УДК 681.142.34

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР, СОСТОЯЩИХ ИЗ ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРАТОРОВ

А.В. Каляев
(Таганрог)

I. Постановка задачи

Широкий круг важных с практической и теоретической точек зрения проблем часто может быть решен лишь с помощью вычислительных устройств, которые обладают одновременно весьма разнообразными и часто противоречивыми свойствами: достаточно высокой точностью; высоким быстродействием; возможностью перестраивать программу в процессе работы; способностью к самонастройке и к самоорганизации; простотой структуры,состоящей из однотипных и однородных достаточно крупных узлов, которые могут производиться в массовом порядке на основе схем микрорадиоэлектроники; высокой надежностью и возможностью продолжать работу даже при полном выходе из строя некоторого количества решающих узлов; возможностью расширения структуры путем простого добавления однотипных решающих узлов, и, наконец, малыми габаритами и весом.

Вычислительные устройства с перечисленными свойствами необходимы при построении систем управления сложными высокоскоростными динамическими объектами и быстропротекающими непрерывными процессами.

Подобные устройства требуются для точного цифрового моделирования сложных динамических систем и непрерывно изменяющихся ситуаций в реальном масштабе времени.

Вычислительные устройства, обладающие высокой точностью, простотой структуры, высокой надежностью и малыми габаритами и весом, крайне необходимы для навигационных систем различных подвижных объектов.

Важной областью применения вычислительных устройств с перечисленными свойствами является их использование для целей распознавания образов, представленных сигналами, распределенными во времени, в частности, для предварительной обработки таких сигналов и выделения из них концентрированной информации.

Можно использовать подобные устройства для решения задач теории непрерывных игр, для прогнозирования,для решения задач динамического программирования и для многих других аналогичных целей.

Анализ свойств наиболее распространенных в настоящее время типов вычислительных машин - аналоговых вычислительных машин (АВМ) и цифровых вычислительных машин (ЦВМ) - показывает, что эти классы машин не удовлетворяют одновременно всем перечисленным выше требованиям. Аналоговые вычислительные машины обладают высоким быстродействием и относительной простотой структуры, но имеют низкую точность, не позволяют просто осуществить перестройку программы в процессе работы, не обеспечивают возможность выполнить решающие блоки на основе схем микрорадиоэлектроники и имеют сравнительно большое количество различных типов решающих блоков.

Цифровые вычислительные машины, обладая высокой точностью и универсальностью, отличаются в то же время сложной структурой, состоящей из очень большого количества весьма различных узлов, имеют низкое быстродействие, большие габариты и вес.

Не всегда могут удовлетворять сформулированным требованиям и разрабатываемые в настоящее время вычислительные среды, состоящие из элементарных однородных логических и коммутирующих элементов, а также вычислительные системы, состоящие из отдельных ЦВМ и АВМ и устройств связи между ними.

Вычислительные среды требуют сложной системы управления и отличаются большой избыточностью элементов, которая может

резко увеличить объем и вес устройства в целом. Вычислительные системы, состоящие из ряда вычислительных машин, оказываются очень громоздкими, сложными и дорогими и требуют сложного программирования.

Имеется, однако, промежуточный путь между вычислительной средой и вычислительной системой - путь построения вычислительной структуры, состоящей из однотипных простых цифровых решающих блоков, выполняющих простые математические операции.

В частности, можно построить однородную вычислительную структуру, состоящую из однотипных цифровых интеграторов и коммутирующих элементов, причем такая структура позволит решать широкий класс задач в области управления и цифрового моделирования. В дальнейшем в отличие от вычислительных сред и вычислительных систем будем называть однородную систему, состоящую из простых цифровых решающих блоков и коммутирующих устройств, вычислительной структурой.

