

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРАТОРОВ

А.В. Каляев, В.Ф. Гузик
(Таганрог)

1. Постановка задачи. Алгоритмы универсального решающего блока.

Возможности вычислительной структуры, основанной на уравнениях Шэннона и состоящей из обобщенных цифровых интеграторов, можно значительно расширить, если кроме операций суммирования, интегрирования и экстраполяции приращений, которые определяют структуру обобщенного цифрового интегратора, ввести операцию индикации равенства потоков приращений.

Если ограничиться рассмотрением вычислительной структуры, в которой информация между отдельными решающими блоками циркулирует в виде одноразрядных потоков приращений, то отпадает необходимость в экстраполяции приращений. В этом случае однородная вычислительная структура может быть построена из сумматоров одноразрядных приращений, цифровых интеграторов и индикаторов равенства потоков приращений, объединенных в универсальный решающий блок.

Рассмотрим алгоритмы операций суммирования, интегрирования и индикации равенства одноразрядных потоков приращений и составим на их основе алгоритмы универсального решающего блока.

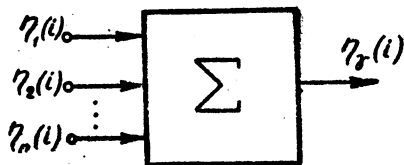


Рис. I. Сумматор приращений

Сумматор одноразрядных приращений (рис. I) работает в соответствии с алгоритмом [1]:

$$\eta_{\gamma}(i) = \text{sign} \cdot \sum_{j=1}^i \left[\sum_{p=1}^b \eta_p(j) - \eta_{\gamma}(j-1) \right],$$

$$\eta_{\gamma}(0) = 0,$$

где $\eta_p(j)$ ($p = 1, 2, \dots, b$) — суммируемые потоки приращений;

$\eta_{\gamma}(i)$ — поток приращений, получающийся в результате суммирования.

Цифровой интегратор, работающий с одноразрядными приращениями, обычно строится на основе формулы прямоугольников

$$\nabla w_{(i+1)} = y_i \cdot \nabla x_i$$

и функционирует в соответствии с алгоритмом, в котором помимо формулы прямоугольников реализуется одновременно операция квантования приращения интеграла [1],

$$y_{(i+1)} = y_i + \Delta y \cdot \eta_{\gamma}(i+1),$$

$$\eta_w(i) = P_0^0[y_i \cdot \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R,$$

$$\frac{w_{01}}{\Delta x} = P_{-n}^{-1}[y_i \cdot \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R.$$

Здесь $P_{-p}^q[z]_R$ - функция расчленения [2] ;

$\eta_x(i)$, $\eta_y(i)$, $\eta_w(i)$ - потоки одноразрядных приращений соответственно переменной интегрирования $x(x_M)$, подынтегральной функции $y(x_M)$ и интеграла $w(x_M)$ (рис.2);

x_M - независимая машинная переменная;

$w_{o.1}$ - остаток, получающийся в результате квантования приращения интеграла;

Δx и Δy - кванты переменных $x(x_M)$ и $y(x_M)$;

R - основание системы счисления ($R = 2$) .



Рис. 2.

Цифровой интегратор.

Индикатор равенства потоков приращений (рис.3) сравнивает потоки приращений $\eta_y(i)$ и $\eta_x(i)$ и вырабатывает на выхо-

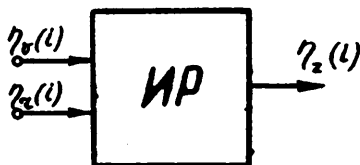


Рис. 3.

