УДК 681.142.1.01

НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

И.Я. Акушский, Д.И. Юдицкий
(Москва)

В последние годы области применения вычислительной техники значительно расширились и объем информации, предъявляемой цифровым вычислительным машинам (ЦВМ) для обработки возрос настолько, что требуемая эффективная производительность ЦВМ достигла колоссальных размеров, которую невозможно даже и думать реализовать, не привлекая принципиально новых идей построения ЦВМ, новых методов организации, новых логик и структур.

Если в первое десятилетие развития вычислительной техники можно было ограничиться быстродействием, исчислявшимся в миллисекундах на операцию, то сейчас уже надо говорить о микросекундах и долях микросекунды. Миллионы операций в секунду - это требование сегодняшнего дня. Причем, если говорить о потребностях современных больших систем, то требуются миллионы не вообще операций в секунду, а именно алгоритмических операций, т.е. необходимых для реализации алгоритма, а все операции, которые затрачиваются на организацию обработки по данному алгоритму, считаются неэффективными и определяются недостатками структуры и организации машины.

Анализ направлений развития вычислительной техники показывает, что применением одной только "грубой силы" - уве-

личением рабочих частот элементов - нельзя решить проблему высокой производительности, тем более, что повышение частотности элементов - это сложная физическая, техническая и технологическая проблема, решение которой очень трудно осуществить в надлежащих масштабах. Каждый шаг в этом направлении, по мере приближения к теоретическому пределу, определяемому скоростью света, будет достигаться тяжело и дорогой ценой.

Генеральной идеей повышения эффективной производительности ЦВМ за счет её организации, структуры и логики является идея параллелизма, начиная от её простейших форм - совмещения во времени выполнения различных операций, и кончая наиболее радикальной - распараллеливанием процессов обработки и распределением работы для одновременного выполнения по отдельным машинам и устройстам, в соответствии с чем в настоящее время создаются уже целые системы машин, связанных воедино структурой управления.

Анализ занятости различных устройств некоторых вычислительных машин приводит к следующим цифрам:

оперативная память	- 5-10	процентов	всего	рабочего	времени;	
арифметическое устройство	- 15-20	"	"	"	"	;
регистры управления	- 25-40	"	"	"	"	.

Эти цифры свидетельствуют о значительном простое основных устройств вычислительной машины (ВМ) и о возможности повышения эффективной производительности в несколько раз уже только за счет ликвидации этих простоев. Отсюда и возникло применение метода совмещения операций различных типов, организуемого непосредственно в схеме машины. Однако, совмещение операций в рамках одной программы дает малый эффект и поэтому возникла мультипрограммная работа, когда в памяти хранятся несколько программ и в каждый данный отрезок времени могут выполняться отдельные команды различных программ в зависимости от наличия свободных устройств в машине, которые могут выполнять эти команды. Основными требованиями к мультипрограммной системе являются:

1) любой элемент системы, не используемый в данный момент времени командой, должен быть доступен для использования командой из любой другой параллельно выполняемой программы;

2) схемы выполнения операций должны быть таковы, чтобы бы-

ла возможность использовать различные регистры и логические блоки таким образом, чтобы позволить одной команде занимать свободную часть рабочего такта другой команды;

3) система должна быть организована так, чтобы осуществление наблюдения и управления, необходимых для выполнения нескольких программ, не требовало дополнительного времени.

Дальнейшее развитие принципа параллелизма - это создание вычислительных систем. За последние годы разработана новая универсальная организация ВМ - эффективные системы обработки данных общего назначения, позволяющие решать экономические, инженерно-технические и научные задачи,способные работать в реальном времени и состоящие из семейств ВМ.

Отличительная черта многомашинных систем - совместимость программ и машинных языков для всех машин.Совместимость означает, что если программа выполняется на одной из машин, то она будет без изменений выполняться и на любой другой машине системы, при условии, что последняя имеет необходимые объем памяти и устройства ввода-вывода. Такая совместимость должна обеспечить всестороннее удовлетворение нужд потребителей, предоставляя исключительную свободу в комплектовании системы для конкретного применения.

