УДК.681.142.019.3

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ

Г.М. Лапир
(Москва)

Рассмотрим некоторый элемент, который с точки зрения своей конструкции и режима работы характеризуется набором n параметров x_i $(i = 1,\dots,n)$. Для надежного функционирования элемента обычно можно указать некоторое множество допустимых значений этих параметров Ω в n-мерном пространстве (область работоспособности) [I]. Если x_i, $i = 1,2,\dots,n$, являются случайными величинами, то естественно рассмотреть задачу о нахождении оптимальных средних значений x_i^0, при которых достигается максимальная вероятность попадания параметров во множество допустимых значений Ω, иными словами, задачу о нахождении таких номинальных значений параметров, при которых достигается максимальный выход пригодных элементов при их массовом изготовлении и максимальная надежность их работы. В общем случае решение указанной задачи достаточно сложно, а обычно используемые упрощенные методы не являются строгими [I, 2].

В соответствии со сказанным вектор оптимального среднего значения $\bar{r}_0$ с компонентами x_i^0 удовлетворяет условию максимума функции

$$P_\Omega(\bar{r}_0) \equiv \int_\Omega f(\bar{r}_0, \bar{r})dv ,$$

где $f(\bar{r}_0, \bar{r})$ – плотность вероятности распределения случайной величины $\bar{r}$ со средним значением $\langle \bar{r} \rangle = \bar{r}_0$, а интеграл берется в n-мерном пространстве по множеству Ω.

Найдем сначала оптимальную точку в случае, когда $f(\bar{r}_0, \bar{r})$ достаточно гладкая функция, которая мало меняется в области Ω.

Это соответствует низкой точности установки параметров элемента (большому "разбросу"). Предполагая, что $f(\bar{r}_0, \bar{r})$ имеет максимум при $\bar{r} = \bar{r}_0$, разложим $f(\bar{r}_0, \bar{r})$ в окрестности точки $\bar{r} = \bar{r}_0$:

$$f(x_i^0, x_i) = f(x_i^0, x_i^0) + \sum_{i,j} a_{ij}(\bar{r}_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + \ldots$$

Тогда из условия стационарности $P_\Omega(\bar{r}_0)$ в точке максимума по $\bar{r}_0$ имеем

$$\frac{\partial P_\Omega(\bar{r}_0, \bar{r})}{\partial x_k^0} = \varphi_k S + S\Big[\sum_{i,j} a_{ijk} x_i^0 x_j^0 + 2 \cdot \sum_i a_{ki} x_i^0\Big] +$$

$$+ \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ijk} x_i x_j dv - 2\sum_{i,j} a_{ijk} x_i^0 \int_\Omega x_j dv - 2\sum_i a_{ik} \int_\Omega x_i dv = 0,$$

где

$$\varphi_k = \left.\frac{\partial f(\bar{r}_0, \bar{r})}{\partial x_k^0}\right|_{\bar{r} = \bar{r}_0};$$

$$S = \int_\Omega dv;$$

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial^2 f(\bar{r}_0, \bar{r})}{\partial x_i \cdot \partial x_j}\right|_{\bar{r}_0 = \bar{r}};$$

$$a_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k^0}.$$

В случае $f(\bar{r}_0, \bar{r}) = f(\bar{r}_0 - \bar{r})$, а также в случае, когда $f(\bar{r}_0, \bar{r})$ и a_{ij} медленно меняющиеся функции $\bar{r}_0$ в области Ω имеем

$$\sum_i \Big(2S a_{ki} x_i^0 - 2a_{ki} \int_\Omega x_i dv\Big) = 0,$$

откуда

$$x_i^0 = \frac{\int\limits_\Omega x_i\,dv}{\int\limits_\Omega dv}, \qquad (I)$$

т.е. в этом случае оптимальная точка есть "центр тяжести" множества Ω.