Индикатор равенства потоков приращений

де поток $\eta_z(i)$. Если сравниваемые потоки $\eta_y(i)$ и $\eta_x(i)$ равны, то индикатор равенства потоков приращений выдает на выход нулевой поток. В том случае, когда поток $\eta_y(i)$, с которым производится сравнение потока $\eta_x(i)$, превышает последний, на выходе индикатора равенства вырабатывается положительный поток приращений $\eta_z(i) = +1$. Если же поток $\eta_x(i)$ больше потока $\eta_y(i)$, то на выходе индикатора образуется отрицательный единичный поток $\eta_z(i) = -1$. В общем случае алгоритм работы индикатора равенства потоков приращений может быть записан в следующей форме [3]:

$$\eta_z(i+1) = \text{sign} \{ \eta_z(i) + \text{sign} [\eta_y(i) - \eta_x(i)] \}.$$

Операции суммирования потоков приращений, интегрирования и индикации равенства потоков приращений могут быть объединены в одном универсальном интеграторе (рис. 4). Алгоритм такого уни-

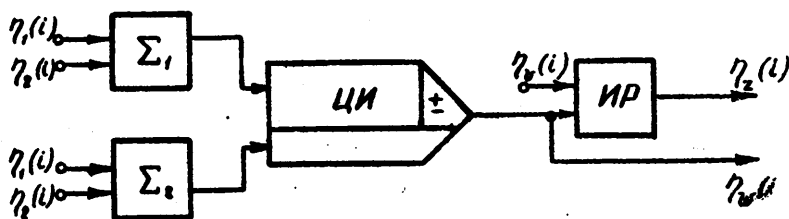


Рис. 4
Универсальный решающий блок.

версального цифрового интегратора имеет вид

$$\begin{aligned} y_{(i+1)} &= y_i + \Delta y \cdot \eta_y(i+1), \\ \eta_w(i) &= P_0^0 [y_i \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R, \\ \frac{w_0}{\Delta x} &= P_{-n}^{T1} [y_i \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R, \\ \eta_y(i) &= \text{sign} \sum_{j=1}^i \{ [\eta_1(j) + \eta_2(j)] \eta_y(i-1) \}, \\ \eta_z(i+1) &= \text{sign} \{ \eta_z(i) + \text{sign} [\eta_y(i) - \eta_x(i)] \}. \end{aligned}$$

Этот алгоритм записан для случая, когда сумматор приращений имеет два входа. Универсальный цифровой интегратор (рис.4) отличается от обобщенного интегратора, работающего с многоуровневыми приращениями, тем, что в нем вместо экстраполятора приращений используется индикатор равенства потоков приращений.

2. Реализация некоторых математических операций с помощью универсального цифрового интегратора

С помощью рассмотренного универсального цифрового интегратора можно выполнять некоторые математические операции, которые не могут быть реализованы с помощью обобщенных интеграторов, или выполнение которых обычным методом встречает затруднения. Рассмотрим некоторые подобные операции.

Определенные трудности в вычислительных структурах, состоящих из сумматоров, интеграторов и экстраполяторов приращений, встречаются при осуществлении дифференцирования. Введение в вычислительную структуру индикатора равенства потоков приращений позволяет легко преодолеть эти трудности и весьма просто с достаточно высокой степенью точности реализовать операцию дифференцирования.

Под операцией дифференцирования потока приращений $\eta_y(i)$ по потоку $\eta_x(i)$ понимается операция определения потока $\eta_z(i)$, который изображает функцию $z(x_M) = \frac{dy(x_M)}{dx(x_M)}$, причем функция $y(x_M)$ изображается потоком приращений $\eta_y(i)$, а функция $x(x_M)$ - потоком $\eta_x(i)$.

Эту операцию можно осуществить путем комбинации алгоритмов интегрирования и сравнения потоков приращений [1,3]:

$$z_{(i+1)} = z_i + \Delta z \cdot \eta_z(i+1),$$

$$\eta_w(i) = P_0^0[z_i \cdot \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R,$$

$$\frac{w_0}{\Delta x} = P_{-n}^{-1}[z_i \cdot \eta_x(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R,$$

$$\eta_z(i+1) = \text{sign} \{ \eta_z(i+1) + \text{sign} [\eta_y(i) - \eta_w(i)] \}.$$

Нетрудно видеть, что алгоритм дифференцирования выполняется с помощью универсального цифрового интегратора (рис.5). Как