Наиболее эффективны многомашинные системы для таких задач, алгоритмы которых могут быть легко распараллелены.Весьма перспективным, с нашей точки зрения, вариантом распараллеливания процессов обработки информации является распараллеливание не на уровне алгоритмов, а на уровне элементарных операций, т.е. разбиение обрабатываемого слова (числа) на небольшие части и параллельное выполнение элементарных операций над этими частями. В этом плане необходимо было найти соответствующие теоретико-арифметические концепции, определяющие характер частей разбиения слова и способы их параллельной обработки. Такой концепцией является теория непозиционных систем счисления.

Исследования, проведенные в последние годы,позволили построить разнообразные системы счисления с той или иной степенью позиционности. Эти системы, названные слабо-позиционными, являются наиболее общими типами систем счисления,частными случаями которых являются известные в вычислительной технике системы.

Рассмотрим сущность слабо-позиционных систем счисления.

Любое целое число N может быть представлено, как значение полинома n -го порядка

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами, при некотором значении $x = x_0$, т.е.

$$N = P_n(x_0).$$

Та или иная система счисления определяется способом задания полинома $P_n(x)$. Известно, что полином n -го порядка может быть задан своими значениями в $n + 1$ точках

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1} .$$

Назовем эти значения полинома

$$\gamma_1 = P_n(x_1),\ \gamma_2 = P_n(x_2),\ \ldots,\ \gamma_i = P_n(x_i), \ldots,\ \gamma_{n+1} = P_n(x_{n+1})$$

компонентами полинома или компонентами числа N . Совокупность компонент будем рассматривать, как систему счисления, т.е. каждое число будем представлять совокупностью компонент изображающего это число полинома. Очевидно,что значения компонент, т.е. непосредственное представление числа,зависит от выбора точек x_i , точки x_0 и собственно вида изображающего число полинома $P_n(x)$. Для того, чтобы принятое представление числа в форме совокупности его компонент было корректным, необходимо, чтобы истинное значение числа единственным образом определялось этой совокупностью, т.е. чтобы не могло оказат ся, что данная совокупность компонент отображает какие-либо различные числа. Эта единстственность представления основана на единственности построения интерполяционного полинома $P_n(x)$ по его значениям в $n + 1$ точках.

Формула Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x)}{(x - x_i)\varphi'(x_i)} \gamma_i ,$$

где

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1}),$$

позволяет восстановить полином $P_n(x)$ по значениям компонент, а, следовательно, для $x = x_0$ может служить формулой восстановления числа N .

Для того, чтобы представление чисел в форме компонент могло служить системой счисления,необходимо определить пра-

вила восполнения основных арифметических операций над представленными в этой форме числами.

Пусть

$$N_1 = (\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}, \ldots, \gamma_i^{(1)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(1)}),$$

$$N_2 = (\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}, \ldots, \gamma_i^{(2)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(2)})$$

- два числа.

Обозначим через $(\gamma_1^{(\pm)}, \gamma_2^{(\pm)}, \ldots, \gamma_i^{(\pm)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(\pm)})$ компоненты числа $N_1 \pm N_2$. Тогда, вследствие того, что из равенства

$$P_n^{(\pm)}(x) = P_n^{(1)}(x) \pm P_n^{(2)}(x)$$

вытекает равенство

$$P_n^{(\pm)}(x_i) = P_n^{(1)}(x_i) \pm P_n^{(2)}(x_i),$$

можно написать, что

$$\gamma_i^{(\pm)} = \gamma_i^{(1)} \pm \gamma_i^{(2)},$$

$$i = \overline{1, n+1}.$$

Иначе говоря, компоненты суммы (разности) двух чисел равны суммам (разностям) соответствующих компонент слагаемых. Здесь уже видно, что операция сложения (вычитания) проводится над компонентами чисел по каждой из компонент независимо друг от друга. Разумеется, это правило суммирования распространяется на любое число слагаемых.

