

КВАЗИКОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МГД ОБЪЕКТОВ

Ю.И. Самойленко

(Киев)

I. Для стабилизации поверхности жидкого металла или плазмы, удерживаемых в магнитном поле, предлагались различные системы управления, состоящие из дискретных сетей датчиков, исполнительных органов и отдельной управляющей машины [1 - 3]. Однако структура таких систем не вполне соответствует специфике МГД объектов. Наличие большого числа промежуточных каналов передачи информации, а также дискретный характер органов измерения и управления снижает быстродействие и разрешающую способность управляющей системы.

Возможен принципиально иной путь осуществления распределенного управления континуальными объектами, заключающийся в непосредственном преобразовании поля состояния объекта в поле управляющего воздействия, что может быть достигнуто при помощи специальным образом синтезируемых управляющих сред. Это могут быть либо физически сплошные среды, в которых требуемые операторы управления реализуются за счет специфики их микроструктуры, а также макроскопической неоднородности, либо искусственные среды с квазипериодической микроструктурой, определяемой исходя из поставленной задачи управления. В обоих случаях возможна реализация широкого класса операторов преобразования полей, в частности, распределенного усиления, на чем мы здесь подробно не останавливаемся.

Одна из простейших распределенных систем стабилизации поверхностей деформируемых проводников автоматически управляемым магнитным полем рассмотрена в [4]. В настоящей работе рассматривается специализированное устройство для стабилизации осесимметрических возмущений жидкого проводника цилиндрической конфигурации.

2. Система стабилизации, описанная ниже, является частным случаем распределенных аналоговых операторных преобразователей электромагнитного поля с кристаллической микроструктурой. Такого рода преобразователь представляет собой сложную систему управления, состоящую из большого числа подсистем, распределенных в пространстве определенным образом. Не затрагивая здесь стохастические принципы распределения, остановимся лишь на способе построения систем с кристаллической структурой.

Выберем определенным образом тройку некопланарных основных векторов \vec{a}_j ($j = 1, 2, 3$) кристаллической решетки. На их основе построим решетку Браве, задаваемую с помощью векторов $\vec{a}_{n_1 n_2 n_3} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$, ($n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). (1)

Элементы симметрии построенной таким образом решетки образуют определенную группу G кристалла. Как известно, существует всего 230 различных кристаллических групп, так что выбор G можно осуществлять большим числом способов. Однако в ряде практически важных случаев можно ограничиться простейшими вариантами кристаллических решеток.

Все подсистемы, или "атомы", входящие в кристалл, разобьем на совокупности эквивалентных подсистем, состоящих из "атомов" определенного сорта. Здесь рассматриваются подсистемы с волокнистой структурой, задаваемые пространственными графами $\Gamma^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, v$; α - сорт "атома"). Возможны и другие виды структур, в частности, слоистые структуры. Ребра графа $\gamma^{(\alpha\beta)}$ ($\beta = 1, \dots, n_\alpha$) физически представляют собой волокна, толщина которых значительно меньше их длины, изготовленные из материалов, характеризующихся обобщенными тензорами $\epsilon_{ij}^{(\alpha\beta)}$ диэлектрической проницаемости. Для полного описания системы необходимо указать форму ребер $\gamma^{(\alpha\beta)}$, определяемую уравнениями вида

$$\vec{r} = \vec{r}^{(\alpha\beta)}(\lambda) \quad (\lambda - \text{длина дуги}), \quad (2)$$

и функции распределения параметров $\epsilon_{ij}^{(\alpha\beta)}$ вдоль ребер:

$$\epsilon_{ij}^{(\alpha\beta)} = \epsilon_{ij}^{(\alpha\beta)}(\omega, \vec{k}, \lambda), \quad (3)$$

где ω - частота, \vec{k} - волновой вектор.

