

## К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

*Г.К. Раков*  
(Москва)

### Принятая терминология

Под вычислительной системой (ВС) мы будем понимать всю совокупность вычислительных средств, предназначенных для решения задач управления определенным объектом, вне зависимости от сложности этого объекта.

Под вычислительным комплексом (ВК) мы будем понимать аппаратное объединение нескольких машин, обладающих той особенностью, что при выходе из строя одной из машин данного объединения из решения исключается не та группа задач, которая решалась в отключенной машине, а группа задач низшего приоритета. Задачи высшего приоритета решаются без перерыва и без потери накопленной информации.

Таким образом, система состоит из набора вычислительных комплексов и отдельных машин.

Под рангом системы будем понимать различный состав вычислительной системы. Низший ранг - система из одиночных машин, высший ранг - система из одного ВК, в который объединены все машины.

Если система состоит из  $n$  машин, то она может решать одновременно  $n$  групп задач. Каждая группа задач имеет свою эф-

эффективность  $E_i$  в деятельности данного объекта. Суммарная эффективность системы есть сумма произведений отдельных эффективностей на вероятность  $P_i$  решения этих групп задач, т.е.

$$E_s = \sum_{i=1}^n P_i E_i. \quad (1)$$

Измерение эффективностей может производиться в любых единицах, но одинаковых для всех задач.

Под организационными структурами будем понимать организацию вычислительной системы, т.е. число и состав ВЧ и отдельных машин и распределение групп задач по машинам.

Под технической структурой понимается техническое выполнение той или иной организационной структуры.

#### Определение числа рангов и числа структур системы из $n$ машин

Любой ранг системы обозначается последовательностью чисел

$$m_1^{i_1}, m_2^{i_2}, m_3^{i_3}, \dots, m_r^{i_r}, \quad (2)$$

где  $m_j$  - число машин в  $j$ -ом ВЧ.

Для общности одна машина так же рассматривается как предельный (по количеству машин) ВЧ.

$i_j$  - число одинаковых ВЧ.

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^r i_j = n. \quad (3)$$

Будем называть подсистемой объединение рангов, у которых  $m_1$  одинаковые.

Обозначаем через  $R_n$  - число рангов в системе из  $n$  машин и через  $r_1^n$  - число рангов в подсистеме 1-го порядка.

Так как в системе из  $n$  машин имеется всего  $n$  подсистем, то

$$R_n = \sum_{i=1}^n r_1^n.$$

Если  $1 \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ , то 1-ую подсистему можно рассматривать как полную систему  $n-1$ , у которой в каждом ранге добавляется ВК  $m^1$ , где  $m = 1$ , поэтому можем написать

$$n - 1 - 21 < 0,$$

$$r_1^n = R_{n-1}.$$

При  $1 < \left[\frac{n}{2}\right]$ , 1-ую подсистему можно рассматривать как полную систему  $n-1$  минус суммы рангов от высшей подсистемы до  $n-1-21$ , т.е.

$$r_1^n = R_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1-21} r_{n-1-j}^{n-1},$$

и, окончательно,

$$R_n = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \left[ R_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1-21} r_{n-1-j}^{n-1} \right] + \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]}^n R_{n-1}. \quad (4)$$

Что касается числа вариантов  $m$ , то сперва найдем это значение для одного ранга. Легко убедиться, что для ранга, состоящего из неоднородных ВК ( $1_j = 1$ ) число  $a_\tau$  будет равняться

$$a_\tau = \prod_{j=1}^{\tau} \frac{C_{n-1-\sum_{i=0}^{j-1} m_i}^{m_j}}{1}. \quad (5)$$

Для ранга, состоящего из 1 однородных ВК,  $a_\tau$  будет равняться

$$a_\tau = \frac{\prod_{i=1}^1 C_{n-(i-1)m}^{m_i}}{1!}. \quad (6)$$

Объединяя (5) и (6) и производя суммирование по всем рангам, окончательно получим

$$a = \sum_{r=1}^{r_\tau} \frac{\sum_{k=1}^{\sum_{j=1}^r l_k} \prod_{j=1}^r C_{n-\sum_{i=0}^{j-1} m_i}^{m_j}}{\prod_{k=1}^{r_\tau} l_k!}. \quad (7)$$

