_k(t) = m \varphi_T \ln \left[ \frac{p(x,t)}{p_0} + 1 \right]_{x=w}.$$

получим граничные условия (5) и (6) в виде:

$$\begin{aligned} E_{cm} + u_{вх}(t) + m \varphi_T \ln \left[ \frac{p(x,t)}{p_0} + 1 \right]_{x=0} - \\ - q D_p s (R_{\delta} + r_{\delta} + r_{\delta}) \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \\ + q D_p s (R_{\delta} + r_{\delta}) \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=w} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} E_k - q D_p s \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=w} \cdot (R_k + r_k) + \\ + m \varphi_T \ln \frac{p(x,t)|_{x=0} + p_0}{p(x,t)|_{x=w} + p_0} - \\ - q D_p s \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} \cdot r_{\delta} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные условия определяются распределением концентрации  $p(x,0)$  в стационарном режиме, которое является общим решением однородных уравнения системы (I) в одномерном случае:

$$p(x,0) = A_1 e^{\frac{x}{L_p}} + A_2 e^{-\frac{x}{L_p}} \quad (II)$$

Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  считаются известными. Начальное условие можно отыскать, пользуясь общим методом, изложенным ниже.

Если пренебречь электронной составляющей токов, то для чисто диффузионного транзистора уравнение переноса неосновных носителей запишется:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = - \frac{p(x,t)}{\tau_p} + D_p \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad (I2)$$

Окончательно задача сводится к решению уравнения (I2) с граничными условиями (9) и (I0).

Решение такой задачи в аналитическом виде невозможно из-за нелинейности граничных условий, хотя попытки ее решения для отдельных частных случаев предпринимались [8,9].

В настоящей работе используется численный метод решения на ЭЦВМ "Минск-22".

Разобьем ось времени на  $n$  интервалов, отстоящих друг от друга на  $\theta$ , и будем искать решения  $p(x, n\theta) = p_n$ . Последовательность решений  $p_n$  образует полное пространство. Поэтому при  $\theta \rightarrow 0$   $\{p_n\}$  сходится, и предельная форма последовательности будет решением уравнения (I2), которое запишется в виде:

$$D_p \cdot \frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta} \right) p_n = - \frac{p_{n-1}}{\theta} ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, n \quad (I3)$$

Это эквивалентно представлению уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений при введении замены  $p_n = p(x,t) + p(x,0)$ :

$$\begin{aligned} D_p \frac{d^2 p_1}{dx^2} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta} \right) p_1 &= 0 \\ D_p \frac{d^2 p_2}{dx^2} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta} \right) p_2 &= - \frac{p_1}{\theta} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (I4)$$

$$D_p \cdot \frac{d^2 p_n}{dx^2} - \left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta} \right) p_n = - \frac{p_{n-1}}{\theta} .$$

Покажем последовательность решения системы на примере двух уравнений. Для нахождения  $p_1$  ищем решение в виде:

$$p_1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}}{D_p} \cdot x \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}} \frac{x}{D_p}} \quad (15)$$

$$p_1 = c_{11} e^{\dots} + c_{21} e^{\dots}$$

где  $c_{11}$  и  $c_{21}$  находятся из системы трансцендентных уравнений, являющихся следствием граничных условий (9) и (10):

$$\begin{aligned} & E_{cm} + u_{вх}(\theta) + m \varphi_T \ln \left[ \frac{c_{11} + c_{21} + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{p_0} + 1 \right] - \\ & - q D_p s (R_\delta + r_\delta + r_g) \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} \cdot (c_{11} - c_{21}) + \\ & + q D_p s \cdot [(R_\delta + r_\delta) \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} (c_{11} e^{\sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} \cdot W} - \\ & - c_{21} e^{-\sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} \cdot W}) - \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{L_p} (R_\delta + r_\delta + r_g) + \\ & + \frac{\Delta_1 e^{\frac{W}{L_p}} - \Delta_2 e^{-\frac{W}{L_p}}}{L_p} (R_\delta + r_\delta)] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$E_z - q D_p \sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot (c_{11} e^{-c_{21} z} - \sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot W) - \sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot D_p \cdot W \cdot (R_z + z_k) +$$