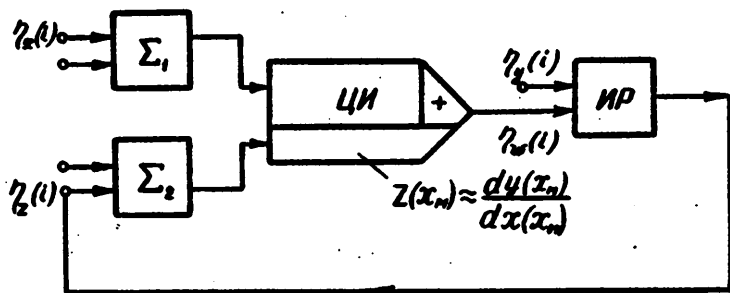


Рис. 5.

Блок-схема операции дифференцирования

следует из рис.5, поток приращений $\eta_x(i)$ проходит без изменения сумматор приращений Σ_1 и подается на вход переменной интегрирования интегратора. Индикатор равенства потоков приращений сравнивает исходный поток приращений $\eta_y(i)$ с потоком приращений $\eta_z(i)$, который поступает с выхода интегратора, и вырабатывает поток приращений $\eta_z(i)$, изображающий производную $z(x_n)$. Пройдя без изменения сумматор Σ_2 , поток приращений $\eta_z(i)$ накапливается в регистре подынтегральной функции в виде искомой производной $z(x_n)$.

Рассмотрим операцию извлечения квадратного корня с применением универсального цифрового интегратора. С целью извлечения корня квадратного из функции $y(x_n)$ - необходимо определить поток приращений $\eta_z(i)$, изображающий функцию

$z(x_n) = \sqrt{y(x_n)}$, для которой исходная функция $y(x_n)$ задана потоком приращений $\eta_y(i)$. Алгоритм операции извлечения корня можно получить, если предварительно произвести следующие преобразования. Переходя к приращениям, получим

$$\nabla z(x_n) = \frac{\nabla y(x_n)}{2\sqrt{y(x_n)}}. \quad \text{Так как } z(x_n) = \sqrt{y(x_n)}, \text{ то}$$

окончательно $\nabla y(x_n) = 2z(x_n)\nabla z(x_n)$. Таким образом, для реализации операции извлечения корня из функции $y(x_n)$ достаточно образовать некоторую функцию $w(x_n)$ такую, что

$\nabla w(x_n) = 2z(x_n)\nabla z(x_n)$ и потребовать затем, чтобы функция $w(x_n)$ была равна функции $y(x_n)$. Этой цели можно

достигнуть, добиваясь с помощью индикатора равенства потоков приращения равенства потоков $\eta_w(i)$ и $\eta_y(i)$, первый из которых образуется с помощью цифрового интегратора (рис.6). При выполнении равенства потоков $\eta_w(i)$ и $\eta_y(i)$ функция $z(x_M)$ будет определять квадратный корень из исходной функции $y(x_M)$.

Пользуясь этими рассуждениями, можно записать алгоритм операции извлечения квадратного корня следующим образом:

$$z_{(i+1)} = z_i + \Delta z \eta_z(i+1),$$

$$\eta_w(i) = P_0^0 [2 z_i \eta_z(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R,$$

$$\frac{w_0(i)}{\Delta x} = P_{-n}^{-1} [2 z_i \eta_z(i) + \frac{w_0(i-1)}{\Delta x}]_R,$$

$$\eta_z(i+1) = \text{sign} \{ \eta_z(i) + \text{sign} [\eta_y(i) - \eta_w(i)] \}.$$

Блок-схема реализации операции извлечения квадратного корня, так же, как и в случае операции дифференцирования, осуществляется на одном универсальном цифровом интеграторе (рис.6). Как видно, в этой блок-схеме на оба входа интегратора подаются одинаковые потоки приращений $\eta_z(i)$, изображающие приращение корня квадратного из функции $y(x_M)$. В регистре подынтегральной функции интегратора образуется искомая функция $z(x_M)$, а на его выходе появляется поток $\eta_w(i) = 2 z_i \eta_z(i)$. С помощью индикатора равенства потоков приращения поток $\eta_w(i)$ изменяется так, чтобы он стал равным потоку $\eta_y(i)$. При этом условии функция $z(x_M)$ совпадает с функцией $\sqrt{y(x_M)}$.

