УДК 681.142.4

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ПРИ АНАЛИЗЕ АЛГОРИТМОВ ЗАДАННОГО НАБОРА ЗАДАЧ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

С.Д. Пашкеев

(Москва)

При организации специализированных однородных вычислительных систем (ВС) для решения заданного набора задач (ЗНЗ) возникают вопросы, связанные с преобразованием алгоритмов ЗНЗ. В литературе по ВС обсуждается два направления преобразования алгоритмов для ВС – распараллеливание алгоритмов (см. например, [I]) с последующей параллельной их реализацией на ВС и разбиение последовательных алгоритмов на разнофункциональные участки (ввод, счет, вывод, см., например, [2]) с последующей совмещенной их реализацией на ВС.

В дальнейшем будем называть первое направление r-направлением, а второе – s-направлением мультипрограммирования (МП).

Возможности r и s – направлений зависят от характеристик как каждого алгоритма в отдельности, так и характеристик всего ЗНЗ.

В настоящей работе рассматривается подход к анализу алгоритмов, основанный на исследовании графов ЗНЗ.

Результатом исследования может быть выбор r или s-направления МП.

I. Качественный анализ r и s-направлений МП.

Рассмотрим тривиальный пример.

Пусть на ВС, состоящей из двух одинаковых вычислительных машин (ВМ), необходимо реализовать набор из четырех независимых и одинаковых по времени (τ_0) решения на одной ВМ задач. Допустим, что каждая из задач разбивается во времени на 3 равные части, так как это показано на рис. I.

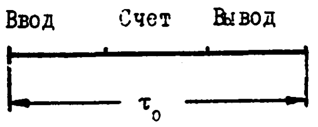


Рис. I

И пусть, каждая ВМ допускает совмещение счета с вводом и выводом разных задач. Тогда, нетрудно видеть, что r -направление МП обеспечит время решения ЗНЗ в рассматриваемом случае

$$\tau_r = \frac{4\tau_0}{2} = 2\tau_0;$$

s - направление обеспечивает в лучшем случае время (см. рис.2)

$$\tau_s = \tau_0 + \frac{\tau_0}{3} = \frac{4}{3}\tau_0 .$$

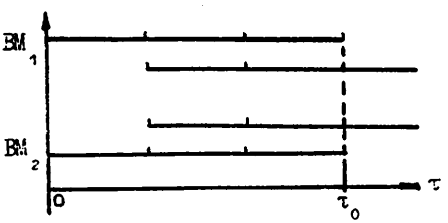


Рис.2

Однако, если те же алгоритмы оказываются сильно связными, то при прочих неизменных условиях

$$\tau_r = 2\tau_0$$

и

$$\tau_s = 4\tau_0 .$$

Если ни одна из задач совершенно не поддается распараллеливанию, то $\tau_r = 2\tau_0$, или, в случае не одинаковых задач, $2\tau_c \le \tau_r < 4\tau_0$ Таким образом, верхняя граница времени τ для r и s -направлений не совпадают. Нижняя граница τ_s для s -направления определяется связностью ЗНЗ и соотношением частей "ввод", "счет", "вывод", как внутри каждой задачи, так и между задачами. Нижняя граница τ_r для r -направления определяется классом алгоритмов ЗНЗ и точно может быть определена лишь при конкретном

распараллеливании и распределении всего ЗНЗ. Однако, как показано в [I], для многих классов задач инженерного и исследовательского характера, эта граница определяется выражением

$$\tau_r \geq \frac{\sum\limits_{1}^{n} \tau_{aj}}{M}, \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad (I)$$

где j – номер задачи в ЗНЗ;

M – число ВМ в ВС.

Поскольку зависимость (I) справедлива для любого M, то ступенчатую функцию $\tau_r = \tau_r(M)$ можно аппроксимировать гиперболой (рис.3).

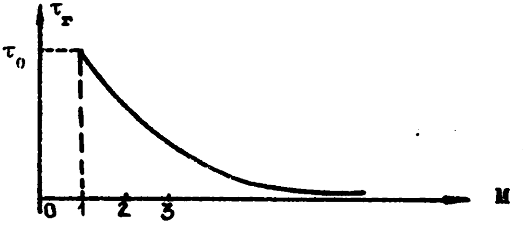


Рис. 3.

Зависимость $\tau_в = \tau_в(M)$ можно определить на основе анализа графов ЗНЗ.