Как будет показано ниже, вычислительная структура, состоящая из цифровых интеграторов и коммутирующих элементов, обладает практически всеми перечисленными выше свойствами. В частности, такая вычислительная структура отличается высоким быстродействием, сравнительно высокой точностью, состоит из однотипных решающих блоков, обеспечивает высокую надежность, может продолжать функционировать при выходе из строя значительной части цифровых интеграторов, отличается способностью к перестройке программы, имеет возможность осуществить самонастройку и самоорганизацию, позволяет легко реализовать цифровые интеграторы и коммутирующие элементы на основе схем микрорадиоэлектроники, что обеспечивает их массовое производство, дает возможность расширять структуру за счет простого присоединения к последней дополнительных цифровых интеграторов и элементарных коммутаторов и имеет малые габариты и вес.

2. Обобщенные симметричные уравнения Шеннона

Вычислительные структуры, состоящие из цифровых интеграторов и элементарных коммутаторов, могут быть построены на основе системы дифференциальных уравнений Шеннона. К системе дифференциальных уравнений Шеннона сводится очень широкий круг задач, связанных с разработкой систем управления и систем цифрового моделирования. В частности, к системе уравнений Шеннона могут быть сведены линейные и нелинейные обыкновенные диф-

ференциальные уравнения и их системы с начальными и с граничными условиями; дифференциальные уравнения в частных производных, приводимые к обыкновенным дифференциальным уравнениям; трансцендентные, степенные и линейные алгебраические уравнения; задачи на вычисления различного рода интегралов, производных и экстремумов; задачи на вычисление функций одной и многих переменных; задачи на преобразование координат и многие другие задачи.

В обобщенной симметричной форме уравнения Шеннона имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} dy_{pk} = \sum\limits_{j=1}^{N} A_{pkj}\, dz_j \;, \\ dy_{qk} = \sum\limits_{j=1}^{N} A_{qkj}\, dz_j \;, \\ dz_k = y_{pk}\, dy_{qk} \;, \\ dz_1 = dx \;, \\ y_{pk}(x_0) = y_{pk0} \;, \\ k = 1,2,3,\ldots, N. \end{array}\right\} \qquad (I)$$

Здесь A_{pkj} и A_{qkj} ($k = 1,2,\ldots,N$; $j = 1,\ldots,N$) являются постоянными коэффициентами, принимающими значение 0 или 1.

Для выполнения условия $dz_1 = dx$ достаточно, чтобы $dy_{p1} = 0$ и $dy_{q1} = dx$, для чего в свою очередь необходимо и достаточно выбрать коэффициенты A_{p1j} и A_{q1j} следующим образом:

$$A_{p1j} = 0, \quad j = 1,2,\ldots, N, \qquad (2)$$

$$A_{q11} = 1$$

$$A_{q1j} = 0, \quad j = 2,3,\ldots,N. \qquad (3)$$

Система уравнений Шеннона характерна тем, что в правой части ее используются лишь операции суммирования и отсутствуют какие-либо более сложные операции (деления, умножения, функционального преобразования и т.п.). Это обстоятельство позволяет, как будет показано ниже, решать систему уравнений Шен-

нона с помощью лишь сумматоров и интеграторов, выполняющих интегрирование по Стилтьесу.

Система уравнений Шеннона может быть представлена в матрично-векторной форме. Для этого необходимо ввести в рассмотрение квадратную матрицу коэффициентов A_p , которая с учетом (2) приобретает вид

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{p21} & A_{p22} & A_{p23} & \dots & A_{p2N} \\ A_{p31} & A_{p32} & A_{p33} & \dots & A_{p3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{pN_1} & A_{pN_2} & A_{pN_3} & \dots & A_{pNN} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

квадратную матрицу коэффициентов A_q , которая, принимая во внимание (3), может быть записана следующим образом:

$$A_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{q21} & A_{q22} & A_{q23} & \dots & A_{q2N} \\ A_{q31} & A_{q32} & A_{q33} & \dots & A_{q3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{qN_1} & A_{qN_2} & A_{qN_3} & \dots & A_{qNN} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