Более точное соотношение получаем, если пренебрегаем только членами с a_{ijk}: $\varphi_k S + \sum_i (2Sa_{ki}x_i^0 - 2a_{ki}\int\limits_\Omega x_i\,dv)$, или

$$x_i^0 = \frac{\int\limits_\Omega x_i\,dv}{\int\limits_\Omega dv} - \frac{1}{2}\sum_i a_{ki}^{-1}(\bar r_0)\cdot\varphi_k(\bar r_0). \qquad (2)$$

Соотношение (2) является рекуррентным. В качестве первого приближения можно взять $\bar r_0$ в поправочном члене из (I). Здесь a_{ki}^{-1} - матрица обратная к a_{ki}.

В наиболее распространенном случае n -мерного нормального распределения

$$f(\bar r_0,\bar r) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\rho_{ik}|^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{ik}\rho_{ik}^{-1}(x_i-x_i^0)(x_k-x_k^0)}, \qquad (3)$$

где $\rho_{ik} = \langle(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^0)\rangle = \sigma_i\sigma_k\rho(i,k)$ - матрица вторых моментов, а $|\rho_{ik}|$-ее детерминант,

$$a_{ki}(\bar r_0) = \frac{\rho_{ki}}{|\rho_{ki}|^{\frac{1}{2}}};$$

$$\varphi_k = \frac{\partial}{\partial x_k^0}(|\rho_{ij}|^{-\frac{1}{2}}) = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial|\rho_{ki}|}{\partial x_k^0}}{|\rho_{ki}|^{3/2}},$$

и соотношение (2) дает

$$x_i^0 = \frac{\int\limits_\Omega x_i dv}{\int\limits_\Omega dv} + \frac{1}{4}\sum_k \frac{\rho_{ki}}{|\rho_{ki}|^2}\cdot\frac{\partial|\rho_{ki}|}{\partial x_k^0}, \qquad (4)$$

что справедливо при $\sigma_i \to \infty$.

Рассмотрим теперь более общий случай произвольной "точности", когда $f(\bar r, \bar r_0) = f(|\bar r_0 - \bar r|)$; в частности, если f - нормальное распределение, то к такому виду оно приводится линейным преобразованием к независимым случайным величинам с одинаковыми дисперсиями:

$$f(\bar r - \bar r_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_k (x_k - x_k^0)^2}. \qquad (5)$$

Для произвольной $f(|\bar r_0 - \bar r|)$ имеем

$$\frac{\partial P_\Omega(\bar r_0)}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega f'(|\bar r_0 - \bar r|)(x_i^0 - x_i)dv,$$

где

$$f' = \frac{df(r)}{d(r^2)}, \quad r = |\bar r_0 - \bar r|;$$

откуда, учитывая, что $\partial P_\Omega(\bar r_0)/\partial x_i^0 = 0$, получаем для оптимальной точки

$$x_i^0 = \frac{\int\limits_\Omega f' x_i dv}{\int\limits_\Omega f' dv}. \qquad (6)$$

Если f - нормальное распределение, то $f' = -\frac{1}{2\sigma^2} f(r)$ и из (6)

$$x_i^0 = \frac{\int\limits_\Omega f(r) x_i dv}{\int\limits_\Omega f(r) dv}, \qquad (7)$$

что можно записать в виде равенства среднего по всему пространству и среднего по допустимому множеству параметров

$$\langle x_i \rangle = \langle x_i \rangle_\Omega. \qquad (8)$$

Таким образом, в случае нормального распределения вида (5) средние значения параметров оптимальны тогда, когда они не меняются после "отбраковки" элементов не "попавших" в Ω.

Покажем теперь, что итеративный процесс нахождения оптимальной точки согласно (7) сходится при любой начальной точке достаточно близкой к оптимальной.

Для сходимости итераций $\bar{x}^k = \varphi(\bar{x}^{k-1})$, как известно, достаточно, чтобы в некоторой выпуклой области G, содержащей решение, собственные значения матрицы $M_{ij} = \max\limits_{G} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ были все по модулю меньше единицы [3].

В нашем случае φ – правая часть (6),

$$m_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\int\limits_{\Omega} f x_i x_j dv}{\int\limits_{\Omega} f dv} - \frac{\int\limits_{\Omega} x_i dv \int\limits_{\Omega} x_j dv}{(\int\limits_{\Omega} f dv)^2}\right] = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \langle\langle\langle x_i \rangle_\Omega - x_i)(\langle x_j\rangle_\Omega - x_j)\rangle_\Omega ,$$

где символ $\langle\ \rangle_\Omega$ – означает среднее по множеству Ω. В точке x_i^0 согласно (8) $\langle x_i\rangle_\Omega = x_i^0$.