Способ энергоснабжения среды в линеаризованной модели учитывается видом тензора (3) и наличием стороннего электромагнитного поля. Вещественная ϵ'_{ij} и мнимая ϵ''_{ij} части тензора (3) должны удовлетворять известному условию физической реализуемости Крамерса - Кронига:

$$\epsilon'_{ij}(\omega, \vec{k}, \lambda) - \epsilon_{ij}(\infty, \vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''_{ij}(\omega', \vec{k}, \lambda)}{\omega' - \omega} d\omega',$$

$$\epsilon''_{ij}(\omega, \vec{k}, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_{ij}(\infty, \vec{k}, \lambda) - \epsilon'_{ij}(\omega', \vec{k}, \lambda)}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4)$$

Общая задача физического синтеза управляющего кристалла заключается в определении кристаллической группы G , вида функций (2) и (3) при соблюдении условий (4) таким образом, чтобы объект в замкнутой системе управления обладал требуемыми динамическими свойствами, в частности, устойчивостью, оптимальностью по заданным критериям и т.п. Управляющий кристалл в целом определяется совокупностью пространственных контуров

$$\vec{r}_{n_1 n_2 n_3}^{(\alpha\beta)}(\lambda) = \vec{a}_{n_1 n_2 n_3} + \vec{\rho}^{(\alpha\beta)}(\lambda) \quad (n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5)$$

получаемых сдвигом "атомов" в узлы решетки Браве, а также семейством функций (3). На рис. I показана схема построения кристалла с волокнистой структурой.

3. Один из способов исследования процессов в управляющих кристаллах может быть основан на использовании свойств симметрии, определяемых группой G . Возбужденное состояние кристалла описывается семейством функций $\vec{j}_{n_1 n_2 n_3}^{(\alpha)}$ и $\rho_{n_1 n_2 n_3}^{(\alpha)}$, характеризующих распределение токов и зарядов по ребрам графов $\Gamma^{(\alpha)}$. При преобразованиях симметрии из G совокупность указанных функций преобразуется по линейному представлению $T(G)$ группы G . Разложив $T(G)$ на неприводимые представления $\tau_1(G), \dots, \tau_q(G)$ группы G , можно существенно упростить уравнения динамики системы.

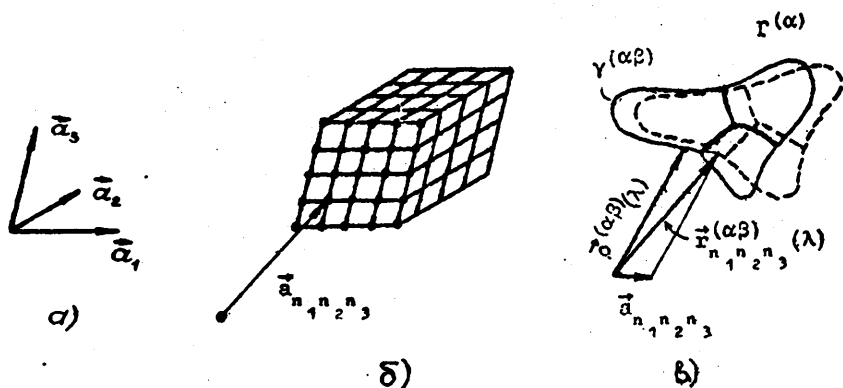


Рис. I.

Другой способ, который и применен в данной работе, основан на выводе уравнений для макроскопических, усредненных полей. По аналогии с понятием физически бесконечно малого объема введем понятие технически бесконечно малого объема. Он должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить требуемую точность макроскопической модели, но в то же время быть достаточно большим, чтобы средние по этому объему величины достаточно мало зависели от его вариаций. Данное условие выполнимо тогда, когда распределенное устройство осуществляется в виде либо физически сплошной среды, либо "технически сплошной" среды, когда в технически бесконечно малом объеме устройства содержится достаточно большое число отдельных конструктивных элементов.

В физике принято называть квазиконтинуальными такие модели, которые описывают дискретные системы, но величины в которых путем локального усреднения по физически бесконечно малому объему представляются полями, то есть гладкими функциями пространственно-временных координат. По аналогии будем называть квазиконтинуальными (в техническом смысле) устройства, построенные на основе применения технически сплошных сред.

