УДК 519.95

МОДЕЛИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕД И НЕКОТОРЫЕ ПРИНЦИПЫ ИХ КЛАССИФИКАЦИИ

В.А. Скоробогатов

(Новосибирск)

Проблема программирования на вычислительных средах [1,2] потребовала исследования некоторых специфических особенностей формального представления (описания) и классификации последних. Обычно определение вычислительной среды (ВС) состоит из описания элемента и задания структуры соединений элементов, причем обычно эта структура изображается на рисунке. Однако, можно представить себе такую ВС, структуру которой изобразить в виде рисунка затруднительно, особенно это касается неплоских ВС. При исследовании вопросов, связанных с классификацией и описанием ВС, возникает необходимость в аналитическом представлении не только некоторого варианта ВС, но и множеств вариантов, объединенных каким-то общим признаком.

Уже сейчас известно значительное число вариантов ВС [1,2, 6,7,8,9,10 и др.]. Однако в этих работах вопросы, связанные с классификацией ВС, почти не рассматриваются. В [1,2,6],например, предлагается различать по структуре континуальные и дискретные среды, по способу работы - с индивидуальным и коллективным поведением элементов, по способу управления - с фиксированной и переменной настройкой. В этих работах при определении ВС предлагается рассматривать структуры сред, которые могут быть получены замощением плоскости, а также трехмерного

евклидова пространства одинаковыми, выпуклыми фигурами. Число таких структур невелико. В некоторых работах, например [II], рассматривается ВС, которая определяется на плоскости, замощенной неодинаковыми фигурами и, более того, не все элементы выполняют одни и те же функции. Очевидно, представляет интерес представление ВС в общем виде и на основе такого представления разработка принципов структурной классификации ВС.

Под структурной классификацией в данном случае понимается классификация ВС по способу соединения элементов и их взаимному расположению. Если предположить, что элементы определенным образом расположены в пространстве, в котором заданы законы соединения этих элементов, то вопрос структурной классификации можно свести к классификации пространств, расположения элементов в них и соединений их между собой. Например, можно на основе известной из [I] ВС построить другую, считая, что элементы расположены в клетках решетки через одну, две и более, как это сделано, например, в [II].

Изучением различного рода пространств занимается теория множеств и топология. В данном случае понятие пространства будет пониматься именно в теоретико-множественном смысле [3,4, I2, 5].

Для представления соединений элементов предполагается, что элемент есть некоторое подпространство пространства, в котором он находится, при этом соединение двух и большего числа элементов представляется непустыми пересечениями соответствующих подпространств. Таким образом, изучение множества всевозможных соединений элементов в пространстве сводится к изучению множества всех покрытий данного пространства.

Как видно из сказанного, вопрос структурной классификации является весьма объемным и данная работа не претендует на его полное решение. Однако, предполагается целесообразным использование некоторых топологических понятий для формального описания ВС и обсуждение принципов, которые могли бы быть положены в основу классификации последних.

В дальнейшем, поскольку физические свойства ВС рассматриваться не будут и все определения вводятся для ВС как для формального объекта на языке теории множеств, то естественно назвать этот объект теоретико-множественной моделью вычислительной среды (ТМВС).

При построении ТМВС были использованы идеи, высказанные

в [13, 14]. Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются понятия, связанные с определением общей модели ВС, при этом пространство, в котором расположены элементы, не конкретизируется, а только предполагается, что оно дискретно [12]. Во второй части понятие ТМВС рассматривается более подробно. На основе дискретного пространства R^n построены некоторые варианты ТМВС.

ЧАСТЬ I

I.0.0. Модель элемента вычислительной среды.

Пусть E_ϑ конечное подмножество множества E, а $e_\nu \in E_\vartheta$ где $\nu \in N$, $\vartheta \in \Theta$ Пусть Υ_ϑ некоторое множество отображений множества E_ϑ в себя, а $s_\varkappa \in \Upsilon_\vartheta$ где $\varkappa \in K$. Считается, что в Υ_ϑ могут содержаться как однозначные, так и не однозначные отображения. Множество $\Upsilon = \{\Upsilon_\vartheta\}$, состоящее из множества множеств отображений всех E_ϑ назовем S - базисом ВС. Любое $\hat{\Upsilon} \subset \Upsilon$ назовем S - подбазисом вычислительной среды.

I.I.0. Будем говорить, что с множеством E_ϑ связано отображение $s_\varkappa \in \hat{\Upsilon}$, если на этом множестве фиксировано единственное отображение $s_\varkappa$, в отличие от случая, когда на множестве E_ϑ может быть задано любое отображение из $\hat{\Upsilon}$.

I.2.0. Следующие два отображения выделим отдельно:

$$s_0: \quad \forall \nu [(e_\nu \in E_\vartheta) \to (s_0 (e_\nu) = \Phi)],$$

$$s_1: \quad \forall \nu [(e_\nu \in E_\vartheta) \to (s_1 (e_\nu) = e_\nu)].$$

I.3.0. Каждому множеству E_ϑ поставим во взаимнооднозначное соответствие множество $\mathfrak{X}_\vartheta$, в дальнейшем будем его интерпретировать как множество переменных $x_\nu \in \mathfrak{X}_\vartheta$. Пусть переменные x_ν принимают значения из множества значений Q, $q_r \in Q$, где $r = 0,1,2,\ldots$. В результате оказывается, что с каждым $e_\nu \in E_\vartheta$ связана переменная $x_\nu \in \mathfrak{X}_\vartheta$.

I.4.0. Скажем, что отображение $s_\varkappa$, заданное на множестве E_ϑ индуцирует отождествление переменных на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ таким образом, что

$$(s_\varkappa(e_\nu) = e_\mu) \to (\mathfrak{X}_\nu \equiv \mathfrak{X}_\mu).$$

I.5.0. Будем говорить, что на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ задана функция $f_i \in F$ с областью определения $\mathfrak{X}'_\vartheta \subset \mathfrak{X}_\vartheta$ и областью значений $\mathfrak{X}''_\vartheta \subset \mathfrak{X}_\vartheta$ где $\mathfrak{X}'_\vartheta \cup \mathfrak{X}''_\vartheta = \mathfrak{X}_\vartheta$, $\mathfrak{X}'_\vartheta \cap \mathfrak{X}''_\vartheta = \phi$. Аналогично на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ можно определить задание нескольких функций, тогда для каждой из них должны быть определены множества переменных, которые для разных функций могут и совпадать, и множества, на которых функции принимают значения. Эти множества не должны иметь непустых пересечений. Аналогично (I.I.0) можно ввести понятие функции, связанной с множеством $\mathfrak{X}_\vartheta$.

A_0 ‖ Предполагается, что всегда можно выделить подмножества $\mathfrak{X}'_\vartheta$ и $\mathfrak{X}''_\vartheta$ .x)

I.6.0. Будем различать следующие случаи задания отображений $s_и$ и функций f_i на множествах E_ϑ и $\mathfrak{X}_\vartheta$.

A_1 ‖ С множеством E_ϑ связано $s_и$. При этом на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ не может быть задан ни один оператор f_i.

A_2 ‖ С множеством $\mathfrak{X}_\vartheta$ связан оператор f_i, тогда на E_ϑ не могут быть заданы ни одно из отображений $s_и$.

A_3 ‖ На множестве E_ϑ может быть задано отображение $s_и \in \Upsilon$ при этом на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ не может быть задан ни один оператор f_i.

A_4 ‖ На множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$ может быть задан оператор $f_i \in \tilde{F}$, $\tilde{F} \subset F$ при этом на множестве E_ϑ не может быть задано ни одно из отображений $s_и$.

A_5 ‖ На множестве E_ϑ может быть задано отображение $s_и \in \Upsilon$, но не может быть одновременно задан оператор на $\mathfrak{X}_\vartheta$; либо может быть задан оператор на $\mathfrak{X}_\vartheta$, но не может быть задано одновременно отображение $s_и$ на E_ϑ.

A_6 ‖ На множестве E_ϑ может быть задано отображение $s_и \in \ddot{\Upsilon}$ и одновременно может быть задан оператор $f_i \in \tilde{F}$ на множестве $\mathfrak{X}_\vartheta$.

Все шесть случаев в дальнейшем условно будут называться аксиомами. Аксиома A_6 может быть уточнена посредством введения трех замещающих её аксиом: A_{61}, A_{62}, A_{63}.

---

x) Буквой A с индексами будут выделены предложения, которые в дальнейшем используются в качестве аксиом, хотя формально ими не являются.

Пусть на множестве E_θ задано s_u, тогда, согласно [I.4.0], оно индуцирует отождествление переменных на множество $\mathcal{X}_\theta$. Тогда, если отождествленные переменные принадлежат множеству независимых переменных или множеству "выходных" (зависимых) переменных, то они рассматриваются как обычные тождественные переменные. Если же отождественные переменные попадают в разные множества, то можно различать три случая:

A_{61} Отождествленные переменные устраняются из области действия оператора f_1, т.е. не являются ни независимыми, ни зависимыми переменными.

A_{62} Все переменные из $\mathcal{X}'_\theta$, имеющие тождественные переменные в $\mathcal{X}''_\theta$, устраняются из $\mathcal{X}''_\theta$.

A_{63} Все переменные из $\mathcal{X}''_\theta$, имеющие тождественные переменные в $\mathcal{X}'_\theta$, устраняются из $\mathcal{X}'_\theta$.

I.7.0. Любое подмножество $\tilde{F} \subset F$, где F – множество операторов[x)] назовем $\mathcal{F}$ – подбазисом вычислительной среды.

I.7.I. Множество, являющееся соединением любого S-подбазиса и $\mathcal{F}$ – подбазиса назовем базисом вычислительной среды ($(S-\mathcal{F})$ – базисом). Как известно из [I] для универсальных вычислительных сред $(S-\mathcal{F})$ – базис должен удовлетворять требованиям соединительной и автоматной полноты.

I.7.2. Подмножество E_θ множества E, удовлетворяющее одной из аксиом $A_1, A_2, \ldots, A_5, A_{61}, A_{62}, A_{63}$ и A_0 с заданными $(S-\mathcal{F})$ – подбазисами назовем моделью элемента вычислительной среды.

I.7.3. Модель элемента удобно записывать в символической форме:

$$W_E = \langle E_\theta, \mathcal{X}_\theta, A_0, A_1, S, \mathcal{F} \rangle .$$

2.0.0. Теоретико-множественные модели вычислительных сред

В качестве исходных понятий для построения модели вычислительной среды используются дискретное топологическое пространство [3,4,I2][xx)] и сеть [I5].