Симметричный тензор $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ можно преобразовать к диагональному виду ортогональным преобразованием координат с центром в точке x_i^0. При этом аргумент функции f не меняется, т.к. она зависит только от $|\bar{r}_0 - \bar{r}|$. После преобразования

$m'_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \delta_{ij} \cdot \langle (x_j^0 - x_j)^2\rangle_\Omega$; очевидно, что

$\langle\langle x_j^0 - x_j)^2\rangle_\Omega < \langle\langle x_j^0 - x_j)\rangle = \sigma^2$, а поэтому $m'_{ij} < 1$,

т.е. все собственные значения положительны и меньше 1 в точке x_i^0, а значит в силу непрерывности и в некоторой ее окрестности.

Отметим, что нахождение оптимальной средней точки в рассмотренном случае нормального распределения можно связать с нахождением максимума решения некоторого уравнения в частных производных. Действительно, (5) – есть функция Грина уравнения типа уравнения теплопроводности. Но тогда выражение для

$P_\Omega(\bar{r}_0) = \int\limits_{\Omega} f dv$ есть не что иное как запись решения задачи

Коши для этого уравнения в бесконечном пространстве с начальными условиями $P = 1$-для точек, принадлежащих Ω, и $P = 0$ - для остальных точек.

При этом величина σ играет роль времени.

Таким образом, оптимальная средняя точка в данном случае совпадает с самой "теплой" точкой множества Ω, когда оно "остывает" в n-мерном пространстве, причем "моменту времени" t соответствует среднее квадратичное отклонение σ.

Рассмотрим теперь предельный случай противоположный тому, который мы исследовали первым - случай предельно высокой точности (малый "разброс" параметров).

Пусть в распределении вида (3) точность неограниченно возрастает, $\sum_i \rho_{ii} = \sum_i \sigma_i^2 \to 0$, причем так, что существуют $\lim\limits_{\sum_i \rho_{ii} \to 0} (\sigma_i^2 / \sum_i \sigma_i^2) = b_i$ и пределы собственных векторов ρ_{ik}: $\lim\limits_{\sum_i \rho_{ii} \to 0} \bar{I}_k = \bar{I}_k^0$. Совершим ортогональное преобразование координат так, чтобы оси совпали с векторами $\bar{I}_k^0$, а затем сжатие по осям: $(x_i' - x_i'^0) = b_i (x_i - x_i^0)$.

Тогда распределение (3) будет стремиться к виду

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma} \sum_k (x_k' - x_k^0)^2}, \qquad (10)$$

где

$$\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2 .$$

Докажем, что для распределения вида (10) оптимальная средняя точка при $\sigma_n \to 0$ совпадает с центром максимальной гиперсферы, вписанной в Ω, причем гиперсфера Φ считается вписанной в Ω, если объем их пересечения $\int\limits_{\Phi \cap \Omega} dv$ совпадает с объемом сферы $\int\limits_{\Phi} dv$.

Для доказательства покажем, что для любых точек $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ $P_\Omega(\bar{r}_1) > P_\Omega(\bar{r}_2)$ при $\sigma \to 0$, если $\rho_1 > \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 - радиусы соответствующих максимальных вписанных гиперсфер Φ_1 и Φ_2.

Для гиперсфер Φ и Φ_ε с радиусами ρ_2 и $\rho_1 - \varepsilon > \rho_2$

с центром в $\bar{r}_2$: $I_1 = \int\limits_{\omega} f(\bar{r}_2 - \bar{r})dv > \int\limits_{\omega'} f(\bar{r}_2 - \bar{r})dv = I_1'$,

