УДК.681.142.019

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ НАДЕЖНОСТИ

С.Я. Беркович
(Москва)

Понятие функции надежности системы было введено Дж. фон Нейманом [I], Шэнноном и Муром [2] в связи с рассмотрением проблемы синтеза надежных устройств из ненадежных элементов. Функция надежности системы представляет собой зависимость надежности системы от надежности составляющих ее элементов; под надежностью системы (или элемента), понимается вероятность сохранения работоспособности у системы (или элемента) при некотором воздействии на систему, например, при изготовлении методами интегральной технологии без отбраковки элементов, при испытании, по прошествии определенного промежутка времени и т.д.

Изучение функций надежности представляет собой одну из основных задач при конструировании структурно-надежных вычислительных сред и систем.

В общем случае функция надежности h системы, состоящей из элементов с одинаковой надежностью p, представляется в виде:

$$h(p) = \sum_{i=0}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i}, \qquad (I)$$

где n - общее число элементов в системе, A_i - число способов, которым можно выбрать подмножество из i элементов так, чтобы система функционировала, если эти i элементов будут работоспособны, а остальные $(n - i)$ - откажут.

Очевидно,

$$0 \le A_1 \le C_n^1 . \qquad (2)$$

Подробному рассмотрению свойств функций надежности посвящен ряд работ, в частности [3,4]. При достаточно общих предположениях функции надежности систем имеют s -образную форму (рис. I) и обладают следующими свойствами:

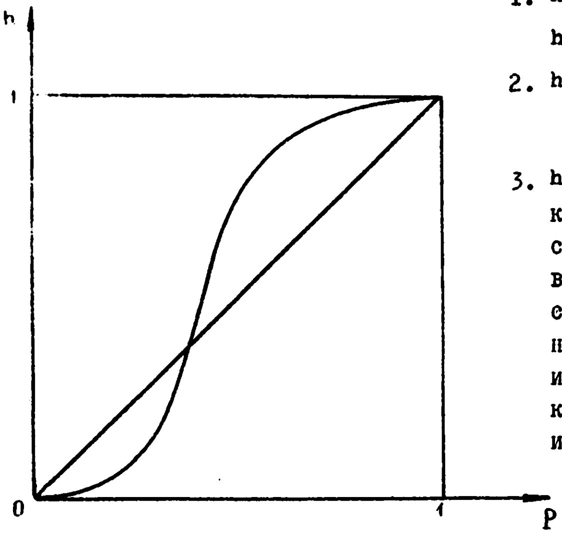

Рис. I

1. $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$.
2. $h(p) > 0$ для $0 < p < 1$.
3. $h(p) < p$ в некоторой окрестности 0, $h(p) > p$ в некоторой окрестности I, и уравнение $h(p) = p$ имеет ровно один корень в открытом интервале (0,I).

Свойство 3 означает, что существует определенное критическое значение надежности, такое, что надежность системы выше надежности отдельного элемента только, если надежность элемента превосходит эту критическую величину.

При исследовании различных систем легко сравнить величины их надежности в окрестностях 0 и I с помощью рассмотрения асимптотического поведения функций надежности и тем самым определить, четное или нечетное число раз могут пересекаться графики сравниваемых функций надежности в интервале (0,I).

В данной работе рассматривается некоторый класс функций надежности, относительно которых можно установить, что их графики пересекаются в интервале (0,I) не более одного раза. Отсюда можно сделать вывод, какая из рассматриваемых систем надежнее другой во всем интервале (0,I) и надежность какой из

систем выше надежности другой системы только, когда надежно… элемента превышает некоторую определенную величину (рис. 2).

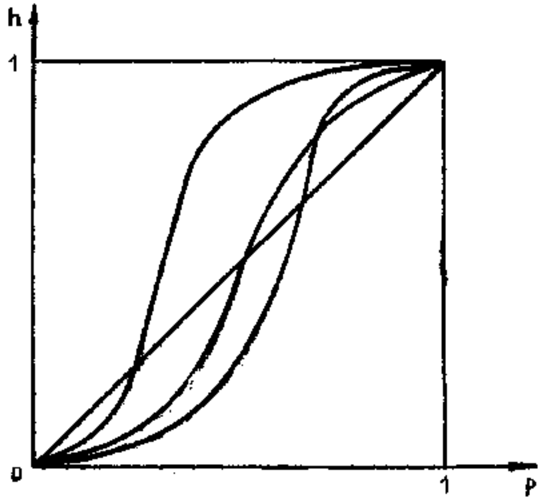

Рис. 2

Класс функций, используемый для сравнения функций надеж… ности, составляют так называемые функции кворума. Функция кв… рума $h_Q(p)$ характеризует систему, содержащую N элем… тов, которая может функционировать, если в ней исправно бол… k элементов, и не может функционировать, если в ней исправ… менее k элементов.

$$h_Q(p) = A'_k p^k (1-p)^{N-k} + \sum_{i=k+1}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} . \qquad (3)$$

Особенность функций кворума состоит в том, что в них в… коэффициенты (за исключением первого) имеют максимально во… можные значения для системы, содержащей заданное количество элементов.