2. Критическое число машин в ВС и время реализации ЗНЗ

Пусть порядок реализации ЗНЗ задан графом

$$G = G(X,U), \quad X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\},$$

в котором вершины x соотнесены функциональным частям алгоритмов ЗНЗ, а дуги u – связям отношений порядка выполнения этих частей. Назовем такой граф графом ЗНЗ. Представим граф ЗНЗ в ярусном виде [3]. Получим граф G_1 (см.рис.4). Очевидно, максимальное (критическое) число загруженных ВМ в ВС при реализации ЗНЗ в точности равно максимальной ширине графа G_1.

Если в ВС $M = M_{кр}$, то минимальное время, за которое ЗНЗ может быть реализован на ВС может быть найдено следующим обра-

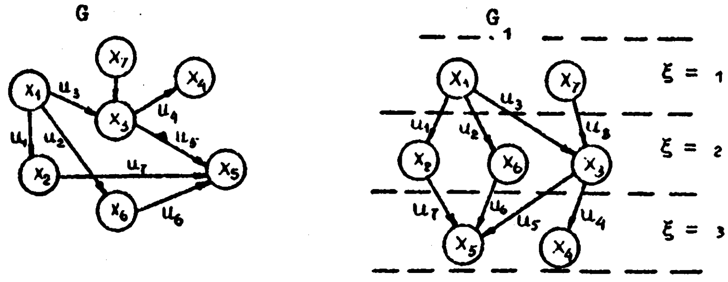


Рис. 4.

зом. Построим граф G_1^* двойственный графу G_1 (рис.5).

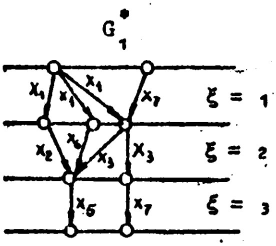


Рис. 5

В графе G_1^* -вершинам соотнесены состояния, а ребрам - работы ВС. Дополним граф G_1^* вершинами 0 и k и нулевыми дугами u_0 так, как показано на рис.6. Получим ярусную граф-сеть G_2^*.

Нагрузим дуги G_2^* величинами времени x_i, необходимого для реализации на ВС соответствующих функциональных частей ЗНЗ. Поскольку граф G_2^* функционально эквивалентен графам G_1^*, G_1, G, то критический путь через G_2^* есть время реализации ЗНЗ на ВС при $M = M_{кр}$.

3. Критический путь в граф-сети ЗНЗ.

Как будет видно ниже, для дальнейшего рассмотрения удобно критический путь $\tau_{кр}$ в графе G_2^* искать в следующем виде

$$\tau_{кр} = \max_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le \xi\le N}} \sum_{\xi=1}^{N} x_i \, a_{ij}^{(\xi)} , \qquad (2)$$

где i, j – номера дуг графа G_2^* ;

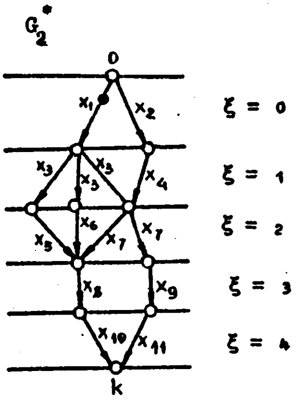
x_i – время, нагружающее дугу i ;

ξ – номер яруса графа G_2^* ;

$a_{ij}^{(\xi)}$ – матрица отношений дуг в (ξ-ом) ярусе графа G_2^*.

Матрица отношений $a_{ij}^{(\xi)}$ эквивалентна подграфу ξ -го яруса графа G_2^*. В соответствии с матрицей $a_{ij}^{(\xi)}$ происходит выборка разрешенных x_i при определении τ_{kp}.

Например для 2-го яруса графа G_2^* (рис.6):



$$a_{ij}^{(2)} = \begin{matrix} 00000000000 \\ 00000000000 \\ 00000000000 \\ 00000000000 \\ 00110000000 \\ 00110000000 \\ 00110000000 \\ 00000000000 \\ 00000000000 \\ 00000000000 \\ 00000000000 \end{matrix} \tag{3}$$

Рис. 6

В рассмотренной постановке, задача отыскания τ_{kp} может быть решена методом динамического программирования. Действительно, рассмотрим N -ый ярус графа G_2^*. Для этого яруса справедливо соотношение

$$\tau_{kp}^{(N)}(i^{(N-1)}) = \max_{1 \le i^{(N)} \le n} x_i a_{ij}^{(N)}, \tag{4}$$

где $i^{(N)}$ – номер дуги критического пути в N -ом яруса графа G_2^*.