---

x) Под операторами в данном случае можно понимать довольно широкий их класс. Сюда можно отнести функции алгебры логики, ограниченно детерминированные операторы, алгебраические операции и пр.

xx) В данном случае используется подобие дискретного топологического пространства и частично упорядоченного множества [3]

2.1.0. Сеть в топологическом пространстве

Пусть T топологическое пространство, α_T система его открытых подмножеств R_μ

$$\alpha_T = \{R_\mu\}, \qquad \mu \in \mathfrak{M}.$$

Пусть E множество вершин сети e_λ, причем $E \subseteq T$. Это включение будем понимать так, что каждый элемент пространства T может быть объявлен либо не объявлен вершиной сети $e_\lambda \in E$, откуда следует, что $E_\mu \subseteq R_\mu$. Это означает, что множество E будет иметь топологию пространства T, следовательно, будут выполняться следующие условия [3]:

Система открытых в E множеств $\alpha_{TE} = \{E_\mu\}$ состоит из множеств

$$E_\mu = E \cap R_\mu .$$

Система замкнутых в E множеств $\alpha'_{TE} = \{E_\mu\}$ состоит и множеств

$$\bar{E}_\mu = E \cap (T \setminus E_\mu).$$

Пересечение любого конечного числа открытых множеств E_μ открыто.

Соединение любого числа открытых множеств E_μ открыто.
E - открыто в T и Φ открыто в T.

2.2.0. Выберем из множества $\bigcup_\mu E_\mu$ некоторое его подмножество

$$E_0 = \{e_0\} \subseteq \bigcup_\mu E_\mu .$$

Назовем его множеством входных и выходных (внешних) вершин сети E.

2.2.1. Будем говорить, что множество E с заданной системой подмножеств $\alpha'_E = E_0 \cup \{E_\mu\}$ - есть с е т ь, лежащая в топологическом пространстве T. Обозначим её ε_T. Сеть ε_T отличается от сети ε [15] тем, что ее подмножества E_μ определяются топологией пространства T. В этом смысле ε_T понятие более узкое и его можно еще сильнее сузить, если рассматривать ε_T при некотором определенном покрытии T. Именно покрытие и определяет структуру множества E, в том числе и соседей для каждого E_μ.

2.2.2. Кратность покрытия сети [3]. Систему множеств α_E, составленную из подмножеств E, назовем покрытием E, если соединение всех множеств α_E есть все E.

Кратностью покрытия α_E сети ε_T назовем число наибольшее из таких целых k, что существуют k элементов E_μ покрытия α_E, имеющих непустое пересечение.

2.2.3. Размерность покрытия сети. Пусть α_E покрытие множества E, имеющее кратность k. Тогда в покрытии α_E существуют k элементов покрытия, имеющих непустые пересечения. Среди этих элементов могут найтись такие, которые имеют непустые пересечения с элементами покрытия, не входящими в эти k элементов.

Число s_k назовём размерностью покрытия α_E, кратности k, если в α_E некоторый элемент имеет s_k непустых пересечений по k элементов в каждом.

2.3.0. Порядок пересечений множеств. О любом пересечении конечного числа множеств будем говорить, что оно имеет порядок. Под порядком будем понимать число, равное числу множеств, которые принимают участие в этом пересечении. В замкнутом покрытии кратности k сети ε_T могут содержаться пересечения, имеющие порядки от I до k. Пересечения могут быть и пустыми.x) Например, пусть имеется покрытие кратности $k=3$, тогда в нем найдутся три множества, имеющих непустое пересечение порядка 3. В этом случае могут быть непустыми три пересечения порядка 2 и три пересечения порядка I. Порядок пересечения будем обозначать числом у символа пересечения: $\cap^{(n)}$.

О порядке r пересечения $\cap^{(r)}$ будем говорить, что он строгий, если в пересечение порядка r не входят пересечения более высоких порядков. Пересечение не строгого порядка r есть соединение пересечений строгих порядков. Если порядок не строгий, индекс у символа пересечения заключать в скобки не будем $\cap^1$.

О любом множестве E_{μ_0} покрытия α_{TE} кратности k размерности s_k можно сказать, что оно есть соединение пересечений строгих порядков от I до k.

Множество E_{μ_0} можно задать, задав все его непустые пе-

---

x) Несмотря на то, что соответствующие пересечения в T могут быть не пусты.

ресечения строгих порядков с остальными элементами покрытия. Например, множество E_{μ_0} может быть сосредоточено во всех (и только в них) пересечениях какого-либо одного строгого порядка.

2.4.0. Покрытие α_M кратности k частично упорядоченного множества M (сети ε_M) назовем п р а в и л ь н ы м, если о каждом из множеств $E_\delta \in \alpha_M$ а также о каждом из множеств E^*_δ покрытия $\alpha^*_{M^*}$, двойственного покрытию α_M (где M^* двойственно M) можно сказать следующее.

I. E_δ разбито на (непустые) непересекающиеся подмножества, которые суть строгие пересечения множества E_δ с некоторыми множествами $E_{\delta_i} \in \alpha$ (где $i = 1, \ldots, k-1$) порядков r_j где $j = 2, 3, \ldots, k$.

2. Число (непустых) строгих пересечений одного и того же порядка (n) одинаково для всех множеств покрытия и равно $s_{(n)}$ где $s_{(n)}$ - размерность множества по пересечению порядка (n).

3. Все строгие пересечения одного и того же порядка равномощны.

4. Все элементы покрытия равномощны.

5. Все строгие пересечения всех порядков не пусты.

2.5.0. Потребуем теперь от любого множества любого покрытия $E_\delta \in \alpha_{TE}$,чтобы оно удовлетворяло [I.7.2] и, таким образом, получим, что любое множество покрытия является элементом вычислительной среды. А все покрытие однозначно определит вычислительную среду при условии, если для каждого его множества будет известно каким образом оно "распределено" по пересечениям строгих порядков и будет определено E_0 .

2.5.I. Сеть ε_T с заданным покрытием,для каждого из множеств которого известно их распределение по пересечениям строгих порядков, а также справедливы аксиомы A_0 и одна из $A_1, \ldots, A_5, A_{61}, A_{62}, A_{63}$ при заданных $S, \mathcal{F}$ - подбазисах назовем вариантом (T, α_{TE}) - вычислительной среды над $(S, \mathcal{F})$ - базисом.

2.5.2. Сеть ε_T с множеством всех покрытий $\{\alpha_{TE}\}$,для элементов которых выполняются аксиомы и известно распределение по пересечениям строгих порядков, назовем классом вычислительных T - сред, заданных над базисом$(S, \mathcal{F})$.

Таким образом для того, чтобы задать класс вычислительных T - сред необходимо предварительно задать сеть ε_T в пространстве T, а чтобы выделить некоторый конкретный вариант T-среды, необходимо выбрать определенное покрытие $\alpha_{TE} \in \{\alpha_{TE}\}$ В некоторых случаях удобно рассматривать "универсальное" покрытие, т.е. базу $\alpha^{б}_{TE}$ [3], так как на основе ее множеств можно получить любое другое покрытие применением операции соединения. Из T - класса вычислительных сред над базисом $(S,\mathcal{F})$ можно выделить разновидность однородных сред. К таким средам мы будем относить все те, элементы которых суть множества правильных покрытий. В свою очередь из однородных сред можно выделить разновидность совершенно однородных сред, к которым отнесем такие, для элементов которых выполняются аксиомы (A_0, A_5).

ЧАСТЬ II

3.0.0. Класс дискретных вычислительных R^n - сред.

3.I.0. Рассмотрим счетное множество R элементов r^n_i, где $n \in \{0,1,\dots,n\}$, $i = 1,2,3,\dots$. Число n будем называть размерностью элемента r^n_i . Пусть $R^n \subseteq R$ и $r^n \in R^n$ причем, $r^{n_1} \notin R^n$ если $n_1 \neq n$.

$$R^n = \{r^n_{j_\alpha}\} = \{r^n_1, r^n_2, \dots, r^n_{j_\alpha}, \dots\}.$$

Множество R можно представить в виде $R = \bigcup_n R^n$ при этом для $n_1 \neq n_2$, $R^{n_1} \cap R^{n_2} = \phi$.

На множестве R введем несимметричное и транзитивное отношение порядка следующим образом:

$$r^0_{j_0} \in R^0,$$

$$r^0_{j_0} < \tilde{R}^1_{\delta_1} \subseteq R^1,^{*)}$$

$$\tilde{R}^1_{\delta_1} = \{r^1_{\delta^1_1}, \dots, r^1_{\delta^1_{s_1}}\}, \quad \delta^1_{i_1} = f^1_{i_1}(j_0, \Delta_{i_1}),$$

где $i_1 = 1,\dots, s_1$;

---

*) Отношение $r < \tilde{R}$ понимается так, что

$$\forall(i)[(r_i \in R) \to (r < r_i)].$$

. . . .

$r^{n-1}_{j_{n-1}} \in R^{n-1}$,

$r^{n-1}_{j_{n-1}} < \tilde{R}^{n}_{\delta_n} \subseteq R^{n}$,

$\tilde{R}^{n}_{\delta_n} = \{r^{n}_{\delta^n_1}, \dots, r^{n}_{\delta^n_{s_n}}\}$; $\delta^{n}_{i_n} = f^{n}_{i_n}(j_{n-1}, \Delta_{i_n})$,

$i_n = 1, \dots, s_n$,

где $f^{k}_{i_k}$ некоторая функция от индекса j_0 и переменной Δ_{i_k}, которая может быть также и константой.

Частично упорядоченное множество R в дальнейшем будем использовать в качестве пространства для дальнейших построений.

Одну из систем α_R открытых множеств пространства R можно определить как систему звезд $O_R\left(r^{n_1}_{j_{n_1}}\right)$, где $0 \le n_1 \le n$ при помощи следующих соотношений.

$\alpha_R = \{\alpha^{n_1}_R\}$, где $\alpha^{n}_R = \{O_R(r^{n}_{j_{n_1}})\}$ и

где $O_R(r^{0}_{j_0}) = \{r^{0}_{j_0}(r^{1}_{\delta^1_1}, \dots, r^{1}_{\delta^1_{s_1}})(O_R(r^{1}_{\delta^1_1}), \dots, O_R(r^{1}_{\delta^1_{s_1}}))\}$,

. . . .