## Определение суммарной эффективности системы

Для вывода формулы суммарной эффективности системы, структуру ВС удобнее представить не в форме (2), а в форме

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots, m_{R_n} \quad (8)$$

Разница между (2) и (8) заключается в том, что в первом случае различные  $m_j$  различны, т.е. справедливо неравенство  $m_j > m_{j+1}$ , а во втором случае  $m_j$  могут быть и одинаковые, т.е. справедливо неравенство  $m_j \geq m_{j+1}$ .

Система может находиться в одном из  $K$ -состояний ( $K = 0, 1, 2, \dots, n$ ), где  $K$  - число машин, находящихся в рабочем состоянии. Вероятность нахождения системы в  $K$ -ом состоянии равна:  $C_n^K p^K (1-p)^{n-K}$  где  $p$  - вероятность нахождения в рабочем состоянии одной, любой машины, включенной в систему.

Эффективность системы в  $K$ -ом состоянии будет равна

$$E_K = p^K (1-p)^{n-K} \sum_{i=1}^n \Delta_i^K E_i,$$

где  $\Delta_i^K$  - некоторые коэффициенты, зависящие как от структуры ВС, так и от состояния  $K$ , в котором она находится.

Значения  $\Delta_i^K$  могут меняться в пределах:

$$0 \leq \Delta_i^K \leq C_n^K,$$

а сумма  $\Delta_i^K$  равна

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^K = K C_n^K.$$

Если структура ВС задана в форме (8), то, как можно непосредственно убедиться, справедливо следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^K E_i = \sum_{j=1}^{R_n} \sum_{i=L_j+1}^{L_{j+1}} \Delta_i^K E_i,$$

где  $L_j = \sum_{i=0}^{j-1} m_i$  и  $L_0 = 0$ .

Определяя  $\Delta_i^k$  в пределах одного ВК, находим

$$\sum_{L_j+1}^{L_{j+1}} \Delta_i^k E_i = \sum_{\tau=1}^k \left[ \sum_{\theta=\tau}^k (-1)^{\theta+\tau} C_{\theta-1}^{\tau-1} C_n^{\theta} C_{n-\theta}^{k-\theta} \right] E_{L_j+\tau},$$

и, окончательно,

$$E_n = \sum_{k=0}^n p^k (1-p)^{n-k} \sum_{j=1}^n \sum_{\tau=1}^k \left[ \sum_{\theta=\tau}^k (-1)^{\theta+\tau} C_{\theta-1}^{\tau-1} C_n^{\theta} C_{n-\theta}^{k-\theta} \right] E_{L_j+\tau}. \quad (9)$$

При линейной композиции эффективности задач, т.е. в случае, если при  $p = 1$  справедливо следующее равенство:

$$E_t = \sum_{i=1}^t E_i,$$

для всех  $t \leq n$ , выражение (9) может быть упрощено за счет независимости  $E_{L_j+\tau}$  от  $k$ :

$$E_n = \sum_{j=1}^n \sum_{\tau=1}^{n_j} \left[ \sum_{\theta=\tau}^{n_j} (-1)^{\theta+\tau} p^{\theta} C_{\theta-1}^{\tau-1} C_n^{\theta} \right] E_{L_j+\tau}. \quad (10)$$

Упорядочение рангов может производиться по различным признакам. Наиболее естественными являются следующие.

1) В двух соседних рангах в более высоком ранге  $m_j$  больше  $m_j$  более низкого ранга, причем соответствующие  $m_1, m_2, \dots, m_{j-1}$  обоих рангов равны между собой.

2) Два соседние ранга имеют или одинаковое число ВК или более высокий ранг имеет меньшее число ВК. В пределах одинакового числа ВК упорядочение производится по первому правилу. При первой последовательности имеются три вида переходов от более высокого ранга к более низкому:

- а) число ВК увеличивается;
- б) число ВК остается неизменным;
- в) число ВК уменьшается.