Утверждение теоремы 2 Шеннона-Мура[2] сводится к тому, что график функции кворума системы из N элементов пересека… ет график функции надежности любой другой системы также из N элементов не более, чем в одной точке. Мы докажем обобщение этого утверждения, которое позволяет вывести ряд полезных следствий; примененный метод доказательства проще метода, п… мененного Шенноном и Муром, и, кроме того, этот метод может

быть использован также для сравнения некоторого более широкого класса функций надежности.

Теорема.

График функции кворума системы из N одинаковых элементов пересекает в открытом интервале $(0,1)$ график функции надежности системы с произвольной структурой, содержащей n одинаковых элементов (при $N \geq n$) не более, чем в одной точке.

Доказательство.

Запишем функцию надежности в виде:

$$\sum_{i=0}^{n} A_i p^i (1-p)^{n-i} = \frac{1}{(1+x)^n} \cdot \sum_{i=0}^{n} A_i x^i \,, \tag{4}$$

где $x = \frac{p}{1-p}$, при $0 < p < 1$ x меняется от 0 до $+\infty$.

Составим разность между функцией надежности системы из n элементов и функцией кворума системы из N элементов:

$$\frac{1}{(1+x)^N} \left[(1+x)^{N-n} \cdot \sum_{i=0}^{n} A_i x^i - A'_k x^k - \sum_{i=k+1}^{N} \cdot C_N^i x^i \right] \,. \tag{5}$$

Преобразуем первый член в квадратных скобках:

$$(1+x)^{N-n} \cdot \sum_{i=0}^{n} A_i x^i = \sum_{s=0}^{N} \Big(\sum_{\substack{r+i=s \\ 0 \leq r \leq N-n \\ 0 \leq i \leq n}} C_{N-n}^r A_i \Big) \, x^s \,. \tag{6}$$

Суммирование в скобках производится по всем r и i из соответствующих интервалов определения, таким, что $r + i = s$. Имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{\substack{r+i=s \\ 0 \leq r \leq N-n \\ 0 \leq i \leq n}} C_{N-n}^r A_i \leq C_N^s \,. \tag{7}$$

Справедливость этого утверждения следует из того, что при максимальных значениях A_i, равных C_n^i, данное неравенство переходит в известное тождество для биномиальных коэффициентов.

Таким образом, система коэффициентов многочлена, заключенного в квадратные скобки в выражении (5), независимо от соотношения, между величинами A_k и A'_k не может иметь более одной перемены знака. Применяя теорему Декарта о числе поло-

жительных корней многочлена, гласящую, что количество положительных корней многочлена равно числу перемен знака в системе его коэффициентов, либо меньше этой величины на четное число (см., например, [5]), мы видим, что в данном случае эта теорема позволяет сделать однозначный вывод о том, что рассматриваемый многочлен не может иметь больше одного положительного корня. Тем самым получено то, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает

Следствие I.

Графики функций кворума двух различных систем пересекаются не более, чем в одной точке.

Введем в рассмотрение наиболее распространенный частный случай функции кворума - однородную функцию кворума, которая получается из функции кворума (3), если положить $A'_k = C_N^k$. Для однородной функции кворума, представляющей собой функцию надежности системы, которая сохраняет работоспособность, если работоспособны k и более ее элементов, сформулируем

Следствие 2.

График однородной функции кворума системы из N одинаковых элементов пересекает в открытом интервале (0,I) график функции надежности системы с произвольной структурой, содержащей n одинаковых элементов (при $N \geq n - 1$) не более, чем в одной точке.

Доказательство.

При $N \geq n$ утверждение следствия представляет простой частный случай утверждения теоремы.

Случай $N = n-1$ должен быть рассмотрен особо, однако, если использовать тот же метод вывода, что и в теореме, и принять во внимание равенство $C_{N-1}^{i} + C_{N-1}^{i+1} = C_N^{i+1}$, то доказательство этого случая не представит никаких затруднений.

Литература

I. Дж. Нейман. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент.-Автоматы, М., ИИЛ, 1956.

2. К.Э. Шэннон,Э.Ф. Мур. Надежные схемы из ненадежных реле.-Работы по теории информации и кибернетике, М., ИИЛ, 1963.

3. Ф. Реза. Заметка о функциях надежности. Кибернетический сборник, М., ИИЛ, вып. 5, 1962.
4. Z.W.Birnbaum, J.D.Esary, S.C.Saunders. Multi-Component Systems and Structures and Their Reliability. Technometrics,1961,vol.3, N 1, pp.55-77.
5. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., Изд-во "Наука", 1965.