$O_R(r^{n-1}_{j_{n-1}}) = \{r^{n-1}_{j_{n-1}}(r^{n}_{\delta^n_1}, \dots, r^{n}_{\delta^n_{s_n}})(O_R(r^{n}_{\delta^n_1}), \dots, O_R(r^{n}_{\delta^n_{s_n}}))\}$,

$O_R(r^{n}_{j_n}) = r^{n}_{j_n}$.

Аналогично систему $\bar{\alpha}_R$ замкнутых множеств пространства R можно определить как систему комбинаторных замыканий

$A_R(r^{n_1}_{j_{n_1}})$, $0 \le n_1 \le n$; $\bar{\alpha}_R = \{\bar{\alpha}^{n_1}_R\}$; $\bar{\alpha}^{n_1}_R = \{A_r(r^{n_1}_{j_{n_1}})\}$,

где

$A_R(r^{0}_{j_0}) = r^{0}_{j_0}$,

. . . .

$A_R(r^{n}_{j_n}) = \{r^{n}_{j_n}(r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_1}, \dots, r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_{q_{n-1}}})(A_R(r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_1}), \dots, A_R(r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_{q_{n-1}}}))\}$

где, если $\gamma_1^{n-1}, \ldots, \gamma_{q_{n-1}}^{n-1}$ обозначить через γ_{n-1}, то

$$q_n = f^n(\Delta, s_n) \quad ; \quad \gamma_n = g^n(\Delta, \delta_n).$$

Очевидно, что любое открытое множество пространства R может быть представлено как соединение некоторых звезд из α_R и любое замкнутое множество пространства R может быть представлено соединением некоторых комбинаторных замыканий из $\bar{\alpha}_R$. Таким образом α_R – есть одна из баз пространства R. Для того чтобы задать некоторое определенное пространство R, очевидно, необходимо определить

$$(f_{i_1}^1, \ldots, f_{i_n}^n), \quad (\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_n}), \quad (s_1, \ldots, s_n).$$

Действительно, зная указанные величины и располагая некоторой нумерацией элементов из R, для каждого элемента $r_{j_{n_1}}^{n_1}$ легко определить $\tilde{R}_{\delta_{n_1+1}}^{n_1+1}$ и, следовательно, построить все звезды. Чтобы получить определенный вид покрытия множества R, т.е. множества системы, являющейся покрытием R, достаточно для каждого множества покрытия указать соединением каких звезд оно является. В случае задания правильного покрытия задача значительно упрощается, так как нет необходимости в перечислении всех множеств покрытия, поскольку они одинаковы по структуре и отличаются только индексами.

3.2.0. Для примера построим следующее пространство. Пусть $R_1 = \bigcup_0^1 R^i = R^0 \cup R^1$ множество, а

$$R^0 = \{r_{j_0}^0\}, \qquad j_0 = 2k_1 - 1, \quad k_1 = 1,2,3,\ldots,$$

$$R^1 = \{r_{j_1}^1\}, \qquad j_1 = 2k_2, \qquad k_2 = 0,1,2,\ldots,$$

его подмножества.

Введем отношение порядка

$$r_{j_0}^0 < (\tilde{R}_{\delta_1}^1 \subseteq R^1) = \{r_{\delta_1^1}^1, r_{\delta_2^1}^1\}$$

и определим f_1, f_2 следующим образом:

$$\delta_1^1 = f_1^1(j_0, \Delta_1) = j_0 + 1; \qquad \Delta_1 = 1;$$

$$\delta_2^1 = f_2^1(j_0, \Delta_2) = j_0 - 1; \qquad \Delta_2 = -1.$$

Тогда для α_R можно записать

$$\alpha_R = \{\alpha_R^{n_1}\}, \qquad n_1 \in \{0, 1\},$$

$$\alpha_R = \{\alpha_R^0, \alpha_R^1\},$$

$$\alpha_R^1 = \{O_R(r^1_{j_1})\}, \quad j_1 = 2k_2, \quad k_2 = 0, 1, 2, \ldots,$$

при этом

$$O_R(r^1_{j_1}) = r^1_{j_1},$$

$$\alpha_R^0 = \{O_R(r^0_{j_0})\}, \; j_0 = 2k_1 - 1, \; k_1 = 1, 2, \ldots,$$

$$O_R(r^0_{j_0}) = \{r^0_{j_0}(r^1_{\delta^1_1}, r^1_{\delta^1_2})(O_R(r^1_{\delta^1_1}), O_R(r^1_{\delta^1_2}))\} =$$

$$= (r^0_{j_0}, r^1_{j_0+1}, r^1_{j_0-1}).$$

Перенумеруем элементы множеств α_R^0 и α_R^1. Пусть звезда $O_R(r^0_{j_0})$ имеет номер j_0, обозначим ее $O_R(j_0)$ и $O_R(r^1_{j_1})$ через $O_R(j_1)$. Таким образом, номера всех звезд в множестве α_R различны. Приведем пример некоторых покрытий множества R,

3.2.1. Пусть система ρ_R^1 состоит из множеств, совпадающих со звездами всех элементов. Очевидно, что ρ_R^1 есть покрытие.

3.2.2. Пусть система ρ_R^2 состоит из множеств $\sigma^2_{j_0} = O_R(x^0_{j_0})$, где $j_0 = 2k_1 - 1$, где $k_1 = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, что ρ_R^2 также есть покрытие.

3.2.3. Пусть $\rho_R^3 = \{\sigma^3_{j_0}\}$, где $\sigma^3_{j_0} = O_R(j_0) \cup O_R(j_0 + 1)$. Легко убедиться, что ρ_R^3 также есть покрытие R, и все покрытия ρ_R^1, ρ_R^2, ρ_R^3 есть правильные покрытия. Приведем пример неправильного покрытия.

3.2.4. Пусть

$$\rho_R^4 = \{\sigma_1^4 \cup \{\sigma^4_{j_0}\}\},$$

при этом положим

$$\sigma_1^4 = O_R(1), \; \sigma^4_{j_0} = O_R(j_0) \cup \sigma^4_{j_0-2}, \quad j_0 > 1,$$

действительно:

$$\sigma_3^4 = O_R(3) \cup \sigma_1^4 = O_R(3) \cup O_R(1),$$

$$\sigma_s^4 = O_R(5) \quad и \quad \sigma_3^1 = O_R(5) \cup O_R(3) \cup O_R(1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и т.д.

Такое неправильное покрытие, задание которого можно подчинить некоторому закону, например, записать рекурсивно, можно назвать **р е г у л я р н ы м** покрытием. Очевидно, всякое правильное покрытие регулярно.

Аналогично примеру [3.2.0] можно строить любые другие дискретные пространства.

3.3.0. Подобно тому как было сделано в [3.I.0] можно задать пространство R соотношениями, по которым сразу вычисляются комбинаторные замыкания.

$$r^1_{j_1} \in R^1 ; \quad r^1_{j_1} > \tilde{\tilde{R}}^0_{\gamma_0} ;$$

$$\tilde{\tilde{R}}^0_{\gamma_0} = \{r^0_{\gamma^0_1}, \ldots, r^0_{\gamma^0_{q_1}}\}, \quad \gamma^0_{i_0} = g^0_{i_0}(j_1, \Delta^*_{i_0}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r^n_{j_n} \in R^n, \quad r^n_{j_n} > \tilde{\tilde{R}}^{n-1}_{\gamma_{n-1}} ;$$

$$\tilde{\tilde{R}}^{n-1}_{\gamma_{n-1}} = \{r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_1}, \ldots, r^{n-1}_{\gamma^{n-1}_{q_{n-1}}}\} ; \quad \gamma^{n-1}_{i_{n-1}} = g^{n-1}_{i_{n-1}}(j_n, \Delta^*_{i_n}),$$

где $i_{n-1} = 1, \ldots, q_{n-1}$; $\Delta^*_{i_n}$ – может быть константой. Очевидно, из этих соотношений легко получить [3.I.0] и наоборот. При этом вопрос о связи функций $\gamma^n_{i_n}$ и $\delta^{n_1}_{i_{n_1}}$ решается автоматически при построении последних соотношений. Покажем это на примере.

3.4.0. Рассмотрим пространство R_2

$$r^0_{j_0} < (r^1_{\delta^1_1}, r^1_{\delta^1_2}, r^1_{\delta^1_3}), \quad \delta^1_1 = j_0 + 1, \ \delta^1_i = \delta^1_{i-1} + 3, \ i=2,3,$$

$$r^1_{j_1} < (r^2_{\delta^2_1}, r^2_{\delta^2_2}, r^2_{\delta^2_3}), \quad \delta^2_1 = j_1 + 1, \ \delta^2_i = \delta^2_{i-1} + 3, \ i=2,3.$$

Пусть $j_0 = 3k$, $j_1 = 3k+1$, $j_2 = 3k+2$,

где $k = 0,1,2,3$, следовательно, можно написать

$$r^0_{j_0} < (r^1_{j_0+1}, r^1_{j_0+4}, r^1_{j_0+7}); \quad r^0_{j_0-3} < (r^1_{j_0-2}, r^1_{j_0+1}, r^1_{j_0+4});$$

$$r^0_{j_0+3} < (r^1_{j_0+4}, r^1_{j_0+7}, r^1_{j_0+10}); \quad r^0_{j_0-6} < (r^1_{j_0-5}, r^1_{j_0-2}, r^1_{j_0+1});$$

$$r^0_{j_0+6} < (r^1_{j_0+7}, r^1_{j_0+10}, r^1_{j_0+13}); \quad r^0_{j_0-9} < (r^1_{j_0-8}, r^1_{j_0-5}, r^1_{j_0-2});$$

$$r^0_{j_0+9} < (r^1_{j_0+10}, r^1_{j_0+13}, r^1_{j_0+16}) \; \ldots\ldots \text{ и т.д.}$$

Из этих соотношений следует, что

$$r^1_{j_0+1} > (r^0_{j_0}, r^0_{j_0-3}, r^0_{j_0-6}) = (r^0_{j_0-6}, r^0_{j_0-3}, r^0_{j_0});$$

$$r^1_{j_0+4} > (r^0_{j_0}, r^0_{j_0+3}, r^0_{j_0-3}) = (r^0_{j_0-3}, r^0_{j_0}, r^0_{j_0+3});$$

$$r^1_{j_0+7} > (r^0_{j_0}, r^0_{j_0+3}, r^0_{j_0+6}) \; \ldots ,$$

откуда очевидно, что

$$r^1_{j_1} > \tilde{\tilde{R}}^0_{\gamma_0} = (r^0_{\gamma^0_1}, r^0_{\gamma^0_2}, r^0_{\gamma^0_3}); \quad \gamma^0_1 = j_1 - 1, \; \gamma^0_2 = j_1 - 4, \; \gamma^0_3 = j_1 - 7,$$

т.е. $\gamma^0_i = \gamma^0_{i-1} - 3$, $i = 2,3$.