Если этот max существует (вопросы существоаания и единственности решения здесь не рассматриваются), то при его отыскании будет попутно найдена функция

$$i^{(N)} = i^{(N)}(i^{(N-1)}) . \tag{5}$$

Очевидно для $(N-1)$ яруса справедливо соотношение

$$\tau_{kp}^{(N-1)}(i^{(N-2)}) = \max_{\substack{1\le i^{(N)}\le n \\ 1\le i^{(N-1)}\le n}} \{x_i a_{ij}^{(N-1)} + x_i a_{ij}^{(N)}\}.$$

Если разделить минимизацию по i, получим

$$\tau_{kp}^{(N-1)}(i^{(N-2)}) = \max_{1\le i^{(N)}\le n} \{x_i a_{ij}^{(N-1)} + \tau_{kp}^{(N)}(i^{(N-1)})\}$$

или

$$\tau_{kp}^{(N-1)}(i^{(N-2)}) = \max_{1\le i^{(N-1)}\le n} \{x_i a_{ij}^{(N-1)} + \tau_{kp}^{(N)}(i^{(N-1)})\}. \qquad (6)$$

Решая (6) попутно, получим

$$i^{(N-1)} = i^{(N-1)}(i^{(N-2)}). \qquad (7)$$

Для любого $(N-\xi)$ яруса индуктивно получим

$$\tau_{kp}^{(N-\xi)}(i^{(N-\xi-1)}) = \max_{1\le i^{(N-\xi)}\le n} \{x_i a_{ij}^{(N-\xi)} + \tau_{kp}^{(N-\xi+1)}(i^{(N-\xi)})\} \qquad (8)$$

и

$$i^{(N-\xi)} = i^{(N-\xi)}(i^{(N-\xi-1)}). \qquad (9)$$

Приведенный выше метод нахождения критического пути в граф-сети удобен для машинной реализации и, возможно, более экономичен, чем алгоритм Форда.

4. Время реализация ЗНЗ и число машин ВС

Метод оптимального распределения ЗНЗ по критерию минимума времени, затрачиваемого ВС на реализацию ЗНЗ, изложен в [4]. Там же приведена методика учета случайных факторов, влияющих на τ_{kp}.

Здесь рассмотрим лишь приближенный метод оценки влияния числа машин на время реализации ЗНЗ на ВС.

Введем понятие частной производной от $\tau_{кр}$ по $М$

$$\left(\frac{\partial\tau_{кр}}{\partial М}\right)^{(\xi)} = \begin{cases} 0 & \text{при } М > М_{кр}^{(\xi)}, \\ \dfrac{x(i^{(\xi)})}{М} & \text{при } М \le М_{кр}^{(\xi)}, \end{cases} \tag{10}$$

где $\left(\frac{\partial\tau_{кр}}{\partial М}\right)^{(\xi)}$ – частная производная от $\tau_{кр}$ по числу машин $М$ на ξ-ом ярусе;

$x(i^{(\xi)})$ – значение (времени) дуги $i^{(\xi)}$ критического пути в ξ-ом ярусе;

$М_{кр}^{(\xi)}$ – критическое число машин для ξ-го яруса.

Средней частной производной от $\tau_{кр}$ по $М$ будем называть

$$\left(\frac{\partial\tau_{кр}}{\partial М}\right)_{ср} = \frac{1}{N}\sum_{\xi=1}^{N}\left(\frac{\partial\tau_{кр}}{\partial М}\right)^{(\xi)}. \tag{11}$$

Воспользуемся выражением (11) для отыскания зависимости времени реализации ЗНЗ от числа ВМ в ВС:

$$\tau_в = \tau_в(М)$$

Эта зависимость может быть представлена следующей приближенной формулой

$$\tau_в = \tau_{кр} + \left(\frac{\partial\tau_{кр}}{\partial М}\right)_{ср} \cdot (М_{кр} - М), \tag{12}$$

$$М = 2,3,\ldots, М_{кр}.$$

Определив $\tau_г$ и $\tau_в$ и сравнивая их значения, можно сделать выбор между г и в направлениями мультипрограммирования ЗНЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Наука, Новосибирск, 1966 г.

2. АН СССР, СО ВЦ. Вопросы мультиобработки информации на вычислительных системах. Новосибирск, 1966 г.

3. Д.А. Поспелов. О некоторых математических проблемах, возникающих при совместной работе нескольких вычислительных машин. Труды МЭИ, 1963.

4. С.Д. Пашкеев. Метод оптимального диспетчирования мультипрограммной работы вычислительной системы с учетом случайных факторов. Доклады I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике 1967 г. (готовится к печати).