4. Рассмотрим задачу стабилизации свободной границы деформируемого проводника, например, гибкого, пластичного или жидкого металла при помощи квазиконтинуальной резонансной оболочки с волокнистой структурой. Возьмем вначале тороидальную конфигурацию жидкого металла, удерживаемого магнитным полем круговой поляризации.

Исходя из требования макроскопической однородности распределенной регулирующей среды в направлениях, параллельных стабилизируемой поверхности, среда должна представлять собой слой или тонкую оболочку тороидальной конфигурации. При возникновении деформаций поверхности этот слой должен перераспределять магнитное давление в соответствии с необходимым законом обратной связи. Для реализации требуемой пространственно-временной операторной зависимости давления от формы поверхности объекта могут быть использованы как неоднородность среды по нормали, так и пространственно-временные дисперсионные свойства.

Тороидальная проводящая оболочка, ток в которой удовлетворяет закону Ома с пространственно-временной дисперсией, может быть изготовлена следующим образом. На тороидальный каркас вначале наматывается одна катушка с определенным законом распределения плотности намотки $K(z)$. Затем наматывается вторая катушка с тем же законом распределения плотности, но с некоторым сдвигом δ относительно первой катушки и т.д. до тех пор, пока не будет совершен полный обход вокруг тора (рис. 2). С точки зрения понятий, введенных в предыдущих раз-

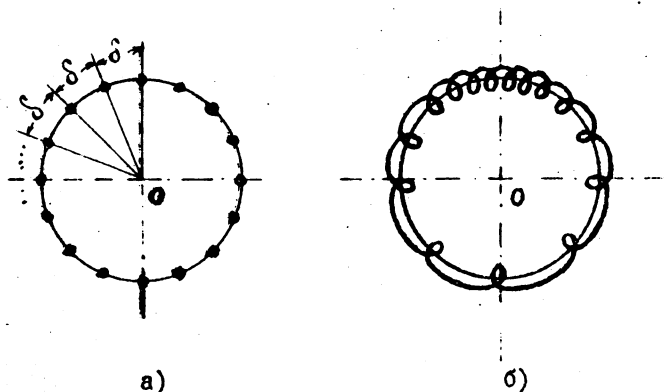


Рис. 2.

делах, описанная система представляет собой цепочку "атомов" - катушек с переменной плотностью намотки, равномерно распределенных на окружности. Данная "молекула" описывается группой симметрии C_n .

Все катушки подключаются параллельно через одинаковые комплексные сопротивления $Z(i\omega)$ к общему источнику переменного напряжения с частотой ω_0 . В результате получается макроскопически однородная волокнистая оболочка, отличающаяся от сплошного кожуха нелокальной зависимостью плотности тока (макроскопической) от напряженности электрического поля.

5. Под конструктивным синтезом оболочки в данном случае будем понимать определение функции плотности намотки $\gamma(z) = \frac{1}{K(z)}$ ($2l$ - длина намотки) по заданному оператору обратной связи. Задачу конструктивного синтеза математически проще рассмотреть для достаточно тонкого тора, который можно приближенно заменить цилиндром конечной длины $2l$ и радиуса r_1 .

Определив циркуляцию напряженности электрического поля \vec{e} вдоль одного из проводников намотки и перейдя к макроскопическим величинам путем локального усреднения, получим операторную зависимость плотности поверхностного тока \vec{j} в оболочке от напряженности поля e :

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{e}, \quad \text{где} \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\varphi^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Интегральный оператор $\hat{\sigma}_\varphi^0$ определяется формулой:

$$j^\varphi(z, i\omega) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l S(z-\xi, i\omega) e^\varphi(r_1, \xi, i\omega) d\xi, \quad (7)$$

где

$$S(z, i\omega) = \frac{2\pi r_1}{\delta} \frac{g(z)}{R + Z[i(\omega + \omega_0)]}.$$

Здесь $g(z) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \gamma(z+\xi) \gamma(\xi) d\xi$, R - сопротивление одной катушки.