Аналогично

$$r^2_{j_2} > \tilde{\tilde{R}}^1_{\gamma_1} = (r^1_{\gamma^1_1}, r^1_{\gamma^1_2}, r^1_{\gamma^1_3}); \quad \gamma^1_1 = j_2 - 1, \; \gamma^1_i = \gamma^1_{i-1} - 3; \; i = 2,3.$$

4.0.0. Сети в дискретном пространстве.

Пусть для R известны соотношения [3.1.0] и [3.3.0]. Пусть также известно одно из открытых покрытий пространства R [3.2.2], т.е.

$$\alpha_R = \left\{ O_{r^c_{j_0}}(R) \right\}.$$

Тогда для открытых множеств сети согласно [2.1.0] будем имет

$$E_{(r^0_{j_0})} = E \cap O_{r^0_{j_0}}(R) = E \cap [r^0_{j_0} \, (r^1_{\delta^1_i} \in \tilde{R}^1_{\delta_1}), \ldots, O_{r'_{\delta'_i}}(R)) \,].$$

На основе этого равенства об открытом множестве $E_{(r^c_{j_0})}$ сети

скажем, что в нем содержатся следующие множества элементов сети:

$$(e^1_{r^0_{j_0}}, e^2_{r^0_{j_0}}, \dots, e^{\lambda_0}_{r^0_{j_0}}) = E^{\lambda_0}_{r^0_{j_0}};$$

$$(e^1_{r^1_{j_1}}, e^2_{r^1_{j_1}}, \dots, e^{\lambda_1}_{r^1_{j_1}}) = E^{\lambda_1}_{r^1_{j_1}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots {}^{*)}$$

$$(e^1_{r^n_{j_n}}, e^2_{r^n_{j_n}}, \dots, e^{\lambda_n}_{r^n_{j_n}}) = E^{\lambda_n}_{r^n_{j_n}},$$

т.е. в каждой точке пространства находятся некоторые подмножества множества элементов сети.

4.0.I. Рассмотрим для примера $R^{(2)}$ из [3.4.0].

$$r^0_{j_0} < (r^1_{\delta^1_1}, r^1_{\delta^1_2}, r^1_{\delta^1_3}); \quad \delta^1_1 = j_0+1, \ \delta^1_i = \delta^1_{i-1} + 3, \ i = 2,3$$

$$r^1_{j_1} < (r^2_{\delta^2_1}, r^2_{\delta^2_2}, r^2_{\delta^2_3}); \quad \delta^2_1 = j_1+1, \ \delta^2_i = \delta^2_{i-1} + 3, \ i = 2,3$$

$$r^1_{j_1} > (r^0_{\gamma^0_1}, r^0_{\gamma^0_2}, r^0_{\gamma^0_3}); \quad \gamma^0_1 = j_1-1, \ \gamma^0_i = \gamma^0_{i-1}, \ i = 2,3,$$

$$r^2_{j_2} > (r^1_{\gamma^1_1}, r^1_{\gamma^1_2}, r^1_{\gamma^1_3}); \quad \gamma^1_1 = j_2-1, \ \gamma^1_i = \gamma^1_{i-1} - 3, \ i = 2,3,$$

Пусть $\alpha_R = \left\{ O_{r^0_{j_0}}(R) \right\}$, тогда легко вычислить звезду

$$O_{r^0_{j_0}}(R) = (r^0_{j_0}, r^1_{j_0+1}, r^1_{j_0+4}, r^1_{j_0+7}, r^2_{j_0+2}, r^2_{j_0+5}, r^2_{j_0+8}, r^2_{j_0+11}, r^2_{j_0+14})$$

Положим, что $\left|E^{\lambda_0}_{r^0_{j_0}}\right| = \left|E^{\lambda_1}_{r^1_{j_1}}\right| = \dots = \left|E^{\lambda_n}_{r^n_{j_n}}\right| = 1$, тогда

$$E_{(r^0_{j_0})} = (e^1_{r^0_{j_0}}, e^1_{r^1_{j_0+1}}, e^1_{r^1_{j_0+4}}, \dots, e^1_{r^2_{j_0+14}}).$$

Аналогично можно найти любое открытое множество сети. Найдем, например, $E_{(r^0_{j_0+3})}$. Так как

$$O_{r^0_{j+3}}(R) = (r^0_{j_0+3}, r^1_{j_0+4}, r^1_{j_0+7}, r^1_{j_0+11}, r^2_{j_0+5}, r^2_{j_0+8}, r^2_{j_0+11}, r^2_{j_0+14}, r^2_{j_0+17}),$$

то

$$E_{(r^0_{j_0+3})} = (e^1_{r^0_{j_0+3}}, e^1_{r^1_{j_0+4}}, \dots, e^1_{r^2_{j_0+17}}).$$

---

*) $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ должны определяться при конкретном задании сети.

Заметим, что

$$E_{(r^{1}_{j_0})} \cap E_{(r^{0}_{j_0+3})} = (e^{1}_{r^{1}_{j_0+4}}, e^{1}_{r^{2}_{j_0+5}}, e^{1}_{r^{2}_{j_0+8}}, e^{1}_{r^{2}_{j_0+11}}, e^{1}_{r^{2}_{j_0+14}}).$$

Зная все открытые множества сети, легко найти их пересечения между собой. Согласно [2.3.0], для рассматриваемой сети все эти пересечения будут пересечениями не строго второго порядка. Можно также определить пересечения всех строгих порядков. Из анализа множеств покрытия легко установить, что оно правильно. Этот факт является следствием того, что было выбрано правильное покрытие пространства.

5.0.0. Таким образом задание сети в пространстве свелось к тому, что мы указали мощность и состав множеств $\{E^{\lambda_i}_{r^i_{j_i}}\}$, а задание структуры фактически уже следовало из выбранного покрытия пространства α_R. Теперь, если потребовать, чтобы для любого $E_{(r^{\circ}_{j_0})}$ выполнялись условия [1.7.2] и задать $(S, \mathcal{F})$ – базис, то открытые множества $E_{(r^{\circ}_{j_0})}$ превращаются в элементы вычислительной среды [2.5.1], а сама сеть с данным покрытием превратится в вариант вычислительной среды над базисом $(S, \mathcal{F})$

Рассматривая множество сетей, которое получается на основе $R^{(1)}$ с множеством его покрытий и изменяя $|E^{\lambda_i}_{r^i_{j_i}}|$, получим разновидность дискретных $R^{(1)}$– сред над базисом $(S, \mathcal{F})$. Под классом дискретных сред ($\mathfrak{D}$– сред) в дальнейшем будем понимать множества таких сред, которые могут быть получены на основе дискретного пространства [3.1.0]. Заметим, что для определения варианта $R^{(1)}$ – среды необходимо еще указать E_0 [2.2.0] и для конечного случая указать номер последнего элемента, при известной нумерации.

Приложение

6.0.0. Некоторые примеры построения моделей из подкласса совершенно однородных вычислительных $\mathfrak{D}$- сред.

6.0.I. Пространство $B^{(2)}$. Для удобства изложения возьмем геометрически наглядное пространство (рис. I) и представим его в аналитическом виде.

$C = \{C_{q,p}\}$ - счетное множество конечных последовательностей целых положительных чисел, причем, $C = B^{(1)} \cup B^{(2)} \cup A^{(1)} \cup A^{(2)}$, где $B^{(i)}$, $A^{(i)}$ - подмножества, не имеющие попарных пересечений, $i = 1,2$, определяется следующим соотношением

$$C_{q,p} = \begin{cases} a_{2r+2,p_2}, & \text{если} \quad q = 2r + 2, \\ b_{2r+1,p_1}, & \text{если} \quad q = 2r + 1, \end{cases}$$

где $r = 0,1,2,\ldots,$

$q = 1,2,\ldots,$

$$B^{(1)} = \{b_{2r+1,p_1} \,/\, p_1 = 2t + 1,\ t = 0,1,2\ldots\},$$

$$B^{(2)} = \{b_{2r+1,p_1} \,/\, p_1 = 2t + 2,\ t = 0,1,2\ldots\},$$

$$A^{(1)} = \{a_{2r+2,p_2} \,/\, p_2 = 2t + 1,\ t = 0,1,2\ldots\},$$

$$A^{(2)} = \{a_{2r+2,p_2} \,/\, p_2 = 2t + 2,\ t = 0,1,2\ldots\}.$$

И пусть выполняются равенства

$$a_{2r+2,1} = a_{2r,1} + 6r,$$
$$b_{2r+1,1} = a_{2r,1} + 4(r - 1).$$

Пусть также

$$1 < p_2(r) \le 4r + 3 \quad \text{для} \quad r > 0,$$
$$p_2(r) = 1 \quad \text{для} \quad r = 0,$$
$$1 \le p_1(r) \le 2r + 1,$$