При второй последовательности остаются только два первых вида переходов. Идеальным упорядочением было бы такое, при котором всегда бы обеспечивалось условие того, что более высокому рангу соответствует большая эффективность. К сожалению, этому условию не удовлетворяют ни первый, ни второй метод упорядочения. Ему удовлетворяет только первый вид перехода.

На рис. I представлен закон изменения процентного содержания различных видов переходов при первом методе. Из него видно, что I-ый вид перехода не падает ниже 65% и стабилизируется при больших значениях  $n$  на 70%. В то же время, для второго метода, процент I-го вида перехода резко падает при увеличении  $n$  и при  $n = 20$  достигает 3%.

На основании этого для упорядочения рангов был выбран первый метод.

Первой структурой для любого ранга будет такая структура, когда порядковым номерам машин соответствуют порядковые номера задач. (Группы задач упорядочены по приоритетам - высшему приоритету соответствует меньший номер).

Из выражения (10) непосредственно вытекает:

1) эффективность ВК не зависит от общей системы и определяется только параметрами ВК;

2) при первом виде перехода от более высокого ранга к более низкому и при первой структуре системы, будем иметь

$$\Delta E_k = E_{g_r} - E_{g_{r-1}} = p(1-p) \left[ \sum_{\tau=0}^{n_k-2} p^\tau (E_{L_k+n_k-1} - E_{L_k-n_k}) \right] > 0,$$

т.е. более высокий ранг всегда более эффективен.

#### Анализ системы из 10 машин

Приведенная выше теория была проверена на системе из 10 машин при линейной композиции эффективности задач. Результат расчета нижеследующий.

##### 1. Общие характеристики

Система из 10 машин имеет 42 ранга и 115975 структур.

Для расчета использовано следующее.

а) 5 различных законов распределения эффективностей (см. рис. 2):

1 закон (положительное отклонение) - приращение эффективности у высоких приоритетов больше, чем у низких;

2 закон (нормальный) - приращение эффективности у всех групп задач одинаково;

3 закон (отрицательное отклонение) - приращение эффективности у низких приоритетов больше, чем у высоких;

4 закон (отрицательно-вырожденный) - эффективность всех групп задач одинакова ;

5 закон (положительно-вырожденный) - вся эффективность сосредоточена в первой группе задач, остальные задачи имеют нулевую эффективность.

б) 3 значения  $p$ .

В принципе могут быть три случая: непосредственно задано значение  $p$ , заданы пределы изменения  $p$ , задана функция  $p$  от времени.

В соответствии с этим было взято: для первого случая -  $p = 0,1$  и  $0,9$ ; для второго случая -  $0 \leq p \leq 1$ ; третий случай не рассматривался.

В некоторых отдельных вопросах исследованы кривые как функции  $p$  от 0 до 1 через 0,1.

## 2. Влияние закона распределения эффективности задач на структуру системы

Наиболее эффективным рангом будет 42-ой ранг - все машины объединены в один ВК.

Анализ этого случая (рис. 3) показал, что чем больше закон изменения эффективности отличается от отрицательно-вырожденного закона распределения, тем больше сказывается влияние структуры системы на суммарную эффективность.

Например, при  $p = 0,5$  будем иметь:

4 закон -  $E_s = 50,00$ ,  $\Delta E_s = 0$ ;

3 закон -  $E_s = 64,97$ ,  $\Delta E_s = 29,94\%$ ;

2 закон -  $E_s = 70,45$ ,  $\Delta E_s = 40,90\%$ ;

1 закон -  $E_s = 77,26$ ,  $\Delta E_s = 54,52\%$ ;

5 закон -  $E_s = 99,90$ ,  $\Delta E_s = 99,80\%$ ;

где  $\Delta E_s$  - приращение эффективности в процентах относительно 4-го закона.

## 3. Влияние надежности отдельных машин на эффективность системы

Анализ (рис. 3) показал следующее.