Так как скачок компоненты h^z напряженности магнитного поля равен по величине плотности поверхностного тока, то на поверхности S_1 оболочки имеет место граничное условие:

$$h^z(r_1-0, z, i\omega) - h^z(r_1+0, z, i\omega) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l S(z-\xi, i\omega) e^\varphi(r_1, \xi, i\omega) d\xi.$$

Выразив из уравнений Максвелла h^z через $(\text{rot } \vec{e})^z$, получим граничное условие, содержащее только компоненту e^φ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{r=r_1+0} e^\varphi(r, z, i\omega) - \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{r=r_1-0} e^\varphi(r, z, i\omega) = \\ = \frac{1}{l} \int_{-l}^l i\omega_0 \mu_0 S(z-\xi, i\omega) e^\varphi(r_1, \xi, i\omega) d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Для малых возмущений $\rho(z, i\omega)$ свободной границы S_0 стабилизируемого жидкого проводящего цилиндра радиуса r_0 справедливо соотношение:

$$\frac{1}{E_0'} e^\varphi(r_0, z, i\omega) = -\rho(z, i\omega), \quad (9)$$

где E_0' - нормальная производная невозмущенного электрического поля на S_0 . Компонента e^φ ограничена на бесконечности и, кроме того, является периодической функцией переменной z с периодом $2l$. Электрическое поле в вакуумном промежутке между поверхностью жидкого металла S_0 и оболочкой S_1 , а также вне S_1 удовлетворяет уравнению:

$$\Delta e^\varphi - \frac{1}{r^2} e^\varphi = 0. \quad (10)$$

Объединяя указанные требования, ставим задачу: найти функцию $e^\varphi(r, z, i\omega)$, удовлетворяющую уравнению (10) и перечисленным граничным условиям.

Решение этой задачи находится методом разделения переменных. Относительная величина возмущения среднего магнитного давления $\pi(z, i\omega)$ при круговой поляризации магнитного поля на поверхности S_0 выражается через $e^\varphi(r, z, i\omega)$ следующим образом:

$$\pi(z, i\omega) = \frac{1}{P_0} \tilde{p}(z, i\omega) = -2 \frac{\rho(z, i\omega)}{r_0} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^\varphi(r, z, i\omega)}{E_0'} + \frac{e^{\varphi^*}(r, z, -i\omega)}{(E_0')^*} \right]_{r=r_0} \quad (11)$$

Здесь звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины, а волнистой чертой сверху - средние значения. В дальнейшем относительную величину $\pi(z, i\omega)$ для краткости будем называть просто возмущением магнитного давления, а относительную величину $\eta(z, i\omega) = \frac{\rho(z, i\omega)}{r_0}$ - возмущением стабилизируемой поверхности.

6. В результате решения краевой задачи находим $e^\varphi(r, z, i\omega)$ и по формуле (11) определяем возмущение магнитного давления. Величина $\pi(z, i\omega)$ представляет собой сумму двух составляющих:

$$\pi(z, i\omega) = \pi_0(z, i\omega) + \pi_1(z, i\omega).$$

Здесь $\pi_0(z, i\omega)$ представляет собой возмущение магнитного давления, которое имелось бы при отсутствии стабилизирующей оболочки. Эта величина характеризует "самовыраживание" объема (положительное или отрицательное) и выражается через воз-

мущение $\eta(z, i\omega)$ стабилизируемой поверхности следующим образом:

$$\pi_p(z, i\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^0 \left[\sigma_k(i\omega) \cos \frac{k\pi z}{1} + \tau_k(i\omega) \sin \frac{k\pi z}{1} \right],$$