тогда можно вывести равенства:

$$a_{2r+2,p_2(r)} = 3r^2 + 3r + p_2(r) + 1,$$

$$b_{2r+1,p_1(r)} = 3r^2 + r + p_1(r).$$

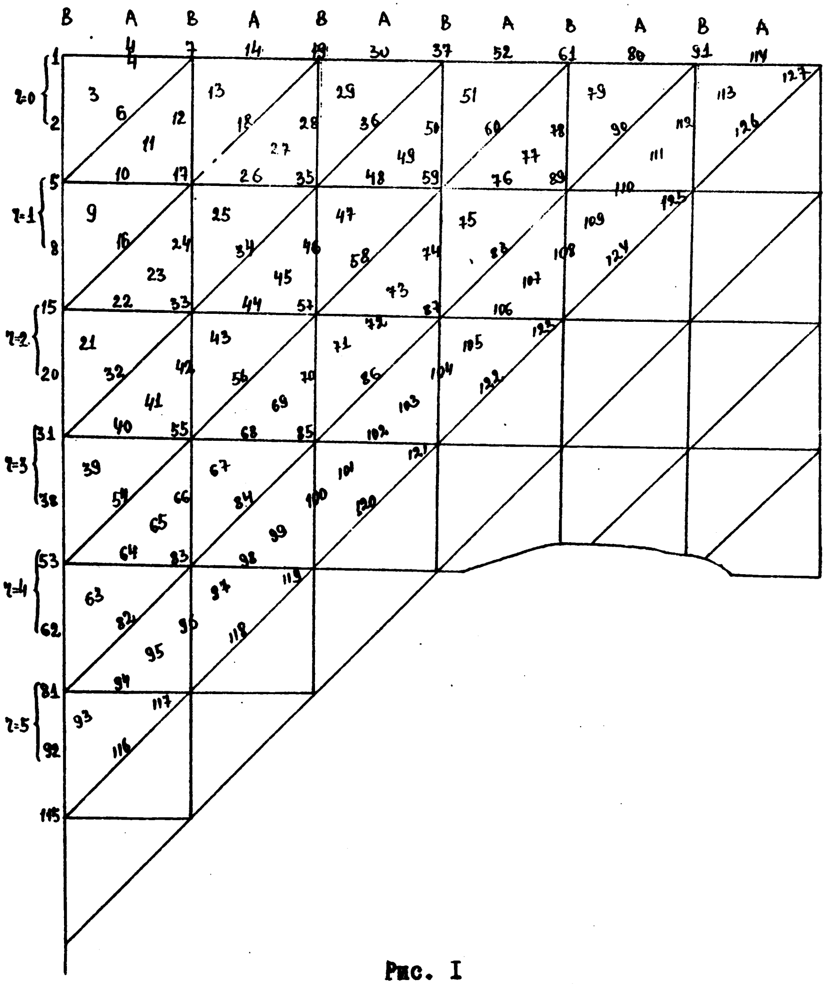


Рис. I

6.I.0. Определим пространство $R^{(2)}$ (рис. I) следующим образом:

$$R^{(2)} = R^0 \cup R^1 \cup R^2,$$
$$R^0 = B^{(1)},$$
$$R^1 = A^{(1)} \cup B^{(2)},$$
$$R^2 = A^{(2)}.$$

6.I.I. Введем, согласно [3.I.0] и рис. I, отношение порядка:

$$r^0_{j_0} \in R^0 = B^{(1)}; \quad r^0_{j_0} < (r^1_{\delta^1_1}, \dots, r^1_{\delta^1_6}),$$

где

$$j_0 = \langle 2r + 1, p_1(r) \rangle; \ p_1(r) \le 2r + 1, \quad p_1(r) = 2t + 1;$$
$$\delta^1_1 = \langle 2r, 2p_1(r) - 3 \rangle; \ 2p_1(r) - 3 \le 4r - 1; \ r^1_{\delta^1_1} \in A^{(1)};$$
$$\delta^1_2 = \langle 2r, 2p_1(r) - 1 \rangle; \ 2p_1(r) - 1 \le 4r - 1; \ r^1_{\delta^1_2} \in A^{(1)};$$
$$\delta^1_3 = \langle 2r + 1, p_1(r) + 1 \rangle; \ p_1(r) + 1 \le 2r + 1; \ r^1_{\delta^1_3} \in B^{(2)};$$
$$\delta^1_4 = \langle 2r + 2, 2p_1(r) - 1 \rangle; \ 2p_1(r) - 1 \le 4r + 3; \ r^1_{\delta^1_4} \in A^{(1)}$$
$$\delta^1_5 = \langle 2r + 2, 2p_1(r) + 1 \rangle; \ 2p_1(r) + 1 \le 4r + 3; \ r^1_{\delta^1_5} \in A^{(1)}.$$
$$\delta^1_6 = \langle 2r + 1, p_1(r) - 1 \rangle; \ p_1(r) - 1 \le 2r + 1; \ r^1_{\delta^1_6} \in B^{(2)}.$$
$$r^1_{j_1} \in R^1 = A^{(1)} \cup B^{(2)}.$$
$$r^1_{j_1 A^{(1)}} < (r^2_{\delta^2_{1A}}, r^2_{\delta^2_{2B}}); \ r^1_{j_1 B^{(2)}} < (r^2_{\delta^2_{1B}}, r^2_{\delta^2_{2B}}),$$

где

$$j_1 A^{(1)} = \langle 2r + 2, p_2(r) = 2t + 1 \rangle; \ p_2(r) \le 4r + 3;$$
$$j_1 B^{(2)} = \langle 2r + 1, p_1(r) = 2t + 2 \rangle; \ p_1(r) \le 2r + 1;$$
$$\delta^2_{1A} = \langle 2r + 2, p_2(r) - 1 \rangle; \ p_2(r) - 1 \le 4r + 3;$$
$$\delta^2_{2A} = \langle 2r + 2, p_2(r) + 1 \rangle; \ p_2(r) + 1 \le 4r + 3;$$
$$\delta^2_{1B} = \langle 2r, 2p_1(r) - 2 \rangle; \ 2p_1(r) - 2 \le 4r - 1;$$
$$\delta^2_{2B} = \langle 2r + 2, 2p_1(r) \rangle; \ 2p_1(r) \le 4r + 3.$$

Аналогично 3.3.0 , введем обратное отношение по-

$r^1_{j_1} \in R^1 = A^{(1)} \cup B^{(2)}$;

$r^1_{j_1^* A^{(1)}} > (r^0_{\gamma^{0*}_{1A}}, r^0_{\gamma^{0*}_{2A}})$; $r^1_{j^{**}_{1A^{(1)}}} > (r^0_{\gamma^{0**}_{1A}}, r^0_{\gamma^{0**}_{2A}})$;

$r^1_{j_1 B^{(2)}} > (r^0_{\gamma^0_{1B}}, r^0_{\gamma^0_{2B}})$,

$$j^*_{1A^{(1)}} = \langle 2r + 2,\ p_2(r) = 4t + 1\rangle \ ;\ p_2(r) \le 4r + 3;$$

$$j^{**}_{1A^{(1)}} = \langle 2r + 2,\ p_2(r) = 4t + 3\rangle \ ;\ p_2(r) \le 4r + 3;$$

$$j_{1B^{(2)}} = \langle 2r + 1,\ p_1(r) = 2t + 2\rangle \ ;\ p_1(r) \le 2r + 1;$$

$$\gamma^{0*}_{1A} = \langle 2r + 1,\ \frac{p_2(r) + 1}{2}\rangle;\quad \frac{p_2(r) + 1}{2} \le 2r + 1;$$

$$\gamma^{0*}_{2A} = \langle 2r + 3,\ \frac{p_2(r) + 1}{2}\rangle;\quad \frac{p_2(r) + 1}{2} \le 2r + 3;$$

$$\gamma^{0**}_{1A} = \langle 2r + 1,\ \frac{p_2(r) - 1}{2}\rangle;\quad \frac{p_2(r) - 1}{2} \le 2r - 1;$$

$$\gamma^{0**}_{2A} = \langle 2r + 3,\ p_2(r) - 1\rangle;\ p_2(r) - 1 \le 2r + 3;$$

$$\gamma^0_{1B} = \langle 2r + 1,\ p_1(r) - 1\rangle;\ p_1(r) - 1 \le 2r + 1;$$

$$\gamma^0_{2B} = \langle 2r + 1,\ p_1(r) + 1\rangle;\ p_1(r) + 1 \le 2r + 1.$$

.I.3. Вычислим звезды элементов $r^0_{j_0}$.

$$O_R(r^0_{j_0}) = (r^0_{j_0},\ (r^1_{\delta'_1}, \ldots, r^1_{\delta'_6})(O_R(r^1_{\delta'_1}), \ldots, O_R(r^1_{\delta'_6})))$$

для этого воспользуемся [6.I.I].

$O_R(r^0_{j_0})$ - обозначим через O_{j_0} , тогда

$O_{j_0} = (j_0,\ \delta^1_1, \ldots, \delta^1_6, \delta^2_{1A_2}, \ldots, \delta^2_{2B_6})$, так как

$$O_{\delta^1_1} = (\delta^2_{1A_1}, \delta^2_{2A_1}),$$

$$O_{\delta^1_2} = (\delta^2_{1A_2}, \delta^2_{2A_2}),$$

....

$$O_{\delta^1_6} = (\delta^2_{1B_6}, \delta^2_{2B_6}).$$

При этом

$$\delta^2_{1A_1} = \langle 2r,\ p_1(r)-1\rangle,\ p_1(r)-1 \le 4r-1,$$
$$\delta^2_{2A_1} = \langle 2r,\ p_1(r)+1\rangle,\ p_1(r)+1 \le 4r-1,$$
$$\delta^2_{1A_2} = \langle 2r,\ p_1(r)-1\rangle,\ p_1(r)-1 \le 4r-1,$$
$$\delta^2_{2A_2} = \langle 2r,\ p_1(r)+1\rangle,\ p_1(r)+1 \le 4r-1,$$
$$\delta^2_{1B_3} = \langle 2r,\ 2p_1(r)-2\rangle,\ 2p_1(r)-2 \le 4r-1,$$
$$\delta^2_{2B_3} = \langle 2r+2,\ 2p_1(r)\rangle,\ 2p_1(r) \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{1A_4} = \langle 2r+2,\ p_1(r)+1\rangle,\ p_1(r)+1 \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{2A_4} = \langle 2r+2,\ p_1(r)-1\rangle,\ p_1(r)-1 \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{1A_5} = \langle 2r+2,\ p_1(r)+1\rangle,\ p_1(r)+1 \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{2A_5} = \langle 2r+2,\ p_1(r)-1\rangle,\ p_1(r)-1 \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{1B_6} = \langle 2r+2,\ 2p_1(r)\rangle,\ 2p_1(r) \le 4r+3,$$
$$\delta^2_{2B_6} = \langle 2r,\ 2p_1(r)-2\rangle,\ 2p_1(r)-2 \le 4r-1.$$

Отсюда следует, что звезды элементов $r^1_{j_1}$, $O_R(r^1_{j_1}) = O_{j_1}$ вычисляются следующим образом:

$$O_{j_1A} = (j_1 = \langle 2r+2,\ p_2(r) = 2t+1 \le 4r+3\rangle;$$
$$j^1_2 = \langle 2r+2,\ p_2(r)-1 = 2t \le 4r+3\rangle;$$
$$j^2_2 = \langle 2r+2,\ p_2(r)+1 = 2t+2 \le 4r+3\rangle),$$

$$O_{j_1B} = (j_1 = \langle 2r+1,\ p_1(r) = 2t+2 \le 2r+1\rangle;$$
$$j^1_2 = \langle 2r,\ 2p_1(r) = 4t+4 \le 4r+3\rangle;$$
$$j^2_2 = \langle 2r,\ 2p_1(r)-2 = 4t+2 \le 4r-1\rangle),$$