а) Чем больше  $p$ , тем больше  $E_s$ ; так, например, при 2-ом законе  $E_i$  и 42-ом ранге имеем

$p = 0,1$ ,  $E_s = 17,36$ ,  $\Delta E_s = 73,60\%$ ,

$p = 0,3$ ,  $E_s = 47,18$ ,  $\Delta E_s = 57,27\%$ ,

$p = 0,5$ ,  $E_s = 70,45$ ,  $\Delta E_s = 40,90\%$ ,

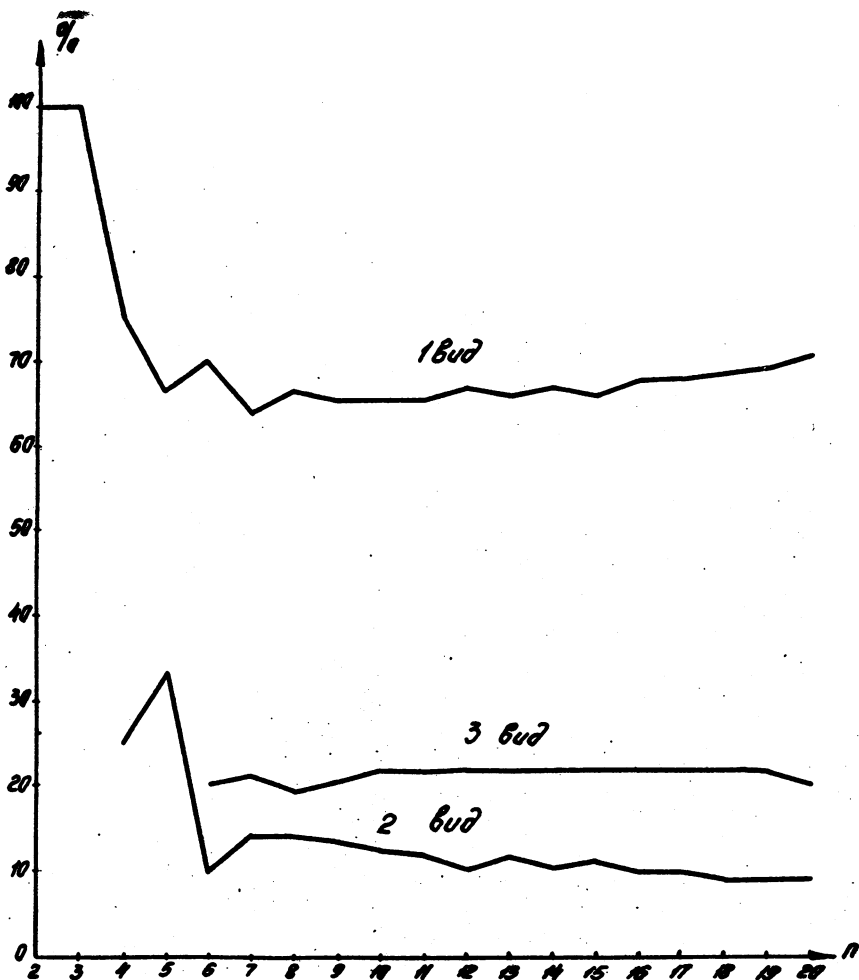


Рис. I. %-ное соотношение различного вида переходов в зависимости от количества машин в системе.