где $\omega = \Phi \cap \bar{\Omega}$ и $\omega' = \Phi_\varepsilon \cap \bar{\Omega}$. По условию $\int\limits_{\omega'} dv = m > 0$, тогда $I_1' = f(\bar{r}_1 - \bar{r}_0)m$, где $\bar{r}_0$ – средняя точка в ω. Обозначим $\int\limits_{\bar{\Phi}} f(\bar{r}_2 - \bar{r})dv = I_2$. При $\sigma \to 0$ $\frac{I_2}{I_1} \to 0$; действительно

$$\frac{I_2}{I_1} < \frac{\int\limits_{\bar{\Phi}} e^{-\frac{(\bar{r}_2-\bar{r})^2}{2\sigma^2}} dv}{m \cdot e^{-\frac{(\bar{r}_2-\bar{r}_0)^2}{2\sigma^2}}} =$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{\bar{\Phi}} e^{-\frac{(\bar{r}_2-\bar{r})^2+(\bar{r}_2-\bar{r}_0)^2}{2\sigma^2}} dv \le \frac{1}{m}\int\limits_{\bar{\Phi}} e^{-\frac{(\bar{r}_2-\bar{r})^2+(\rho_1-\varepsilon)^2}{2\sigma^2}} dv ,$$

но очевидно, что подынтегральная функция последнего интеграла равномерно по ε стремится к 0 при $\sigma \to 0$. Пользуясь этим, имеем.

$$P_\Omega(\bar{r}_1) - P_\Omega(\bar{r}_2) = I_1 + \left[\int\limits_{\bar{\Phi}_1 \cap \Omega} f(\bar{r}_1 - \bar{r})dv - \int\limits_{\bar{\Phi}_2 \cap \Omega} f(\bar{r}_2 - \bar{r})dv\right] \ge$$

$$\ge (I_1 - 2I_2) \to I_1 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Если вернуться к старым координатам, то оптимальная средняя точка есть центр максимального вписанного эллипсоида из семейства $\sum\limits_i \frac{x_i}{b_i} = const$, причем полуоси эллипсоида направлены вдоль векторов $\bar{I}_i^0$.

Описанные формулы и оценки позволяют вычислять оптимальную точку и быстро осуществлять качественные оценки и сравнения. Например, если нам задана двумерная область Ω в виде треугольника, то при высокой точности точкой " прицеливания" должна быть точка пересечения высот, а при низкой – точка пересечения биссектрис (имеется ввиду, конечно, что $\sigma_x = \sigma_y$); для многосвязных областей при высокой точности надо "целиться" в наибольшую часть, а при низкой – в центр тяжести всех частей (при этом очевидно, точка прицеливания x_i^0 не обязана лежать в Ω) и т.д.

Помимо сказанного, изложенный подход позволит, по-видимому, перекинуть "мостик" между вопросами надежности элемента, как некоего сложного объекта и структурной надежностью большой системы, построенной на этих элементах.

Например, в простейшем случае однородной системы из N элементов без избыточности вероятность одновременной работоспособности всех элементов $P_s = [1 - (1 - P_\Omega)^N] \approx 1 - Nq_\Omega$, где $q_\Omega = 1 - P_\Omega(\bar{r}_0)$. Если задано минимальное допустимое значение $P_{s\,min}$, то этим определяется максимальное число элементов системы $N_{max} = \frac{1 - P_{s\,min}}{1 - P_\Omega}$, которое, таким образом, тем сильнее зависит от P_Ω, чем последнее ближе к 1. Поэтому в случае высокой точности выбор оптимальной точки весьма существенен для большой системы, хотя для отдельного элемента P_Ω мало зависит от $\bar{r}_0$ внутри Ω.

Другой крайний случай низкой точности относится скорее к максимизации числа элементов, имеющих заданные параметры среди большого числа изготовляемых элементов; например, отбраковка транзисторов.

Заметим в заключение, что все вышеприведенные рассмотрения естественно обобщаются на случай, когда заданы не точные границы Ω, а распределение плотности вероятностей работоспособности элемента $\rho(\bar{r})$. При этом интегрирование во всех формулах производится по всему пространству с весовой функцией $\rho(\bar{r})$.

Литература

1. К.А. Иыуду. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. М.-Л.,1966.
2. Р.М. Туркельтауб. Методы исследования точности и надежности схем аппаратуры. М.-Л.,1966.
3. Н.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений. М.,Физматгиз, 1959.