$$m \phi_z \ln \cdot \frac{c_{11} + c_{21} + \Delta_1 + \Delta_2 + P_0}{\sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot W - \sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot W + \Delta_1 e^{-c_{21} z} + \Delta_2 e^{-c_{21} z} + P_0} \quad (17)$$

$$- \sqrt{\frac{1}{\tau_D} + \frac{1}{\theta}} \cdot q D_p \cdot z \cdot (c_{11} - c_{21}) + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{L_p} \cdot q D_p \cdot z \cdot z_0 -$$

$$- \frac{\frac{W}{L_p} - \frac{\Delta_1 e^{-c_{21} z}}{L_p}}{\frac{W}{L_p} - \frac{\Delta_1 e^{-c_{21} z}}{L_p}} \cdot q D_p \cdot (R_z + z_k) = 0$$



Для решения системы (16), (17) в выполненной работе использовались либо метод наискорейшего спуска [11], либо комбинированный метод Зайделя с итерацией Ньютона.

После нахождения  $p_1$  решалось уравнение для  $p_2$ .

Можно показать, что общее решение этого уравнения будет записываться в виде:

$$p_2 = \left( c_{12} - \frac{c_{11} \times \theta}{2D_p} \cdot \sqrt{\frac{D_p}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau_p}}} \right) e^{\sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} \cdot x} +$$

$$+ \left( c_{22} + \frac{c_{21} \times \theta}{2D_p} \cdot \sqrt{\frac{D_p}{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\tau_p}}} \right) e^{-\sqrt{\frac{\frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\theta}}{D_p}} \cdot x}, \quad (18)$$

где  $c_{12}$  и  $c_{22}$  находятся из системы, аналогичной уравнениям (16), (17), которая здесь ввиду ее громоздкости не приводится. Далее последовательно находятся  $p_3, p_4, \dots, p_n$ .

Конец вычислений определяется либо моментом, когда выходной сигнал достигал нового стационарного состояния, либо остановом машины после любого из шагов. Программа вычислений написана на специальном языке для машины "Минск-22". Во входные данные, которые вводились отдельно, были заложены величины всех номиналов, а также точность и величина шага по времени, что сделало программу универсальной и пригодной для расчета в принципе любых схем, построенных на базе инверторов.

С применением описанной методики был смоделирован переходный процесс при насыщении и запираании транзисторного ключа.

На рис. 1 вверху приведен процесс рассасывания неосновных носителей в базе транзистора, на вход которого через сопротивление  $R_g = 600 \Omega$  подается запирающий сигнал  $u = 2$  в. Внизу изображены картины нарастания коллекторного тока и спада коллекторного потенциала при введении транзистора в насыщение. Напряжение коллекторного питания  $U_k = 2$  в, сопротивление в цепи коллектора  $R_g = 880 \Omega$ . Расчет переходного процесса, укладывающегося в 200 нсек, занял на машине "Минск-22" 2 минуты машинного времени.

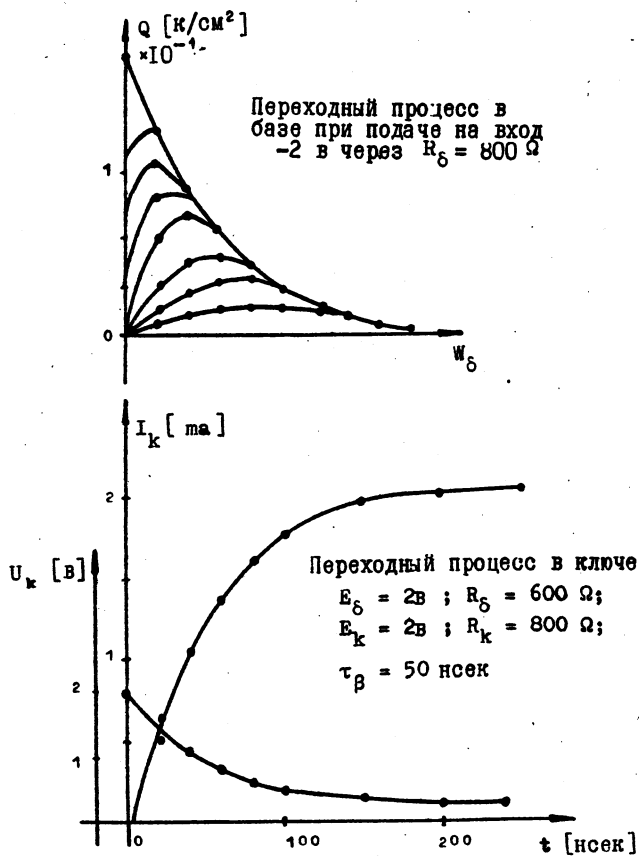


Рис. I.