Обозначим теперь через $(\gamma_1^{(x)}, \gamma_2^{(x)}, \ldots, \gamma_i^{(x)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(x)})$ компоненты произведения $N_1 N_2$. Если

$$N_1 \cdot N_2 = P_n^{(x)}(x_0),$$

причем полиномы $P_n^{(1)}(x)$ и $P_n^{(2)}(x)$ таковы, что их произведение $P_n^{(1)}(x) \cdot P_n^{(2)}(x)$ образует полином порядка не выше n, то имеет место равенство

$$P_n^{(x)}(x) = P_n^{(1)}(x) \cdot P_n^{(2)}(x)$$

и, следовательно,

$$P_n^{(x)}(x_0) = P_n^{(1)}(x_0)\cdot P_n^{(2)}(x_0).$$

На основании последнего равенства, можно написать

$$\gamma_i^{(x)} = \gamma_i^{(1)}\ \gamma_i^{(2)},$$
$$i = \overline{1,\ n+1}.$$

Иначе говоря, компоненты произведения двух чисел равны произведениям соответствующих компонент сомножителей. Разумеется, здесь существенным является указанное выше условие о том, чтобы сумма порядка полиномов, представляющих сомножители, не превышала n, так как в противном случае недостаточно $n+1$ компонент для представления получающегося полинома – произведения. Это условие эквивалентно в случае обычного позиционного представления требованию, чтобы при принятом диапазоне представления чисел результат операции не выходил за пределы этого диапазона.

Таким образом, при соблюдении указанного условия операция умножения проводится над компонентами чисел по каждой из компонент независимо друг от друга.

Наконец, пусть $F_s(x)$ некоторый полином порядка s и пусть число $N = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$ таково, что представляющий его полином $P_n(x)$ имеет порядок, не превышающий $n - s$, и, следовательно, $F_s(P_n(x))$ имеет порядок не более n, тогда, если число

$$F_s(N) = (\gamma_1^{(F)}, \gamma_2^{(F)}, \ldots, \gamma_{n+1}^{(F)}),$$

то

$$\gamma_i^{(F)} = F(\gamma_i),$$
$$i = \overline{1,\ n+1}.$$

Иначе говоря, компоненты полинома от данного числа вычисляются независимо по каждой соответствующей компоненте числа. Эта особенность не присуща позиционным системам счисления. В позиционной системе n – разрядное число по основанию p представляется в виде

$$N = a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$$

где a_i $(i = \overline{1, n+1})$ – цифры 0, 1, ..., p-1.

Можно рассматривать обобщенную позиционную (полиадическую) систему, в которой n – разрядное число N представляется в виде

$$N = a_{n-1}p_{n-1} + \ldots + a_1 p_1 + a_0.$$

Очевидно, что обычная позиционная система получается из обобщенной, если положить

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = p, \qquad i = \overline{1, n-1},\ p_0 = 1.$$

Если же $\dfrac{p_i}{p_{i-1}} = \pi_i$, то

$$N = a_{n-1}\pi_{n-1}\ldots\pi_1 + a_{n-2}\pi_{n-2}\ldots\pi_1 + \ldots$$
$$\ldots + a_1\pi_1 + a_0.$$

Числа $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ суть основания обобщенной позиционной системы.

Если принять, что цифры a_i – числа

$$0, 1, \ldots, \pi_i - 1 \qquad (i = \overline{1, n}),$$

то объем диапазона представимых в данной системе чисел равен

$$P = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_n.$$

Последовательное получение цифр числа в соответствующем представлении может быть осуществлено следующим процессом:

1) делится N на π_1, это дает $\left[\frac{N}{\pi_1}\right] = N_1$ и $N - N_1\pi_1 = a_0$;

2) делится N_1 на π_2, это дает $\left[\frac{N_1}{\pi_2}\right] = N_2$ и $N_1 - N_2\pi_2 = a_1$;

. . . .

i) делится N_{i-1} на π_i, это дает $\left[\frac{N_{i-1}}{\pi_i}\right] = N_i$ и $N_{i-1} - N_i\pi_i = a_i$;

. . . .

n) делится N_{n-1} на π_n, это дает $\left[\frac{N_{n-1}}{\pi_n}\right] = N_n$ и $N_{n-1} - N_n\pi_n = a_n$.

Здесь $[Y]$ обозначает целую часть числа Y. Заметим, что в позиционной системе все последовательные деления ведутся на число p (основание системы).

Для описанного процесса характерно последовательное получение цифр каждого разряда в строго определенном порядке (начиная с младшего разряда), когда результат предшествующего этапа (полученное на этом этапе частное) участвует в качестве делимого на следующем этапе. Это отражает присущую позиционным системам счисления зависимость между разрядами числа, что при выполнениях операций над числами в позиционной системе влечет за собой необходимость учета переносов из младших разрядов в старшие.