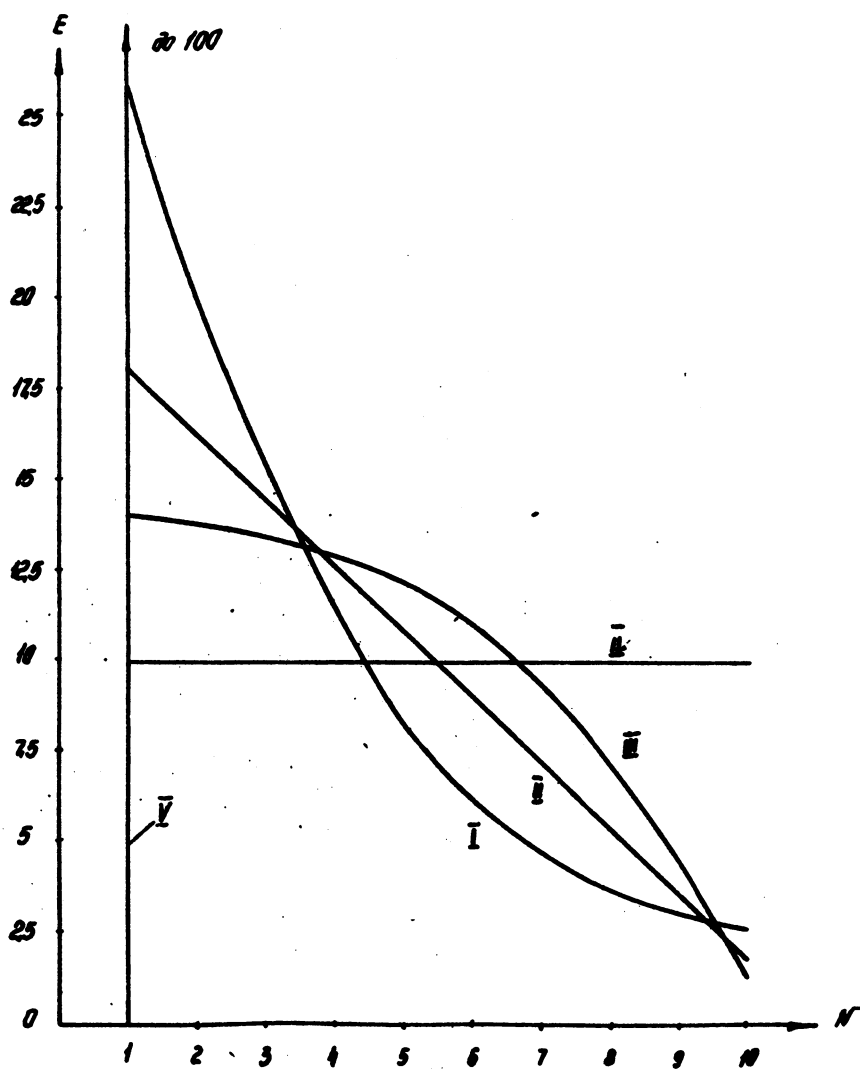


Рис. 2. Закон изменения эффективности 10 групп задач

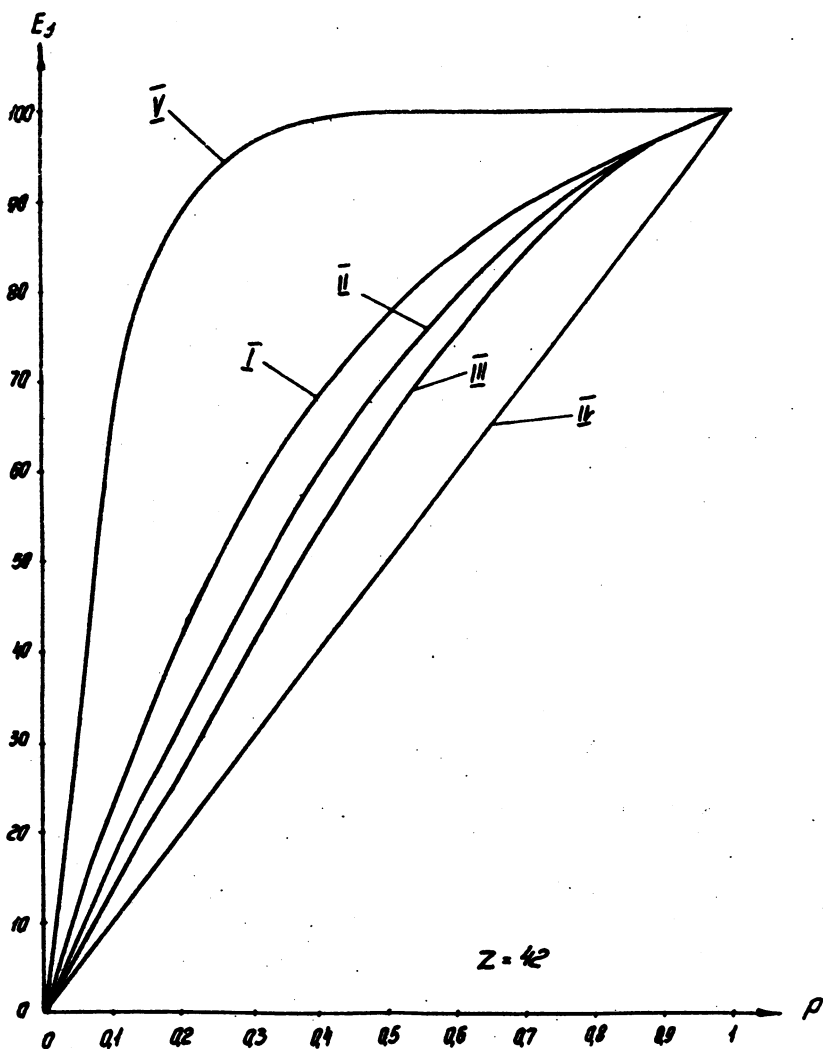


Рис. 3. Закон изменения эффективности системы от  $\rho$  при различных законах изменения  $E_1$ .

$$p = 0,7, \quad E_s = 87,18, \quad \Delta E_s = 24,54\%,$$

$$p = 0,9, \quad E_s = 97,36, \quad \Delta E_s = 8,18\%.$$

б) Для меньших  $p$  сложность структуры играет значительно большее значение, чем для больших значений  $p$  (рис. 4). Например, при первом законе изменения эффективности будем иметь (таблица I):

Т а б л и ц а I

Ранг системы	$p = 0,1$		$p = 0,9$	
	$E_s$	$\Delta E_s \%$	$E_s$	$\Delta E_s \%$
I	10	0	90	0
6	15,40	54,00	95,40	5,98
14	18,07	80,70	96,26	6,95
23	19,63	96,30	96,63	7,35
30	20,95	109,50	96,89	7,64
35	21,34	113,40	96,94	7,69
42	23,18	131,80	97,20	8,00

в) Чем больше значение  $p$ , тем меньше зависит влияние структуры на суммарную эффективность от закона распределения эффективности.

#### 4. Выбор оптимальной структуры в пределах одного ранга

По формуле

$$P_{L_j+\tau} = \sum_{\tau=1}^{n_j} \left[ \sum_{\theta=\tau}^{n_j} (-1)^{\theta+\tau} \cdot p^\theta \cdot C_{\theta-1}^{\tau-1} \cdot C_{n_j}^\theta \right] \quad (II)$$

определяем все значения  $P_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ), где  $j$  - порядковый номер машины. В машинах, вне зависимости от их завязки в ВК, с большим значением  $P_j$  помещаются группы задач, имеющие большие значения  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), где  $i$  порядковый номер группы задач.

#### 5. Выбор оптимального ранга системы

Определяем минимально-допустимый уровень эффективности решения задач -  $E_{s_{min}}$ .

Расчет начинаем с самого высокого ранга и спускаемся вниз до получения  $E_s < E_{s_{min}}$ . После этого пропускаем все переходы