а звезда O_{j_0} вычисляется по соотношению:

$$O_{j_0} = (j_0 = \langle 2r+1,\ 2t+1 \le 2r+1\rangle;$$
$$\delta^1_1 = \langle 2r,\ 4t-1 \le 4r-1\rangle;$$
$$\delta^1_2 = \langle 2r,\ 4t+1 \le 4r-1\rangle;$$
$$\delta^1_3 = \langle 2r+1,\ 2t+2 \le 2r+1\rangle;$$
$$\delta^1_4 = \langle 2r+2,\ 4t+1 \le 4r+3\rangle;$$
$$\delta^1_5 = \langle 2r+2,\ 4t+3 \le 4r+3\rangle;$$
$$\delta^1_6 = \langle 2r+1,\ 2t \le 2r+1\rangle;$$

$$\delta^2_{1A_1} \equiv \delta^2_{2B_6} = \langle\, 2r,\ 4t-2 \le 4r-1 \,\rangle \ ;$$

$$\delta^2_{2A_1} \equiv \delta^2_{1A_2} = \langle\, 2r,\ 4t \le 4r-1 \,\rangle \ ;$$

$$\delta^2_{2A_2} \equiv \delta^2_{1B_3} = \langle\, 2r,\ 4t+2 \le 4r-1 \,\rangle \ ;$$

$$\delta^2_{2B_3} \equiv \delta^2_{1A_5} = \langle 2r+2,\ 4t+4 \le 4r+3 \,\rangle \ ;$$

$$\delta^2_{1A_4} \equiv \delta^2_{2A_5} = \langle\, 2r+2,\ 4t+2 \le 4r+3 \,\rangle \ ;$$

$$\delta^2_{2A_4} \equiv \delta^2_{1B_6} = \langle\, 2r+2,\ 4t \le 4r+3 \,\rangle);$$

Аналогично получим комбинаторные замыкания A_{j_0}, A_{j_1} A_{j_2} используя [6.I.2]

$$A_{j_0} = (j_0 = \langle\, 2r+1,\ 2t+1 \le 2r+1 \,\rangle\ ).$$

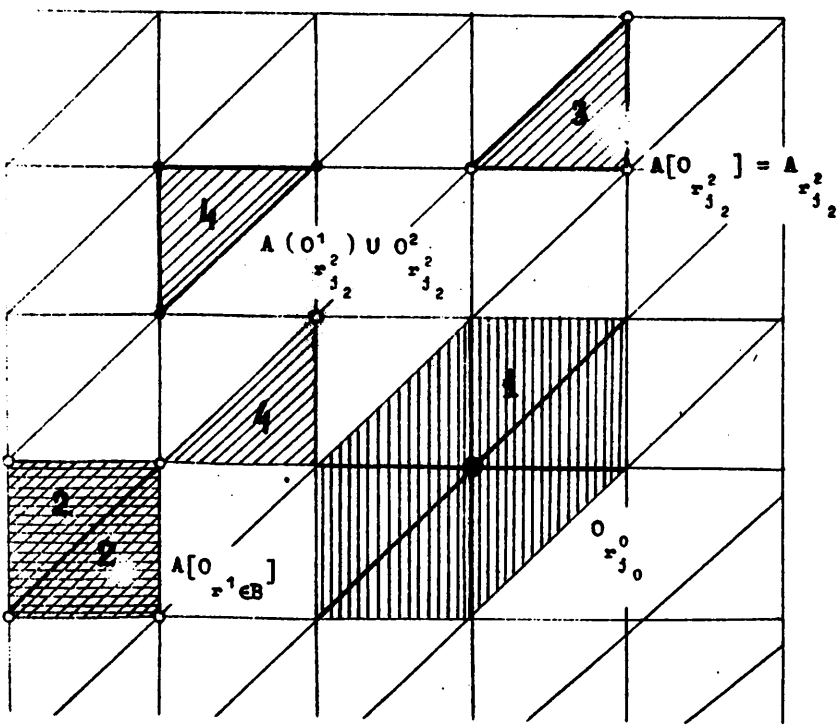


Рис. 2. Примеры открытых и замкнутых множеств в $R^{(2)}$.

6.2.0. Рассмотрим некоторые покрытия $R^{(2)}$

$$\alpha^{1}_{R^{(2)}} = \{ 0_{j_0} \} , \langle j_0 = 2r+1, 2t+1 \leq 2r+1 \rangle .$$

Покрытие $\alpha^{1}_{R^{(2)}}$ – правильное, открытое покрытие пространства $R^{(2)}$.

6.2.1. $\alpha^{2}_{R^{(2)}} = A \{(0_{j_1 B^{(2)}})\}, \langle j_1 B^{(2)} = 2r+1, 2t+2 \leq 2r+1 \rangle .$

Вычислим $A(0_{j_1 B^{(2)}}) = A_{j_1} \cup A_{j^1_2} \cup A_{j^2_2}$,

$$0_{j_1 B^{(2)}} = (j_1 = \langle 2r+1, 2t+2 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j^1_2 = \langle 2r, 4t+4 \leq 4r+3 \rangle ;$$
$$j^2_2 = \langle 2r, 4t+2 \leq 4r-1 \rangle).$$

$$A_{j_1} = (j_1, j_{01}, j_{02}) =$$
$$(j_1 = \langle 2r+1, 2t+2 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j_{01} = \langle 2r+1, 2t+2 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j_{02} = \langle 2r+1, 2t+3 \leq 2r+1 \rangle).$$

$$A_{j^1_2} = (j^1_2, j^1_{021}, j^1_{022}, j^1_{023}, j^1_{121}, j^1_{122}, j^1_{123}) =$$
$$= (j^1_2 = \langle 2r, 4t+4 \leq 4r+3 \rangle ;$$
$$j^1_{021} = \langle 2r-1, 2t+1 \leq 2r-1 \rangle ;$$
$$j^1_{022} = \langle 2r-1, 2t+3 \leq 2r-1 \rangle ;$$
$$j^1_{023} = \langle 2r+1, 2t+3 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j^1_{121} = \langle 2r, 4t+3 \leq 4r+3 \rangle ;$$
$$j^1_{122} = \langle 2r, 4t+5 \leq 4r+3 \rangle ;$$
$$j^1_{123} = \langle 2r-1, 2t+2 \leq 2r-1 \rangle).$$

$$A_{j^2_2} = (j^2_2, j^2_{021}, j^2_{022}, j^2_{023}, j^2_{121}, j^2_{122}, j^2_{123}) =$$
$$= (j^2_2 = \langle 2r, 4t+2 \leq 4r-1 \rangle ;$$
$$j^2_{021} = \langle 2r-1, 2t+1 \leq 2r-1 \rangle ;$$
$$j^2_{022} = \langle 2r+1, 2t+3 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j^2_{023} = \langle 2r+1, 2t+1 \leq 2r+1 \rangle ;$$
$$j^2_{121} = \langle 2r, 4t+3 \leq 4r-1 \rangle ;$$
$$j^2_{122} = \langle 2r, 4t+1 \leq 4r-1 \rangle ;$$
$$j^2_{123} = \langle 2r+1, 2t+2 \leq 2r+1 \rangle).$$

Следовательно, $A(O_{j_1 B^{(2)}}) =$

$$= (\langle 2r+1,\ 2t+2 \le 2r+1 \rangle,\ \langle 2r,\ 4t+4 \le 4r+3 \rangle,\ \langle 2r,\ 4t+2 \le 4r-1 \rangle,\ \langle 2r+1,\ 2t+1 \le 2r+1 \rangle,\ \langle 2r+1,\ 2t+3 \le 2r+1 \rangle,\ \langle 2r-1,\ 2t+1 \le 2r-1 \rangle,\ \langle 2r-1,\ 2t+3 \le 2r-1 \rangle,\ \langle 2r,\ 4t+3 \le 4r+3 \rangle,\ \langle 2r,\ 4t+5 \le 4r+3 \rangle,\ \langle 2r-1,\ 2t+2 \le 2r-1 \rangle,\ \langle 2r,\ 4t+1 \le 4r-1 \rangle).$$

Очевидно, что $\alpha^2_{R^{(2)}}$ – правильное, замкнутое покрытие.

6.2.2.

$$\alpha^3_{R^{(2)}} = \{A[O_{r^2_{j^2}}]\} = \{\{A(O_{j^1_2})\}\{A(O_{j^2_2})\}\} = \{\{A_{j^1_2}\},\{A_{j^2_2}\}\},$$

где $A_{j^1_2}$ и $A_{j^2_2}$ получены в [6.2.I]. Покрытие $\alpha^3_{R^{(2)}}$ замкнутое и правильное.

6.2.3. $$\alpha^4_{R^{(2)}} = \{A(O_{r^2_{j^1_2}}) \cup O_{r^2_{j^2_2}}\}.$$

$\alpha^4_{R^{(2)}}$ – правильное открытое покрытие.

6.2.4. $\alpha^5_{R^{(2)}} = \{\sigma_{j_0}\}$ где множество σ_{j_0} определим рекуррентно:

$$j_0 = \langle 2r+1,\ 2t+1 \le 2r+1 \rangle,$$

$$\sigma_{j_0} = \langle 1,1 \rangle = O_{(1,1)},$$

$$\sigma_{j_0^1} = \sigma_{j_0} \cup O_{j_0^1},$$

где j_0' следует за j_0.

например, пусть $r = 4$, $t = 3$, тогда

$$j_0 = \langle 9,7 \rangle, \quad j_0' = \langle 9,9 \rangle,$$
$$(j_0')' = \langle 11,1 \rangle, \dots\dots\dots$$

$$\mathcal{O}_{\langle 9,9\rangle} = \mathcal{O}_{\langle 9,7\rangle} \cup O_{\langle 9,9\rangle},$$
$$\mathcal{O}_{\langle 9,7\rangle} = \mathcal{O}_{\langle 9,5\rangle} \cup O_{\langle 9,7\rangle},$$
$$\mathcal{O}_{\langle 9,5\rangle} = \mathcal{O}_{\langle 9,3\rangle} \cup O_{\langle 9,5\rangle},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathcal{O}_{\langle 1,1\rangle} = O_{\langle 1,1\rangle}.$$

Откуда соединением получаем

$$\mathcal{O}_{\langle 9,9\rangle} = O_{\langle 1,1\rangle} \cup \dots \cup O_{\langle 9,5\rangle} \cup O_{\langle 9,7\rangle} \cup O_{\langle 9,9\rangle},$$

т.е. множество $\mathcal{O}_{\langle 9,9\rangle}$ равно соединению звезд всех элементов $r^0_{j_0}$, имеющих номера меньше, чем номер $\langle 9,9 \rangle$. Покрытие $\alpha^5_{R^{(2)}}$ неправильное, открытое покрытие.