Эта зависимость разрядов отягощает в значительной степени аппаратурное выполнение операций и ограничивает возможности в достижении высокого быстродействия и простоты реализации. Существенное отличие имеет слабопозиционная система от системы счисления в остаточных классах, являющейся частным случаем слабопозиционной системы.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – целые числа, которые мы будем называть основаниями системы. Цифрой i -го разряда α_i числа N мы примем наименьший положительный остаток от деления N на p_i, т.е.

$$\alpha_i = N - \left[\frac{N}{p_i}\right] p_i \quad , \ (i = \overline{1,n}).$$

Легко видеть, что здесь, в отличие от позиционной системы, образование цифры каждого разряда проводится независимо друг от друга. Цифра i -го разряда α_i представляет собою наименьший положительный остаток от деления самого числа N (а не предыдущего частного) на i -ое основание p_i. Имеет место, очевидно, $\alpha_i < p_i$.

В теории чисел доказывается, что если числа P взаимно простые между собой, то описанное цифрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представление числа N является единственным.

Объем диапазона представимых чисел в этом случае, как легко видеть, равен

$$\mathcal{P} = p_1 p_2 \ldots p_n .$$

Правила выполнения операций сложения и умножения в системе остаточных классов аналогичны правилам выполнения операций над компонентами.

Пусть $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – два числа, представленных остатками α_i и β_i по основаниям p_i. Тогда, если $A + B$ и $A \cdot B$ не выходят из диапазона P,

т.е. $A + B < \mathcal{P}$ и $AB < \mathcal{P}$, то имеют место равенства

$$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_n).$$

При этом, если $\alpha_i + \beta_i \geq p_i$ или $\alpha_i\beta_i \geq p_i$, то в качестве цифры результата берется соответственно

$$\alpha_i + \beta_i - \left[\frac{\alpha_i + \beta_i}{p_i}\right] p_i$$

или

$$\alpha_i\beta_i - \left[\frac{\alpha_i \cdot \beta_i}{p_i}\right] p_i .$$

Будем делить полином $P_n(x)$, представляющий данное число, на $x - x_i$. Получим

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - x_i) + \tau_i .$$

Здесь $Q_{n-1}(x)$ – полином $n - 1$ порядка, а τ_i–независящий от x остаток от деления. Положив $x = x_i$, получим

$$P_n(x_i) = \gamma_i = \tau_i .$$

Остаток от деления $P_n(x)$ на $x - x_i$ равен i-ой компоненте числа.

Таким образом, совокупность линейных двучленов

$$x - x_1, \quad x - x_2, \ldots, x - x_{n-1}$$

может рассматриваться, как система оснований, а компоненты – как остатки от деления данного полинома на эти основания. При фиксированном значении $x = x_0$ линейные двучлены переходят в числа $p_1 = x_0 - x_1$, $p_2 = x_0 - x_2$, ..., $p_i = x_0 - x_i$, ..., $p_{n+1} = x_0 - x_{n+1}$, составляющие систему оснований для числового представления.

Представление числа N в форме полинома может быть осуществлено различным образом, т.е. могут выбираться самые различные полиномы $P_n(x)$. В соответствии с этим данное число может быть многочисленными способами представлено в компонентной форме. Пусть $P_n(x)$ и $\overline{P_n(x)}$ – два таких полинома, что

$$N = P_n(x_0) = \overline{P_n(x_0)},$$

и пусть

$$P_n(x_i) = \gamma_i, \quad \overline{P_n}(x_i) = \overline{\gamma_i}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

В соответствии с изложенным можно написать

$$N = P_n(x_0) = Q_{n-1}(x_0)(x_0 - x_i) + \gamma_i \quad ,$$

$$N = \bar{P}_n(x_0) = \bar{Q}_{n-1}(x_0)(x_0 - x_i) + \bar{\gamma}_i \quad .$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_i - \bar{\gamma}_i = (x_0 - x_i)\,[\bar{Q}_{n-1}(x_0) - Q_{n-1}(x_0)], \quad i = \overline{1, n+1}$$