где
$$F_k^0 = -2 \left[1 - \frac{k\pi r_0}{1} \frac{K_0\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)}{K_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)} \right], \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$\sigma_k(i\omega), \tau_k(i\omega)$ — коэффициенты Фурье возмущения $\eta(z, i\omega)$, а $K_0\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right), K_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода. Функция $\pi_p(z, i\omega)$ является реакцией оболочки на возмущение поверхности и характеризует обратную связь. Оператор обратной связи является интегральным оператором следующего вида:

$$\pi_p(z, t) = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} f(z-\xi, t-\tau) \cdot \eta(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (12)$$

где
$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\frac{F_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos \frac{k\pi z}{1} \right) d\omega,$$

$$F_k = F_k(i\omega) = \Phi_k \varepsilon_k [H_k(i\omega) + H_k^*(-i\omega)],$$

$$H_k(i\omega) = \frac{i\omega_0 L}{R + Z[i(\omega + \omega_0)] + i\omega_0 \cdot L \cdot \Psi_k \varepsilon_k},$$

$$L = \mu_0 \frac{2\pi r_1^2}{\delta}, \quad \Phi_0 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2, \quad \Psi_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 \right],$$

$$\Phi_k = \frac{r_0}{r_1} \left[\frac{K_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right)}{K\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)} \right]^2 \frac{I_0\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right) K_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right) + I_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right) K_0\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) K_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) + I_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) K_0\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right)},$$

$$\Psi_k = \frac{1}{k\pi r_1} \frac{K\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right)}{K_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right)} \cdot \frac{I_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) K_1\left(\frac{k\pi r_0}{1}\right) - I_1 \cdot \left(\frac{k\pi r_0}{1}\right) K_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) K_1\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) + I_1 \cdot \left(\frac{k\pi r_1}{1}\right) K_0\left(\frac{k\pi r_1}{1}\right)},$$

(k = 1, 2, ...).

При $\Psi_k g_k = \text{const}$ оператор (12) может быть представлен в виде произведения временного и пространственного операторов. Тогда динамические свойства системы не зависят от номера пространственной гармоники. Будем считать указанное условие выполненным и предположим, что внешнее сопротивление

$Z(i\omega)$ реализуется в виде последовательного соединения конденсатора C_1 , отрицательного (в динамическом режиме) сопротивления R^- и параллельного колебательного контура с резонансным сопротивлением R_{0e_2} , и добротностью Q_2 . Добротность последовательной цепи полагаем равной Q_1 , а резонансные частоты последовательного и параллельного контуров равными ω_0 . Отрицательное (по переменному току) сопротивление R^- используется для компенсации потерь в последовательном контуре с целью увеличения его добротности.

Для рассматриваемого варианта схемы в резонансном приближении временная часть оператора обратной связи имеет вид:

$$W_p(p) = k_0 \frac{\tau_1 p + 1}{\tau_2 p + 1},$$

где

$$k_0 = \frac{2Q}{1 + R_{0e_2}/R_1}, \quad R_1 = R + R^-, \quad \tau_1 = \frac{T_1 + T_2}{1 + R_{0e_2}/R_1};$$

$$\tau_2 = T_2, \quad T_1 = \frac{2Q_1}{\omega_0}, \quad T_2 = \frac{2Q_2}{\omega_0}.$$

7. Располагая явным выражением временной части оператора обратной связи, можно исследовать устойчивость движения стабилизируемой проводящей жидкости. Здесь этот вопрос рассматривается в простейшей постановке, когда уравнение движения поверхности может быть записано следующим образом [5]:

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} p,$$

где ρ_m - плотность, \vec{v} - скорость, p - давление. Для k -й гармоники имеем:

$$\frac{d^2 \eta_k}{dt^2} = \Theta_k^2 \eta_k, \quad \Theta_k = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_m}{k p_0}},$$