7.0.0. Сети в $R^{(2)}$.

7.I.0. Сети в $R^{(2)}$ с покрытием $\alpha^1_{R^{(2)}}$ [6.2.0]. Открытые множества сети $e_{R^{(2)}}$: $E_{j_0} = E \cap O_{j_0}$.

$$E_{j_0} = \{E_{j_0}, E^1_{j_1}, \dots, E^6_{j_1}, E^1_{j_2}, \dots, E^6_{j_2}\}.$$

При этом оказывается, что все пересечения второго порядка $O_{j_0} \cap^{(2)} O_{j_0^i}$, $i = 1,\dots,6$ не пусты и состоят из одного элемента $r^1_{j_1}$ и двух элементов $r^2_{j_2}$. Найдем пересечения третьего порядка

$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_0^i}, O_{j_0^j}),\ i \neq j;\ i,j = 1,2,\dots,6,$$

предварительно переобозначив $j_0^1 = j_1$. Следующие из них состоят из единственного элемента $r^2_{j_2}$:

$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_1}, O_{j_2}) = \langle j_2 = 2r+2,\ 4t \le 4r+3 \rangle,$$
$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_1}, O_{j_3}) = \langle j_2 = 2r+2,\ 4t-2 \le 4r+3 \rangle,$$
$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_3}, O_{j_5}) = \langle j_2 = 2r,\ 4t-4 \le 4r-1 \rangle,$$

$$(O_{j_0}, O_{j_5}, O_{j_6}) = \langle j_2 = 2r,\ 4t-2 \le 4r-1 \rangle ,$$

$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_6}, O_{j_4}) = \langle j_2 = 2r,\ 4t \le 4r-1 \rangle ,$$

$$\cap^{(3)}(O_{j_0}, O_{j_4}, O_{j_2}) = \langle j_2 = 2r+2,\ 4t+2 \le 4r+3 \rangle .$$

а остальные пересечения пусты. Очевидно, отношение соседства, определяемое непустыми пересечениями второго порядка, включается в отношение, определяемое пересечениями третьего порядка для случая сети [7.I.0],

7.I.I. Первый вариант сети (см. рис. 3)

$$E_{j_0} = (E^1_{j_2} \cup \ \dots \cup E^6_{j_2}), \quad |E^i_{j_2}| = 1,$$

$$E^i_{j_2} = e^{1i}_{j_2}, \ i = 1,\dots,6. \quad |E_{j_0}| = 6.$$

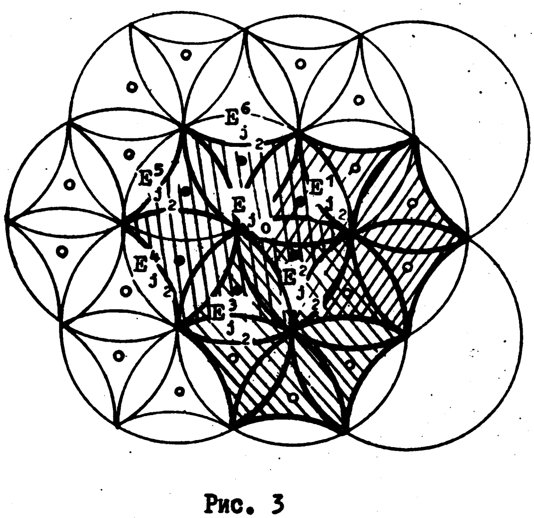


Рис. 3

7.I.2. Второй вариант сети (см. рис. 4)

$$E_{j_0} = [(\bigcup_{i=1}^{6} E^i_{j_1}) \cup (\bigcup_{i=1}^{6} E^i_{j_2})],$$

$$|E^i_{j_1}| = 1; \quad E^i_{j_1} = (e^{1i}_{j_1}), \quad |E^i_{j_2}| = 2, \ E^i_{j_2} = (e^{1i}_{j_2}, e^{2i}_{j_2}).$$

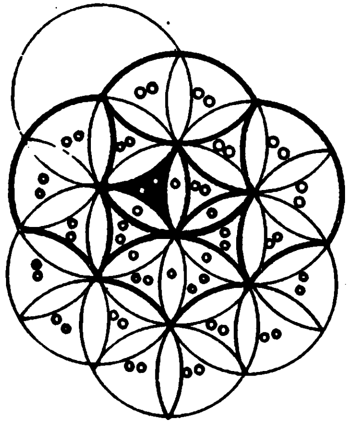


Рис. 4.

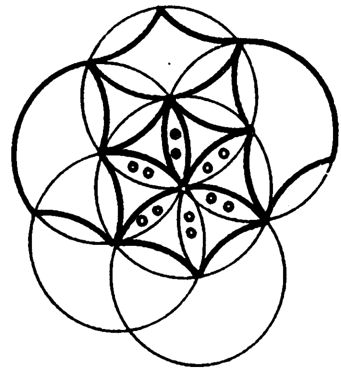


Рис. 5.

7.I.3. Третий вариант сети (см. рис. 5)

$$E_{j_0} = \left[\left(\bigcup_{i=1}^{6} E^{i}_{j_1} \right) \cup E_{j_0} \right], \quad |E^{i}_{j_1}| = 2, \quad |E_{j_0}| = 1.$$

7.I.4. Варианты сети для покрытия $\alpha^{2}_{R^{(2)}}$

$$E_{j_1} = (E_{j_0^1}, E_{j_0^2}, E_{j_0^3}, E_{j_0^4}, E_{j_1^1}, E_{j_1^2}, E_{j_1^3}, E_{j_1^4}, E_{j_1^5}, E_{j_1^1}, E_{j_2^2}).$$

7.I.5. Первый вариант (см. рис. 6а)

$$E_{j_0^1} = \dots = E_{j_0^4} = \phi; \quad E_{j_1^1} = \phi; \quad E_{j_2^1} = E_{j_2^2} = \phi,$$

$$|E_{j_1^2}| = |E_{j_1^3}| = \dots = |E_{j_1^5}| = 2; \quad E^{i}_{j_1} = (e^{i1}_{j_1}, e^{i2}_{j_1}), \; i = 2,3,4,$$

7.I.6. Второй вариант (см. рис. 6б)

$$|E_{j_0^1}| = \dots = |E_{j_0^4}| = 1 \text{ и } [7.I.5].$$

7.I.7. Вариант сети для неправильного регулярного покрытия $\alpha^{5}_{R^{(2)}}$ (см. рис. 7)

$$E_{j_0} = e_{j_0}; \qquad |E_{j_0}| = 1,$$

остальные множества пусты.

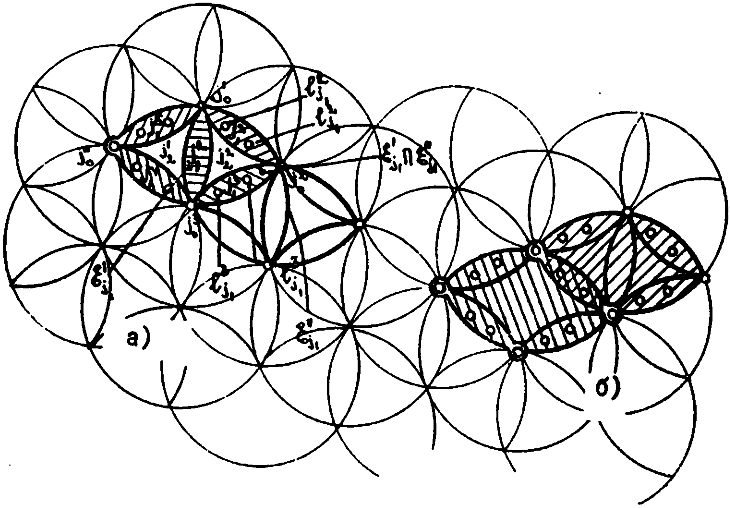


Рис. 6

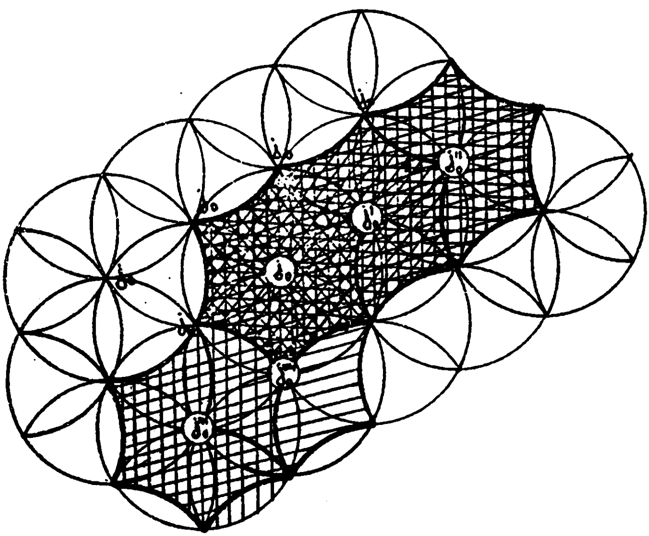


Рис. 7

8.0.0. Примеры вариантов моделей вычислительных к-сред.