или

$$\gamma_i - \bar{\gamma}_i = T_i p_i \ , \qquad i = \overline{1, n+1},$$

т.е. разность между компонентами различных представлений числа в компонентной форме при данной системе оснований кратна соответствующему основанию. Последнее равенство может быть записано в форме сравнения

$$\gamma_i \equiv \bar{\gamma}_i \pmod{p_i}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Обозначим через α_i наименьший положительный вычет по модулю p_i. На основании свойств сравнений, можем написать

$$\gamma_i \equiv \alpha_i \pmod{p_i},$$
$$\bar{\gamma}_i \equiv \alpha_i \pmod{p_i},$$
$$i = \overline{1, n+1}.$$

Иначе говоря, соответствующие компоненты, т.е. компоненты по основанию p_i различных представлений числа N, имеют один и тот же наименьший положительный вычет по основанию p_i. Этим устанавливается непосредственная связь между компонентным представлением числа и представлением его в системе остаточных классов.

Пусть $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1})$ и $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_{n+1})$ – два различных представления числа N. Можем написать следующее равенство:

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x_0)}{(x_0 - x_i)\varphi'(x_i)}\gamma_i = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x_0)}{(x_0 - x_i)\varphi'(x_i)}\bar{\gamma}_i \quad ,$$

откуда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x_0)}{(x_0 - x_i)\varphi'(x_i)} (\gamma_i - \overline{\gamma}_i) = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{T_i}{\varphi'(x_i)} = 0 .$$

Это уравнение является уравнением инвариантности представления числа N. Переход от одного представления числа к другому может быть осуществлен прибавлением к каждой компоненте любых чисел кратных соответствующему основанию при одном условии, чтобы эти кратности T_i $(i = \overline{1, n+1})$ удовлетворяли вышеприведенному условию.

Так как $\gamma_i = \overline{\gamma}_i + T_i p_i$, то образуя суммы этих величин

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i}{p_i \varphi'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\overline{\gamma}_i}{p_i \varphi'(x_i)} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{T_i}{\varphi'(x_i)} ,$$

можем сделать вывод, что для различных представлений числа величина

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i \varphi'(x_i)} \gamma_i = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i \varphi'(x_i)} \overline{\gamma}_i$$

является постоянной. Можем написать

$$\gamma_i = \alpha_i + L_i p_i ,$$

$$\overline{\gamma}_i = \alpha_i + \overline{L}_i p_i .$$

Подставляя вместо γ_i их значения, получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\varphi'(x_i)} L_i = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\varphi'(x_i)} \overline{L}_i .$$

Иначе говоря, величина

$$W = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\varphi'(x_i)} \quad \frac{\gamma_i - \alpha_i}{p_i}$$

является постоянной величиной, независящей от выбранного исходного полиномиального представления числа. Эту величину мы назовем весом числа N в данной системе оснований. Вес является важной характеристикой числа.

Как указывалось выше, представление в форме остаточных классов получается из компонентного представления, когда вместо компонент берутся их наименьшие положительные вычеты по соответствующим основаниям. Определим основные соотношения, связывающие оба вида представлений.

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varphi(x)}{(x-x_i)\varphi'(x_i)} L_i (x - x_i)$$

при $x = x_0$ дает

$$N = \varphi(x_0)\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i\,\varphi'(x_i)}\alpha_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\varphi'(x_i)} L_i\right\} = \varphi(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i\,\varphi'(x_i)}\alpha_i + W\right).$$

Для представления числа N в остаточных классах

$$N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$$

формула восстановления имеет вид

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i m_i \frac{\varphi}{p_i} - r_A \varphi .$$

Здесь $\varphi = p_1 p_2 \ldots p_{n+1} = \varphi(x_0)$, а m_i – таково, что

$$m_i \frac{\varphi}{p_i} = k_i p_i + 1 .$$

Приравнивая правые части и сокращая на φ, получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i\,\varphi'(x_i)}\alpha_i + W = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i m_i \frac{1}{p_i} - r_A$$

или

$$W + r_A = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \left(m_i \frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_i \varphi(x_i)}\right).$$

Это соотношение связывает между собой вес числа и его ранг, т.е. основные характеристики компонентного представления и представления в остаточных классах.