и векторы

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{bmatrix}, \quad Y_p = \begin{bmatrix} 1 \\ y_{p2} \\ y_{p3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{pN} \end{bmatrix}, \quad Y_q = \begin{bmatrix} x \\ y_{q2} \\ y_{q3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{qN} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Кроме того, следует определить операцию преобразования векто-

ра Y_p в диагональную матрицу

$$M(Y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{p2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & y_{p3} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y_{pN} \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

В результате система уравнений Шеннона (I) может быть записана в более компактной матрично-векторной форме

$$\left.\begin{aligned} dY_p &= A_p\, dZ, \\ dY_q &= A_q\, dZ, \\ dZ &= M(Y_p)dY_p, \\ Y_p(x_o) &= Y_{po} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Как видно, решаемую задачу в системе уравнений Шеннона полностью определяют две матрицы A_p и A_q, состоящие из нулей и единиц, а также начальные условия, представленные вектором Y_{po}. Поэтому программирование задач,решаемых на основе уравнений Шеннона, оказывается очень простым и заключается в составлении матриц A_p и A_q и в подготовке вектора начальных условий Y_{po}.

3. Алгоритмы цифровых интеграторов, сумматоров и экстраполяторов приращений

Проинтегрируем систему уравнений Шеннона (I) на достаточно малом интервале от x_i до x_{i+1}. В результате интегрирования первого и второго равенств системы (I) получаем приращения функций $y_{pk}(x)$ и $y_{qk}(x)$, выраженные через приращения функций $z_j(x)$,

$$
\left.
\begin{aligned}
\nabla y_{p_{k(i+1)}} &= \sum_{j=1}^{N} A_{pkj} \nabla z_{j(i+1)} \\
\nabla y_{q_{k(i+1)}} &= \sum_{j=1}^{N} A_{qkj} \nabla z_{j(i+1)}
\end{aligned}
\right\} \tag{9}
$$

Интегрирование третьего равенства системы (I) приводит к интегралу Стилтьеса

$$
\nabla z_{k(i+1)} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{pk}(x) dy_{qk}(x), \tag{I0}
$$

который может быть определен численным методом с использованием приращений $\nabla y_{p_{k(i+1-\alpha)}}$ и $\nabla y_{q_{k(i+1-\alpha)}}$ ($\alpha = 0,1,2,\ldots,n-3$):

$$
\nabla z_{k(i+1)} = F\left[y_{pki}, \nabla y_{pk(i+1-\alpha)}, \nabla y_{qk(i+1-\alpha)}\right] \quad (\alpha = 0,1,2,\ldots,n-3). \tag{II}
$$

Если аппроксимировать функции $y_{pk}(x)$ и $y_{qk}(x)$ полиномами Ньютона, то формула численного интегрирования по Стилтьесу приобретает вид

$$
\begin{aligned}
\nabla z_{k(i+1)} = {} & y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} + \tfrac{1}{2} \nabla y_{pk(i+1)} \nabla y_{qk\,i+1} + \\
& + \sum_{\alpha=0}^{\frac{2n-9+(-1)^n}{4}} \; \sum_{\beta=\alpha+1}^{n-\alpha-3} a_{\alpha\beta n} \left[\nabla y_{pk(i+1-\alpha)} \nabla y_{qk(i+1-\beta)} - \right. \\
& \left. - \nabla y_{pk(i+1-\beta)} \nabla y_{qk(i+1-\alpha)}\right], \quad n = 4,5,6,\ldots
\end{aligned} \tag{I2}
$$

Здесь $a_{\alpha\beta n}$ – постоянные коэффициенты, определяемые таблицей, а n – порядок точности формулы численного интегрирования.