8.I.0. $(R^{(2)}, \alpha^1_{R^{(2)}})$ - среда. Обозначим

$$\mathfrak{X}_{\jmath_0} = (x^1_{\jmath_2}, \ldots, x^6_{\jmath_2}) = (x_1, \ldots, x_6)_{\jmath_2}.$$

С каждым $e^{1i}_{\jmath_2}$ свяжем согласно [I.3.0] $x^i_{\jmath_2}$. Пусть также заданы

$$\Upsilon : (s_{\varkappa_1}, s_{\varkappa_2}, s_{\varkappa_3}, s_1)$$

и

$$\tilde{F} : (\&, \vee, \neg, \delta)$$

и пусть выполняются аксиомы $A_0 . A_5$. Очевидно, имеем модель варианта совершенно однородной вычислительной среды. На рис. 8

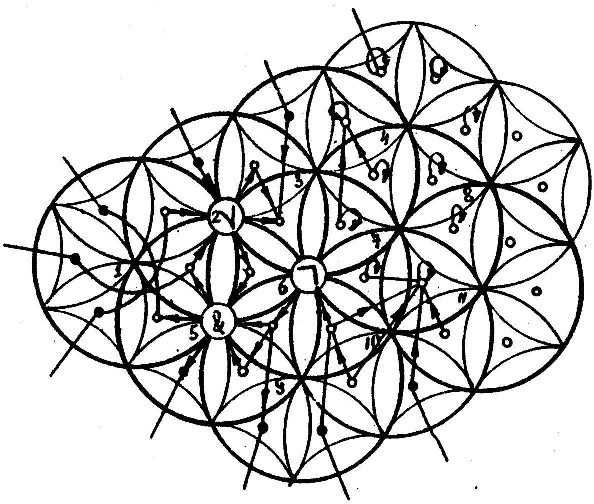


Рис. 8

приведена диаграмма участка данного варианта среды, настроенного в соответствии с приводимой ниже программой и определением $s_{\varkappa_1}$, s_1.

A_0 : " Входы (4,5)"

..грамма:

$$E_{j_1} - s_{\varkappa_1}$$
$$E_{j_2} - \vee$$
$$E_{j_3} - s_{\varkappa_2}$$
$$E_{j_4} - s_1$$
$$E_{j_5} - \&$$
$$E_{j_6} - \neg$$
$$E_{j_7} - s_1$$
$$E_{j_8} - s_1$$
$$E_{j_9} - s_{\varkappa_2}$$
$$E_{j_{10}} - s_{\varkappa_3}$$

$$s_{\varkappa_1} = \begin{vmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & I & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad s_{\varkappa_2} = \begin{vmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ I & I & I & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix},$$

$$s_{\varkappa_3} = \begin{vmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ I & I & I & I & I & I \end{vmatrix}, \qquad s_1 = \begin{vmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

8.2.0. Вычислительная $(R^{(2)}, \alpha^2_{R^{(2)}})$ - среда (рис. 9)

$$\mathfrak{X}_{j_1} = (\mathfrak{X}_{j_1^2} \cup \mathfrak{X}_{j_1^3} \cup \mathfrak{X}_{j_1^4} \cup \mathfrak{X}_{j_1^5}),$$

где

$$\mathfrak{X}_{j_1^i} = (x^1_{j_1^i}, x^2_{j_2^i}) \qquad \text{для всех } i = 2,3,4,5 .$$

Введем переобозначения $x^1_{j_1^i} = x^1_i$. Пусть задан базис

$$\tilde{F} = f_1 = \delta^{-1}[\neg(x^1_2 \vee x^1_3 \vee x^1_4 \vee x^1_5)] = (x^2_2, x^2_3, x^2_4, x^2_5),$$

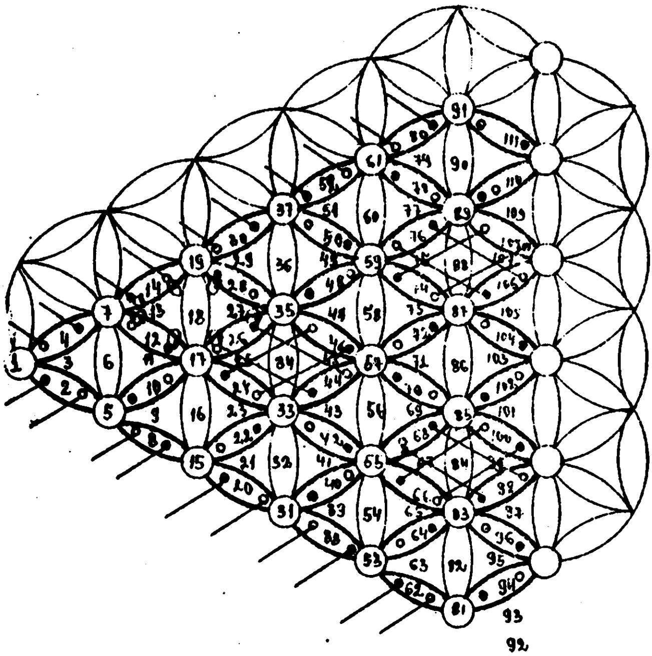
$$\Upsilon = (s_{\varkappa_1}, s_{\varkappa_2}, \ldots, s_{\varkappa_{14}}),$$

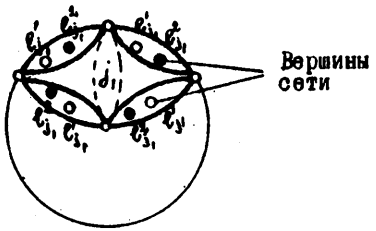
где

$$s_{\varkappa_1} = \begin{vmatrix} x^1_2, & x^2_2, & x^1_3, & x^2_3, & x^1_4, & x^2_4, & x^1_5, & x^2_5 \\ x^2_4, & x^1_4, & x^2_5, & x^1_5, & x^2_2, & x^1_2, & x^2_3, & x^1_3 \end{vmatrix},$$

$$s_{\varkappa_2} = \begin{vmatrix} x^1_2, & x^1_3, & x^1_4, & x^1_5, & x^2_2, & x^2_3, & x^2_4, & x^2_5 \\ \emptyset, & x^1_3, & x^1_4, & x^1_5, & x^2_2, & x^2_3, & x^2_4, & x^2_5 \end{vmatrix},$$

: :





Элемент покрытия
замкнутое множество с
номером j_1

Рис. 9

$$s_{\text{и}_{14}} = \begin{vmatrix} x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, \dots \\ \phi, \phi, \phi, \phi, \dots \end{vmatrix}.$$

Пусть известно, что "входы" есть $x^2_{j_1^1}, (A_0)$ и известно также, что для всех

$$j^1_{1B} = \langle 4r + 3, 4t \le 4r + 3 \rangle, \; r = 1,2,\dots; \; t = 1,2,\dots;$$

выполняется аксиома A_1, т.е. для $E^1 = \{E_{j_1^1}\}$ с множествами $E^1_{j_1 B}$ сьязано отображение $s_{\text{и}_1}$; а для множеств $E_{j_1} \notin E^1$ выполняется аксиома A_6.

Заметим, что в данном случае задание вычислительной среды свелось к заданию двух подсред:

$$\langle E^1; \gamma; s_{\text{и}_1}; \; A_1, A_0 \rangle$$

и

$$\langle E | E^1; \tilde{F}; \gamma; s_{\text{и}_2}, \dots, s_{\text{и}_{14}}; \; A_0, A_6 \rangle.$$

Данный вариант относится к разновидности не совершенно однородных вычислительных сред. Рисунок 9 приведен с соблюдением следующих условий:

I. $\max (j_1 B) = 90$.

2. E_0 : пара $(e^2, e^1) \in \{E_{j_1^1 A}\}$,

где $j_1^1 A = (\langle 2r + 2, 2r + 2 \rangle, \langle 2r + 2, 1 \rangle)$.

3. $j_1 = \langle 2r + 1, 2t + 2 \le 2r + 1 \rangle$,

где $r = 0,1,\dots;$ $t = 0,1,\dots$.

По приведенным соотношениям построена таблица. На рис. 9 часть элементов "настроена" согласно следующему примеру:

$$j_1 = 18 \; : \; (s_{\text{и}}, f_1),$$

$$[x^2_{14}; x^2_{28}; x^2_{26} = x^1_{44}; x^2_{12}] = \overline{(x^1_{14} \vee (x^1_{26} = x^2_{44}) \vee x^1_{12})}.$$

8.3.0. Аналогично приведенным примерам можно представить любые другие варианты $\mathfrak{D}$ - сред, в том числе и над сетями с неправильными, но регулярными покрытиями.

Таблица

	координаты	номера			
$E_{3,1}$	(I; -)	-	-	-	-
	(3; 2) (3; -)	6	-	-	-
	(5; 2) (5; 4) (5, -)	I6	I8	-	-
	(7; 2) (7; 4) (7;6)(7; -)	32	34	36	-
	(9;...)(9;...)(9;...)(9;...)(9;-)	54	56	58	60
	. . . .				
	. . . .				
$E^{1}_{3,1}$	(7; 4)(7; -)	34			
	(II;4)(II;8)(II; -)	84	88		
	. . . .				

Литература

1. Э.В. Евреинов. Теоретические основы построения вычислительных сред. Сб. Вычислительные системы,Новосибирск, 1965, вып. 16, 3-72.
2. Э.В. Евреинов. О микроструктуре элементарных машин вычислительной системы. Сб. Вычислительные системы.Новосибирск, 1962, вып. 4, 3-28.
3. П.С. Александров. Комбинаторная топология. ГТИ, 1947. М.
4. П.С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. ГТИ, 1948, М.
5. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. ОНТИ, НКТП, СССР. 1937.
6. Э.В. Евреинов, Ю.Г. Косарев. Однородные универсальные системы высокой производительности. Наука, Новосибирск. 1967.
7. В.В. Игнатущенко. Асинхронные эквисторные структуры. Вычислительные системы. Труды симпозиума. СО АН СССР. Новосибирск, 1967. 197-203.
8. А.И. Мишин, В.Г. Хрущев. Некоторые особенности реализации логических схем в асинхронных вычислительных средах. Вычислительные системы. Труды симпозиума. СО АН СССР. Новосибирск, 1967. 223-230.
9. Т.М. Кокочашвили. Один вариант однородной дискретной структуры с коллективным поведением ячеек. Вычислительные системы. Труды симпозиума. СО АН СССР. Новосибирск. 1967, 248-256.

10. Б.А. Трахтенброт. Схемы в групповых средах. Доклад на симпозиуме Вычислительные системы. Новосибирск, 1967.

11. А.И. Мишин. Об элементах вычислительной среды. Комбинированная вычислительная система среда - машина. Вычислительные системы. Труды Всесоюзной конференции по вычислительным системам и средам. Новосибирск, 1968, вып.2.

12. П.С. Александров. О понятии пространства в топологии УМН, т. II, вып. I (17), 1947.

13. А.И. Мальцев. Теория моделей (в печати).

14. Б.И. Плоткин. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., 1966.

15. С.В. Яблонский. Основные понятия кибернетики. Сб. Проблемы кибернетики. М., Физматгиз, 1959, вып. 2, 7-38.