Перейдем теперь к рассмотрению представлений, вытекающих из другого способа задания полинома $P_n(x)$. А именно, к заданию значений полинома $P_n(x)$ и его производных в заданных точках: $x_1, x_2, \dots, x_s$.

В точке x_1 задаются значения

$$\gamma_1 = P_n(x_1), \quad \gamma_1^{(1)} = P_n'(x_1), \quad \gamma_1^{(2)} = P_n''(x_1), \dots$$

$$\dots, \quad \gamma_1^{(r_1)} = P_n^{(r_1)}(x_1).$$

В точке x_2 задаются значения

$$\gamma_2 = P_n(x_2), \quad \gamma_2^{(1)} = P_n'(x_2), \dots, \quad \gamma_2^{(r_2)} = P_n^{(r_2)}(x_2).$$

В точке x_s задаются значения

$$\gamma_s = P_n(x_s), \quad \gamma_s^{(1)} = P_n'(x_s), \dots, \quad \gamma_s^{(r_s)} = P_n^{(r_s)}(x_s).$$

Для того, чтобы задание полинома $P_n(x)$ было корректным и определяло его единственным образом, должно иметь место

$$r_1 + r_2 + \dots + r_s = n + 1 - s.$$

Рассмотрим правила выполнения арифметических операций для описанного представления. Пусть мы имеем два числа N_1 и N_2 и пусть представляющие их полиномы – $P_n(x)$ и $\overline{P_n(x)}$. Через указанные значения эти числа представятся в виде

$$N_1 = (\gamma_1, \dots, \gamma_1^{(r_1)}, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_i^{(r_i)}, \dots, \gamma_s, \dots, \gamma_s^{(r_s)}),$$

$$N_2 = (\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_1^{(r_1)}, \dots, \overline{\gamma}_i, \dots, \overline{\gamma}_i^{(r_i)}, \dots, \overline{\gamma}_s, \dots, \overline{\gamma}_s^{(r_s)}).$$

Пусть соответствующее представление суммы (разности) этих чисел имеет вид

$$N_1 + N_2 = (\gamma_{1\Sigma}, \dots, \gamma_{1\Sigma}^{(r_1)}, \dots, \gamma_{i\Sigma}, \dots, \gamma_{i\Sigma}^{(r_i)}, \dots, \gamma_{s\Sigma}, \dots$$

$$\dots, \gamma_{s\Sigma}^{(r_s)}).$$

Вследствие наличия для полинома

$$P_{n\Sigma}(x) = P_n(x) \pm \overline{P}_n(x)$$

соотношений

$$P_{n\Sigma}(x_i) = P_n(x_i) \pm \overline{P}_n(x_i), \quad P'_{n\Sigma}(x_i) = P'_n(x_i) \pm \overline{P}'_n(x_i), \ldots$$

$$\ldots, P_{n\Sigma}^{(r_i)}(x_i) = P_n^{(r_i)}(x_i) \pm \overline{P}_n^{(r_i)}(x_i);$$

$$i = \overline{1,s},$$

вытекают соотношения

$$\gamma_{i\Sigma} = \gamma_i \pm \overline{\gamma}_i, \quad \gamma'_{i\Sigma} = \gamma'_i + \overline{\gamma}'_i, \ldots, \quad \gamma_{i\Sigma}^{(r_i)} = \gamma_i^{(r_i)} + \overline{\gamma}_i^{(r_i)}.$$

Эти соотношения определяют правила выполнения операции сложения (вычитания) для представления с участием производных.

Несколько сложнее обстоит дело с операцией умножения. Пусть

$$P_{n(x)}(x) = P_n(x)\, \overline{P}_n(x).$$

Тогда, в соответствии с формулой Лейбница, имеем

$$P_{n(x)}^{(r)}(x) = P_n^{(r)}(x)\, \overline{P}_n(x) + rP_n^{(r-1)}(x)\, \overline{P}_n^{1}(x) +$$

$$+ \frac{r(r-1)}{2} P_n^{(r-2)}(x)\, \overline{P}''_n(x) + \ldots + \frac{r(r-1)\ldots(r-j)}{j!} P_n^{(r-j-1)}(x) \cdot$$

$$\cdot \overline{P}_n^{(j+1)}(x) + \ldots + r\, P'_n(x)\, \overline{P}_n^{(r-1)}(x) + P_n(x)\, \overline{P}_n^{(r)}(x).$$