Формула (I2) является интерполяционной, то есть требует для вычисления приращения интеграла $\nabla z_{k(i+1)}$ знания приращений $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$. В свою очередь для определения с помощью выражений (9) приращений $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$ необходимо располагать сведениями о приращениях $\nabla z_{k(i+1)}$ ($k = 1,2,\ldots, N$). Чтобы устранить возникающий порочный круг, можно воспользоваться экстраполяционной формулой численного интегрирования по Стилтьесу. Но экстраполяционные

Таблица

Коэффициенты $a_{\alpha\beta\, n}$

$n = 4$

β \ α	0
1	$-\frac{1}{12}$

$n = 5$

β \ α	0
1 I	$-\frac{1}{6}$
2	$+\frac{1}{24}$

$n = 6$

β \ α	0	1
1	$-\frac{89}{360}$	
2	$+\frac{11}{90}$	$-\frac{1}{720}$
3	$-\frac{19}{720}$	

$n = 7$

β \ α	0	1
1	$-\frac{39}{120}$	
2	$+\frac{43}{180}$	$-\frac{1}{180}$
3	$-\frac{19}{360}$	$+\frac{1}{720}$
4	$+\frac{3}{160}$	

формулы оказываются значительно более сложными и менее точными. Поэтому для интегрирования уравнений Шеннона лучше использовать интерполяционную формулу (I2), а приращения $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$ получать путем экстраполяции приращений ∇y_{pki} и ∇y_{qki} на один шаг вперед. Точнее, следует экстраполировать на один шаг вперед приращения ∇z_{ki}, а затем с помощью проэкстраполированных значений $\nabla z^*_{k(i+1)}$ можно вычислить приращения $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$. Экстраполяция приращений осуществляется с помощью простого выражения

$$\nabla z^*_{k(i+1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \binom{n}{\alpha} \cdot \nabla z_{k(i+1-\alpha)} . \qquad (I3)$$

В результате приращения $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$ легко определяются путем суммирования (в соответствии с заданной программой) величин $\nabla z^*_{k(i+1)}$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla y_{pk(i+1)} &= \sum_{j=1}^{N} A_{pkj} \nabla \overset{*}{z}_{j(i+1)}, \\ \nabla y_{qk(i+1)} &= \sum_{j=1}^{N} A_{qkj} \nabla \overset{*}{z}_{j(i+1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Изложенное показывает, что система уравнений Шеннона (I) может быть проинтегрирована численным методом с помощью решающих блоков только трех типов: цифровых интеграторов, алгоритм работы которых определяется интерполяционной формулой численного интегрирования по Стилтьесу (I2); экстраполяторов приращений, которые работают в соответствии с выражением (I3); сумматоров приращений, выполняющих суммирование на основе формул (I4).

Точность работы цифрового интегратора тем выше, чем больше выбрана величина n. Но увеличение n влечет за собой существенное возрастание количества математических операций, выполняемых цифровым интегратором, и количества оборудования, требующегося для его построения. Подробное исследование показывает, что оптимальными с точки зрения точности, быстродействия и количества необходимого оборудования являются интеграторы, в которых принято $n = 4$. При $n = 4$ формула численного интегрирования по Стилтьесу приобретает вид

$$\nabla z_{k(i+1)} = y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} + \tfrac{1}{2} \nabla y_{pk(i+1)} \cdot \nabla y_{qk(i+1)} + \frac{1}{12}\left[\nabla y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} - \nabla y_{pk(i+1)} \nabla y_{qki} \right]. \qquad (15)$$

Формула экстраполяции приращений в этом случае выглядит следующим образом:

$$\nabla \overset{*}{z}_{k(i+1)} = 4 \nabla z_{ki} - 6 \nabla z_{k(i-1)} + 4 \nabla z_{k(i-2)} - \nabla z_{k(i-3)}. \qquad (16)$$

Как видно, алгоритмы, а, следовательно, и структуры цифровых интеграторов и экстраполяторов приращений, получаются в последнем случае сравнительно простыми.