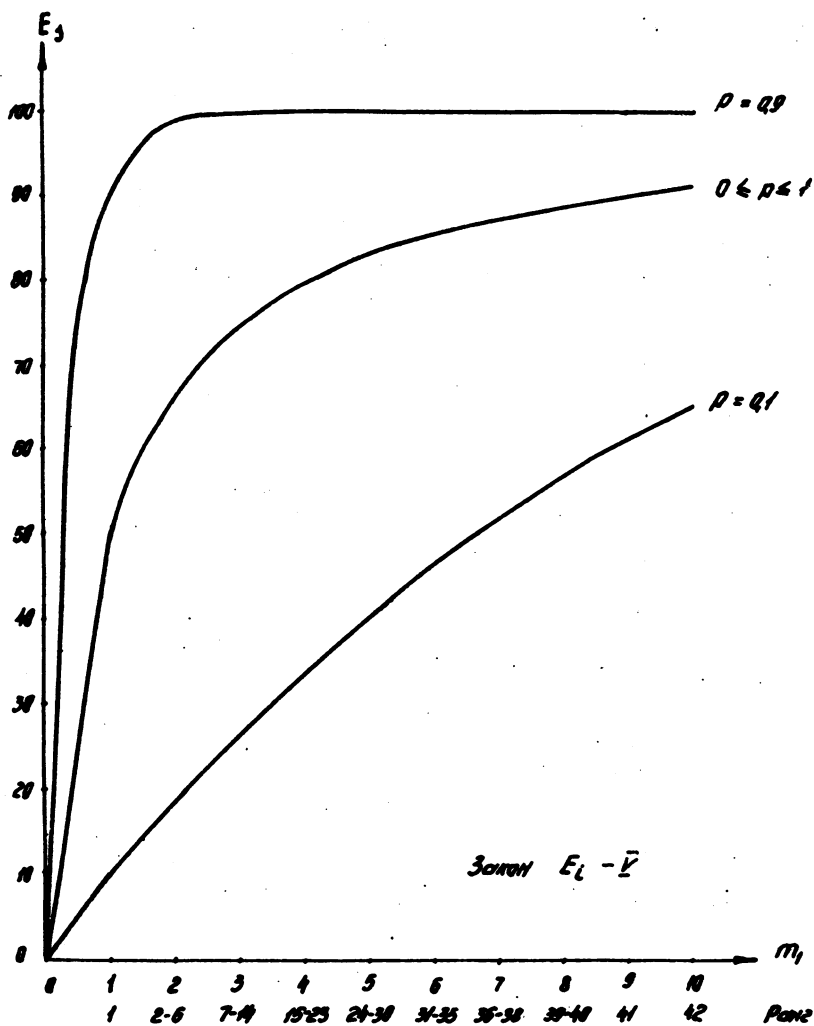


Рис. 4. Закон изменения эффективности от ранга при различных значениях  $p$ .

I-го вида и начинаем с ближайшего перехода 2-го или 3-го вида. Если они дают значения  $E_B > E_{B_{min}}$  то производим "спуск" от этих значений до следующего значения  $E_B < E_{B_{min}}$ . Так производится до тех пор, пока не получим уже при 3-ем виде перехода  $E_B > E_{B_{min}}$ . В этом случае возвращаемся к предпоследнему рангу, и искомым будет ранг на единицу выше данного.

## В ы в о д ы

На основании приведенного анализа можно сделать следующие выводы.

I. В приведенной методике оптимизации ВС имеется много недостатков, основными из которых являются:

а) не учитывается вероятность выхода из строя промежуточной аппаратуры, объединяющей отдельные машины в ВК;

б) анализ производится только на уровне композиции машин, а не модулей;

в) в критерии оценки не учитывается количество и стоимость аппаратуры;

г) анализ произведен только для линейной композиции эффективности задач, в то время когда довольно часто встречаются и нелинейные композиции;

д) не рассмотрен вопрос оптимизации выбора технических структур.

2. Несмотря на все указанные недостатки, можно ожидать, что данная методика оптимизации ВС и в приведенном виде найдет широкое применение благодаря своей наглядности, простоте и возможности количественной оценки различных структур системы.

3. В результате анализа было получено, что во всех случаях I-го вида перехода (70% случаев) большему рангу соответствует большая эффективность, при 2-ом виде перехода (9% случаев) очень редко большему рангу соответствует меньшая эффективность и только при 3-ем виде перехода (21% случаев) всегда большему рангу соответствует меньшая эффективность.

4. При получении высокоценной методики оптимизации ВС и учитывая сложность и важность поставленной проблемы, необходимо широким фронтом производить дальнейшие работы с целью исключения вышеуказанных недостатков.

5. Формализация методов выборки оптимальной структуры ВС явится основанием для автоматизации и резкого повышения качества проектирования ВС при уменьшении его стоимости и сроков выполнения на первоначальных стадиях (аван-проект, эскизный проект).