Отсюда, если для величины N_1N_2 мы примем представление

$$N_1N_2 = (\gamma_{1x}, \ldots, \gamma_{1x}^{(r)}, \ldots, \gamma_{ix}, \ldots, \gamma_{ix}^{(r_i)}, \ldots, \gamma_{sx}, \ldots, \gamma_{sx}^{(r_s)}),$$

то получим формулы для вычисления компонент представления N_1N_2 в виде

$$\gamma_{ix} = \gamma_i \overline{\gamma}_i, \qquad \gamma'_{ix} = \gamma'_i \overline{\gamma}_i + \gamma_i \overline{\gamma}'_i,$$

$$\gamma''_{ix} = \gamma''_i \overline{\gamma}_i + 2\gamma'_i \overline{\gamma}'_i + \gamma_i \overline{\gamma}''_i, \ldots,$$

$$\gamma_{ix}^{(r_i)} = \gamma_i^{(r_i)} \overline{\gamma}_i + r_i \gamma_i^{(r_i-1)} \overline{\gamma}'_i + \frac{r_i(r_i-1)}{2} \gamma_i^{(r_i-2)} \overline{\gamma}''_i + \ldots$$

$$\ldots + r_i \gamma'_i \overline{\gamma}_i^{(r_i-1)} + \gamma_i \overline{\gamma}_i^{(r_i)}.$$

Для того, чтобы определенное выше представление чисел могло быть использовано в качестве системы счисления, необходимо получить формулу для восстановления значения числа по заданным компонентам представления.

Написание общей формулы для $P_n(x)$ было бы весьма громоздким и мы ограничимся формулой, которая достаточна для практических примеров, когда в точках $x_1, x_2, \ldots, x_s$ заданы значения полинома и его первых производных. В этом случае искомая формула имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_s(x) \frac{\gamma_i' - L_{s-1}'(x_i)}{\varphi_s'(x)} \cdot \frac{\varphi_s(x)}{(x - x_i)\,\varphi_s'(x)} + L_{s-1}(x),$$

где

$$L_{s-1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\varphi_s(x)}{(x - x_j)\,\varphi_s'(x_j)}\, \gamma_j ,$$

а

$$\varphi_s(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_s).$$

Наличие точной формулы для восстановления числа по компонентам и введение наряду со значениями полинома в некоторых точках также и значении производных полинома в этих же точках, наличие каждой из которых эквивалентно заданию дополнительного значения полинома в некоторой новой точке, определяет особенности данной системы, позволяющие простым способом на основе конечных соотношений (линейных форм с постоянными коэффициентами) преодолевать трудности реализации операций, в которых необходима в той или иной форме информация о полном значении числа.

Выше было упомянуто, что введение каждого значения производной эквивалентно заданию значения полинома $P_n(x)$ в некоторой новой точке x_{s+j}, т.е. новой компоненты γ_{s+j}. Это утверждение вытекает из того факта, что написав выражение для полинома порядка $2k-1$ через компоненты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2k}$ в виде

$$P_{2k-1}(x) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\varphi_{2k}(x)}{(x - x_i)\,\varphi_{2k}'(x_i)}\, \gamma_i ,$$

где

$$\varphi_{2k}(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{2k}),$$

продифференцировав его и положив в $P'_{2k-1}(x)$ последовательно $x = x_1,\ x = x_2, \ldots, x = x_k$, получим систему из k уравнений

$$\gamma'_i = \sum_{j=1}^{k} T^i_j \gamma_j + \sum_{j=1}^{k} S^i_j \gamma_{k+j},$$

$$i = \overline{1,k}.$$

Решая эту систему относительно γ_{k+j}, получим выражения для γ_{k+i} через γ_i и γ'_i ($i = \overline{1,\ k}$) в виде

$$\gamma_{k+i} = \sum_{j=1}^{k} R^i_j \gamma_j + \sum_{j=1}^{k} U^i_j \delta_j,$$

где R^i_j и U^i_j – постоянные, зависящие от выбранных основных точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$, дополнительно вводимых x_{k+1} $x_{k+2}, \ldots, x_{2k}$ и фиксированного значения $x = x_0$. Особенно простой вид приобретают эти равенства, если точки x_i $(i = \overline{1,\ 2k})$ выбираются эквидистантно.