В приведенных выражениях используются многоразрядные приращения. Если для решения задач не требуется высокая точность и скорость, то можно использовать более простые цифровые ин-

теграторы, работающие с одноразрядными приращениями. В таких интеграторах не следует применять точные формулы численного интегрирования, так как это не приводит (из-за значительной погрешности квантования) к общему возрастанию точности,а существенно усложняет оборудование. Поэтому в цифровых интеграторах с одноразрядными приращениями лучше всего использовать формулу прямоугольников

$$\nabla z_{k(i+1)} = y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} \quad , \tag{I7}$$

причем экстраполяторы приращений в этом случае не нужны, так как "экстраполяция" осуществляется в соответствии с выражением

$$\nabla z^*_{k(i+1)} = \nabla z_{ki} \; . \tag{I8}$$

4. Разностные уравнения, моделирующие уравнения Шеннона

Пользуясь полученными результатами, можно составить разностные уравнения, моделирующие обобщенные дифференциальные уравнения Шеннона (I). В общем виде такие разностные уравнения выглядят следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla y_{pk(i+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_{pkj} \nabla z^*_{j(i+1)} \; , \\
&\nabla y_{qk(i+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_{qkj} \nabla z^*_{j(i+1)} \; , \\
&\nabla z_{k(i+1)} = F\left[y_{pki}, \nabla y_{pk(i+1-\alpha)}, \nabla y_{qk(i+1-\alpha)}\right] \\
&\qquad\qquad (\alpha = 0,1,2,\ldots n-3) \\
&\nabla z^*_{k(i+2)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \binom{n}{\alpha} \nabla z_{k(i+1-\alpha)} \; , \\
&y_{pk(i+1)} = y_{pki} + y_{pk(i+1)} \; , \\
&x_{i+1} = x_i + \nabla x \; , \\
&\text{при} \\
&x = x_0 ,\; y_{pk} = y_{pk0} \; , \quad k = 1,2,3,\ldots, N.
\end{aligned}\right\} \tag{I9}$$

В уравнения (I9) введены дополнительные пятое и шестое равенства, необходимые для определения величин $y_{p\,k(i+1)}$ и x_{i+1}.

Как уже отмечалось, оптимальная с точки зрения быстродействия, точности и затрат оборудования структура решающих блоков получается в случае, когда $n = 4$. При этом система разностных уравнений, моделирующих уравнения Шеннона, приобретает вид

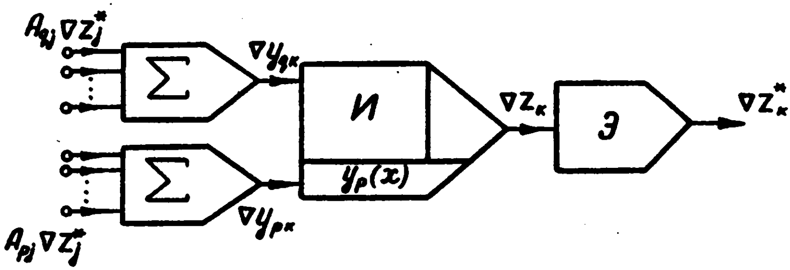
$$
\left.\begin{aligned}
y_{pk(i+1)} &= \sum_{j=1}^{N} A_{pkj} \nabla z^*_{j(i+1)}, \\
y_{qk(i+1)} &= \sum_{j=1}^{N} A_{qkj} \nabla z^*_{j(i+1)}, \\
\nabla z_{k(i+1)} &= y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} + \tfrac{1}{2} \nabla y_{pk(i+1)} \nabla y_{qk(i+1)} + \\
&\quad + \tfrac{1}{2}[\nabla y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} - \nabla y_{pk(i+1)} \nabla y_{qki}], \\
\nabla z^*_{k(i+2)} &= 4 \nabla z_{k(i+1)} - 6 \nabla z_{ki} + 4 \nabla z_{k(i-1)} - \nabla z_{k(i-2)}, \\
y_{pk(i+1)} &= y_{pki} + \nabla y_{pk(i+1)}, \\
x_{i+1} &= x_0 + (i+1) \nabla x, \\
\text{при} \quad x = x_0, &\quad y_{pk} = y_{pk0}, \quad k = 1,2,3,\ldots N.
\end{aligned}\right\} \quad (20)
$$