где L - характерный размер конфигурации, p_0 - невозмущенное давление. Учитывая, что для квазистатических возмущений цилиндра $\frac{d\pi}{d\eta} = -2$, получаем выражение для оператора объекта:

$$W_0(p) = \frac{1/2}{\Theta_k^2 p^2 - 1}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$\Theta_k^2 \tau_2 p^3 + \Theta_k^2 p^2 + \left(\frac{k_0}{2} \cdot \frac{F_k}{F_0} \tau_1 - \tau_2 \right) p + \frac{k_0}{2} \cdot \frac{F_k}{F_0} - 1 = 0,$$

Применяя критерий Гурвица, получаем условия устойчивости стабилизируемой поверхности при наличии рассмотренной системы регулирования давления магнитного поля:

$$\tau_2 > 0, \quad \tau_1 > \tau_2, \quad k_0 \frac{F_k}{F_0} > 2.$$

Эти условия выполнимы при достаточно высоком качестве последовательного и параллельного контуров, которое достигается за счет применения сопротивлений с падающим участком вольтамперной характеристики, а также регенеративных и параметрических усилителей.

На рис. 3 показана зависимость коэффициента жесткости

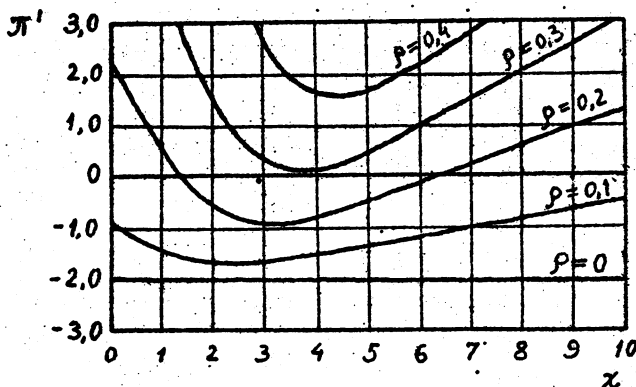


Рис. 3.

стабилизированной поверхности $\pi' = F_k^0 + F_k$ от волнового числа $\kappa = \frac{k \kappa r_0}{1}$ для различных отношений $\rho = \frac{r_0}{r_1}$ радиуса жидкого цилиндра к радиусу стабилизирующей оболочки. Для реализации необходимого пространственного оператора обмотка рассчитывается по приведенным соотношениям между коэффициентами Фурье ядра оператора и функции плотности намотки.

Исследование операторов воложистых сред для преобразования и регулирования электромагнитных процессов показывает, что с их помощью можно получить достаточно высокое быстродействие и разрешающую способность, необходимые для стабилизации МГД объектов. Качественные показатели системы удержания проводящей жидкости при использовании резонансной оболочки с дисперсией оказываются более высокими, чем при сплошном кожухе. Так, например, при относительно невысокой добротности $Q_1 = 50$ критический радиус стабилизируемого цилиндра, как видно из рис. 3, равен $0,3$ радиуса r_1 внешнего цилиндра, а для сплошного кожуха этот радиус равен $0,58 r_1$. "Степень сжатия" (по объему) увеличивается почти в 4 раза. С увеличением добротности, например, за счет регенерации активных потерь, "степень сжатия" может быть еще более увеличена без потери устойчивости.

В заключение отметим возможность осуществления перестройки квазиконтинуальных управляющих и стабилизирующих устройств за счет применения ферромагнитных материалов с управляемым подмагничиванием. Необходимость в перестройке может возникнуть при стабилизации цилиндров с переменным радиусом.

Л и т е р а т у р а

1. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. - Кибернетическая стабилизация плазменных неустойчивостей. ЖТФ, 34, 9, 1964.
2. J.R. Melcher. An experiment to Stabilise an Electromechanical Continuum, IEEE Transactions Auto Control, 1965, vol. AC-10, N 4, 466.
3. J.R. Melcher. Control of a Continuum Electromechanical Instability. - Proc. of the IEEE, 1965, vol. 53, N 5, May.
4. Д.И. Самойленко. О разрешающей способности пространственно распределенных систем управления. - Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1966.
5. К. Лонгмайр. Физика плазмы. Атомиздат, М., 1966.