Били смоделированы входные и выходные характеристики триодов при разных толщинах баз  $w_b$  разных равновесных концентрациях неосновных носителей  $p_n$  разных омических сопротивлений базы  $r_b$ . На рис. 2 изображены коллекторные характеристики транзистора при  $w_b = 1,5\mu$  и базовые характеристики при различных напряжениях на коллекторном переходе. Сдвиг входных характеристик влево вследствие насыщения увеличивает разброс параметров триода в ключевых схемах. Как показано в [10], его необходимо учитывать при расчете транзисторных логических схем. При применении излагаемой методики сдвиг входных характеристик триодов учитывается автоматически.

На рис. 3 показан вид переходной характеристики цепочки из двух инверторов. Верхние кривые соответствуют изменению коллекторного потенциала первого (Т1) и второго (Т2) транзистора при условии изменения входного сигнала, подаваемого на вход первого триода через сопротивление  $R_b$ . Видно, что на коллекторе нагруженного транзистора размах напряжений значительно меньше, и сама характеристика идет более полого, чем у ненагруженного триода. Внизу изображены картины коллекторных токов.

Программа позволяет производить расчет схемы при любых номиналах сопротивлений, источниках напряжений, любой форме входного сигнала, а также при любых структурных параметрах транзистора, таких как толщина фазы  $w_b$ , равновесная концентрация  $p_n$ , омическое сопротивление базы  $r_b$  и т.д., то есть характеризовать схему параметрами, понятными технологом.

Несмотря на то, что в работе мы ограничились моделированием диффузионного транзистора, методика может быть без видимых затруднений перенесена и на случай дрейфового транзистора.

## В ы в о д ы

1. Рассмотрено применение математической модели транзистора для расчета схем с помощью ЭЦВМ, когда входной сигнал, действующий на схему неидеализирован ни генератором тока, ни генератором напряжения.

2. Получены статические и динамические характеристики транзисторных схем для большого сигнала при различных структурных параметрах триода. Это позволяет связать требования к схе-

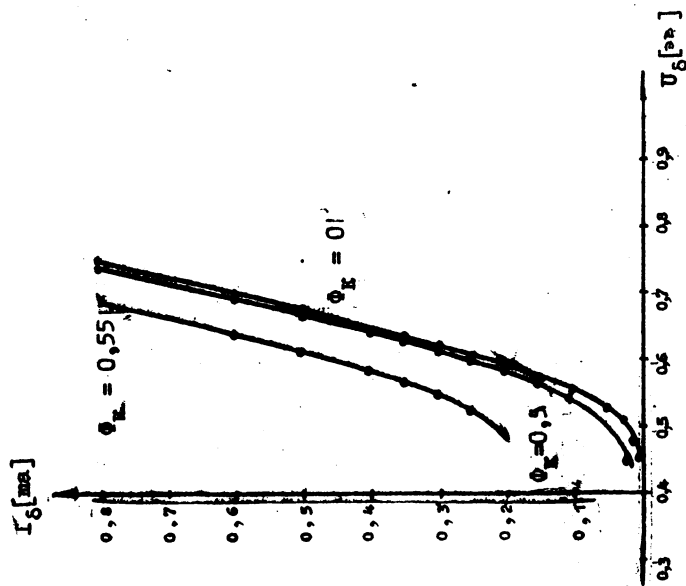
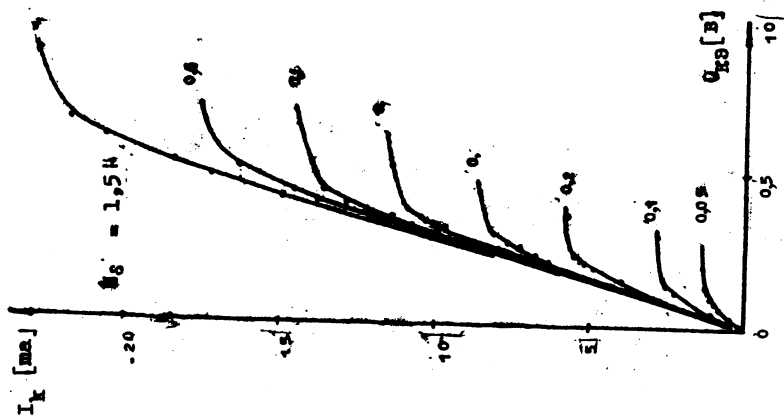


Рис. 2.