Рассмотрим операцию деления двух переменных. Пусть заданы потоки приращений $\eta_y(i)$ и $\eta_x(i)$, изображающие соответственно функции $y(x_M)$ и $x(x_M)$, и требуется найти поток приращения $\eta_z(i)$, представляющий функцию

$$z(x_M) = \frac{y(x_M)}{x(x_M)}.$$

Можно написать $y(x_M) = z(x_M)x(x_M)$

или, переходя к приращениям, $\nabla y(x_M) = z(x_M)\nabla x(x_M) + x(x_M)\nabla z(x_M)$.

Аналогично предыдущему нетрудно установить, что операцию деления двух переменных можно выполнить с помощью индикатора равенства потоков приращений и устройства, образующего приращение $\nabla w(x_M) = \nabla [z(x_M)x(x_M)] = z(x_M)\nabla x(x_M) + x(x_M)\nabla z(x_M)$.

Поток приращений $\eta_w(i)$ можно получить суммированием двух потоков приращений $\eta_{w_1}(i) = z(x_M)\nabla x(x_M)$, $\eta_{w_2}(i) = x(x_M)\nabla z(x_M)$,

а потоки приращений $\eta_{w_1}(1)$, $\eta_{w_2}(1)$ - на основе двух интеграторов (рис. 7).