Если объединить операции суммирования приращений, вычисления интеграла и экстраполяции, входящие в систему разностных уравнений (I9), в одном решающем блоке, то в результате получим обобщенный многовходовой интегратор(см.рис.).Любая система дифференциальных уравнений Шеннона, а следовательно и любая задача, сводимая к уравнениям Шеннона, может быть решена с помощью одних обобщенных цифровых интеграторов. Для решения системы уравнений Шеннона требуется N обобщенных цифровых интеграторов, коммутация которых полностью определяется двумя матрицами единичных коэффициентов A_p и A_q. Матрица A_p может быть названа матрицей коммутации цифровых интеграторов по входам подынтегральных функций, а матрица A_q -матрицей коммутации цифровых интеграторов по входам переменных интегрирования.

5. Вычислительные структуры, состоящие из обобщенных цифровых интеграторов

Во многих случаях может быть использована однородная вычислительная структура, состоящая из обобщенных цифровых интеграторов и коммутирующих элементов. Изложенное выше показывает, что при построении такой вычислительной структуры необходимо сравнительно небольшое число N простых однородных цифровых интеграторов и небольшое число коммутирующих элементов. Если каждый обобщенный цифровой интегратор имеет ограниченное число m входов как для подынтегральной функции $y_p(x)$, так и для переменной интегрирования $y_q(x)$, то при реализации коммутации N интеграторов, предусмотренной программирующими матрицами A_p и A_q, достаточно иметь в распоряжении не более $2mN^2$ коммутирующих элементов. Это число коммутирующих элементов существенно меньше, чем число коммутирующих элементов, которое требуется при построении однородной вычислительной среды, предназначенной для решения того же круга задач, для решения которого предназначена и вычислительная структура из цифровых интеграторов. Вследствие небольшого числа коммутирующих элементов для управления вычислительной структурой, состоящей из цифровых интеграторов, необходимо сравнительно простое устройство управления.

Успехи микрорадиоэлектроники позволяют уже в ближайшем будущем построить цифровой интегратор совместно с экстраполятором и двумя сумматорами приращений (см. рис.) в виде единой



твердой схемы, размеры которой будут составлять всего несколько квадратных сантиметров, а вес будет исчисляться граммами. Еще более простыми и более миниатюрными могут быть выполнены на основе схем микрорадиоэлектроники элементарные коммутирующие ячейки. В результате оказывается возможным построить весьма компактную, и в то же время очень гибкую, вычислительную структуру, состоящую из цифровых интеграторов.

Такая структура будет обладать высокой надежностью и сможет продолжать функционировать, если даже часть интеграторов выйдет из строя. Интеграторы, вышедшие из строя, могут быть заменены системой управления другими интеграторами. В такой структуре можно просто осуществить перестройку программы (вследствие простоты последней) в процессе работы. На основе вычислительных структур, состоящих из цифровых интеграторов, оказывается возможным построить относительно простые самонастраивающиеся, самообучающиеся и самоорганизующиеся системы.

Цифровые интеграторы, работающие на основе точных формул численного интегрирования, обеспечивают высокую точность, а, следовательно, и высокую скорость вычислений, благодаря чему вычислительная структура, состоящая из цифровых интеграторов, может быть с успехом использована для работы в реальном масштабе времени, для управления быстродействующими объектами, для моделирования сложных динамических систем и ситуаций и для других аналогичных целей.

Серьезным достоинством вычислительных структур, в которых используются цифровые интеграторы, является унификация элементарных решающих и коммутирующих блоков, что позволит существенно улучшить технологию изготовления последних, свести к минимуму затраты на производство.