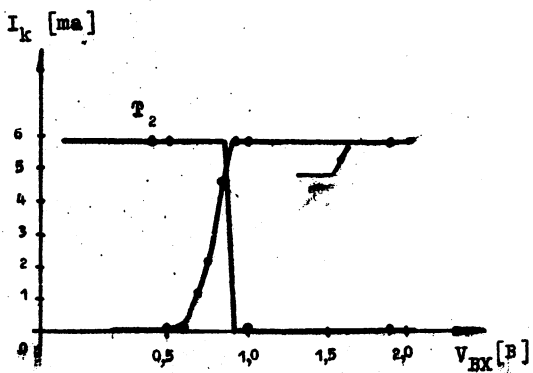
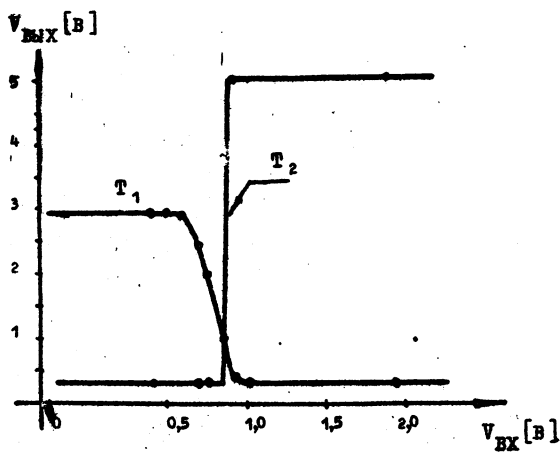


Рис. 3

мам с требованиями к технологическому процессу изготовления транзисторов, что особенно важно при проектировании интегральных схем, когда триод является элементом схемы и не может быть характеризован параметрами четырехполюсника отдельно от этой схемы.

3. Рассмотренный метод непосредственного использования математической модели транзистора дает возможность поставить и решить задачу анализа физических процессов и расчета электрических показателей сложных транзисторных схем. Это позволяет значительно расширить класс анализируемых схем и сократить сроки их проектирования.

4. Разработанная методика и программы расчета могут быть распространены для анализа статических и динамических характеристик других типов транзисторных схем.

### Л и т е р а т у р а

1. Т.М. Агаханян. Электронные ключи и нелинейные импульсные усилители. М., Сов. радио, 1966.
2. J.Ebers, L.Moll. Large signal behavior of junction transistors. - Proc.IRE, 1954,vol.43,December.
3. R.Beaufoy, J.J.Sparkes. The junction transistor as a charge - controlled device. - A.T.E.Journal,1957,vol.13, October.
4. G.Linvill. Lumped models of transistors and diodes.- Proc. IRE,1958,vol.46, June.
5. Т.М. Агаханян. Переходный процесс в транзисторном ключе при его записании. Сб. "Полупроводниковые приборы и их применение" под ред. Я.А.Седотова, вып. 10,1963.
6. D.J.Hamilton, F.A.Lindholm, J.A.Narud. Comparison of large signal models for junction transistors. - Proc. IRE,1964,vol.52,March.
7. W.Hochwald, K.P.McQuade, H.S.Scheffler. Computer simulation and analysis techniques for reliable circuit design. - Microelectr. and Reliability,1966,vol.5, May.
8. J.A.Narud, C.S.Meyer. Characterization of Integrated logic circuits. - Proc. IRE,1964,vol.52, December.

9. Г.М. Паратов. Расчет переходных процессов в схемах с непосредственной связью. Труды МИЭМ, вып. 2, 1966 г.
10. А.В. Николаев, Г.М. Паратов. К вопросу о статистическом методе расчета логических схем с непосредственной связью. Сб. "Полупроводниковые приборы и их применение" под ред. Я.А. Федотова, вып. 15, 1966 г.
11. Н.П. Жидков, И.С. Березин. Методы вычислений. ФМ, 1959 г.