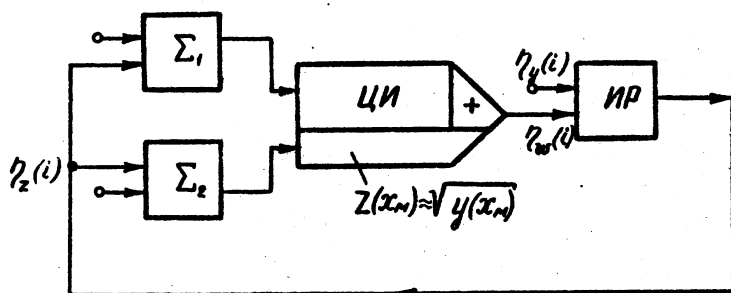


Рис. 6. Блок-схема операции извлечения корня квадратного

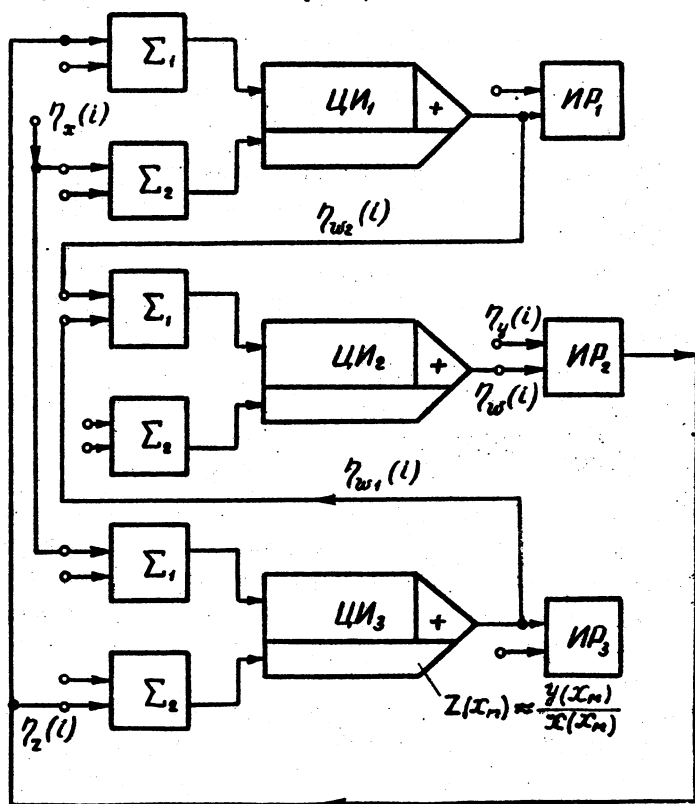


Рис. 7. Блок-схема операции деления

Пользуясь этими замечаниями, алгоритм операции деления двух переменных можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} z_{(i+1)} &= z_i + \Delta z \eta_z(i+1), \\ \eta_{w_1}(i) &= P_0^0[z_i \eta_x(i) + \frac{w_{1,0}(1-i)}{\Delta x}]_R, \\ \frac{w_{01}}{\Delta x} &= P_{-1}^{-1}[z_i \eta_x(i) + \frac{w_{1,0}(1-i)}{\Delta x}]_R, \\ x_{(i+1)} &= x_i + \Delta x \eta_x(i+1), \\ \eta_{w_2}(i) &= P_0^0[x_i \eta_z(i) + \frac{w_{2,0}(1-i)}{\Delta x}]_R, \\ \frac{w_{201}}{\Delta x} &= P_{-1}^{-1}[x_i \eta_z(i) + \frac{w_{2,0}(1-i)}{\Delta x}]_R, \\ \eta_w(i) &= \text{sign} \sum_{j=1}^i \{[\eta_{w_1}(i) + \eta_{w_2}(i)] - \eta_w(j-1)\}, \\ \eta_z(i+1) &= \text{sign} \{ \eta_z(i) + \text{sign} [\eta_y(i) - \eta_w(i)] \}. \end{aligned}$$

Операцию деления двух потоков приращений можно реализовать с помощью трех универсальных цифровых интеграторов (рис. 7). Цифровой интегратор ЦИ₃ образует поток приращений $\eta_{w_1}(i) = z(x_M) \Delta x(x_M)$, а интегратор ЦИ₁ - поток приращений $\eta_{w_2}(i) = x(x_M) \cdot \Delta z(x_M)$. С помощью интегратора ЦИ₂ получается суммарный поток $\eta_w(i) = \eta_{w_1}(i) + \eta_{w_2}(i)$. Индикатор равенства потоков ИР₂ сравнивает потоки приращений $\eta_y(i)$ и $\eta_w(i)$ и вырабатывает поток приращений $\eta_z(i)$, изображающий искомую функцию $z(x_M) = \frac{y(x_M)}{x(x_M)}$.

С помощью универсального цифрового интегратора (рис. 4) можно реализовать и другие математические операции, основанные на сравнении двух потоков приращений. Кроме этого, универсальный цифровой интегратор позволяет также выполнять все операции, которые реализуются с помощью обычного обобщенного цифрового интегратора.

Таким образом, рассмотренный универсальный цифровой интегратор позволяет построить однородную вычислительную структуру, на основе которой можно решать не только задачи, удовлетворяющие теореме Шеннона [4], но одновременно можно вы-

полнять (за счет введения индикации равенства потоков приращений) такие операции, которые не всегда могут быть выполнены с помощью обычных обобщенных цифровых интеграторов, или выполнение которых подобным методом встречает трудности. В частности, с помощью вычислительной структуры, основанной на универсальных цифровых интеграторах, можно решать задачи, в которых встречаются операции многократного дифференцирования, можно вырабатывать обратные зависимости, представленные в дифференциальной форме, можно осуществлять образование разрывных функций и выполнять другие операции. Как видно, введение в состав цифрового интегратора индикатора равенства потоков приращений расширяет возможности вычислительной структуры, построенной из подобных интеграторов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.В.Каляев, О.Н.Пьявченко. О реализации математических операций в специализированной аналого-цифровой вычислительной машине. - Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника. Изд-во "Машиностроение", М., 1965.
2. А.В.Каляев. Введение в теорию цифровых интеграторов. Изд-во "Наукова думка", Киев, 1964.
3. А.В.Каляев, В.Ф.Гузик, Г.А.Сулин, О.Д.Глухов. Индикатор равенства потоков приращений. Авт.свид. СССР, № 206889.- Бюллет. "Изобретения, промышленные образцы, товарные знаки", 1968, № 1, с.124.
4. К. Шеннон. Математическая теория дифференциального анализатора. - Работы по теории информации и кибернетике. Изд-во ИЛ, М., 1968.