Для представления с участием производных могут также быть установлены инвариантные характеристики числа типа рассмотренного выше веса, которые в конечном итоге позволяют оперировать не с полными компонентами, а с их остатками по основаниям принятой системы. Введение представления с участием производных существенно снижает ограничения, накладываемые на выбор оснований системы. Оказывается возможным применять несколько раз в представлении чисел одно и то же основание (для значений полинома и его производных), что позволяет достигнуть необходимого диапазона (равного, как известно, произведению оснований системы) основаниями малой разрядности, а это определяет простоту и быстродействие при технической реализации, которые могут окупить некоторое усложнение выполнения операции умножения.

Повышение порядка производных, значения которых фигурируют в представлении, уменьшает количество разных оснований в системе, но зато увеличивает связность в операции умножения между компонентами числовых представлений.

Рассмотрим предельный случай, когда полином $P_n(x)$ задан своим значением и значениями своих производных до n -го порядка включительно в некоторой точке $x = \xi$.

$$P_n(\xi) = \gamma,\ P'_n(\xi) = \gamma', \ldots, P^{(i)}_n(\xi) = \gamma^{(i)}, \ldots, P^{(n)}_n(\xi) = \gamma^{(n)}.$$

В качестве формулы восстановления полинома $P_n(x)$ по

заданному представлению может служить формула Тейлора

$$P_n(x) = \gamma + (x - \xi)\gamma' + (x - \xi)^2\frac{\gamma''}{2!} + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - \xi)^i}{i!}\gamma^{(i)} + \ldots + \frac{(x - \xi)^n}{n!}\gamma^{(n)} .$$

Если число $N = P_n(x_0)$, то для N мы получаем, приняв $x_0 - \xi = p$ (основание системы), обычное позиционное представление

$$N = \frac{\gamma^{(n)}}{n!}p^n + \frac{\gamma^{(n-1)}}{(n-1)!}p^{n-1} + \ldots + \gamma' p + \gamma .$$

Отсюда видно, что это представление не что иное, как обычная позиционная система с основанием p, в котором цифры представления пропорциональны обычно принятым для позиционного представления цифрам.

Наряду с рассмотренным выше, можно сделать вывод,что система представления полинома $P_n(x)$ своими компонентами (с участием значений производных или без их участия), названная нами слабо-позиционной системой, включает в себя,как предельные случаи, обычную систему остаточных классов, когда заданы компоненты без участия производных в некоторой системе точек, причем каждая компонента задается своим остатком по соответствующему основанию, и обычную позиционную систему - когда заданы значения полинома, представляющего число,и всех его производных в некоторой точке, представляющие величины пропорциональные цифрам позиционного представления числа. В промежутках между этими предельными случаями слабо-позиционная система позволяет строить системы счисления различной степени связности между цифрами числового представления при выполнении арифметических операций.

Таким образом, теория слабо-позиционных систем является весьма общей теоретической концепцией, включающей в себя известные системы счисления, как некоторые частные случаи,а также ряд новых систем, обладающих специфическими особенностями, которые могут быть использованы для максимального учета особенностей технической реализации.

Рассмотрим теперь какова связь между полиадическими системами и слабо-позиционными.

Оказывается, что полиадические системы могут быть включены в слабо-позиционную систему, если рассмотреть еще один воз-

можный способ задания полинома $P_n(x)$, представляющего число. Мы выше рассмотрели два способа задания полинома:
I) значениями полинома в некоторых точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$;
2) значениями полинома и его производных в точках

$$x_1, x_2, \ldots, x_s.$$

Однако, возможен еще и третий путь определения полинома $P_n(x)$ – задание значений его последовательных разностей в некоторой точке. Должны быть заданы для полинома n-го порядка значения 0-ой, 1-ой,..., вплоть до n-ой разности, где под 0-ой разностью понимается значение полинома в этой точке. Всего должно быть задано $n+1$ величин: $P_n(x_j)$, $\Delta P_n(x_j), \ldots, \Delta^n P_n(x_j)$. Для образования разностей должно быть выбрано $n+1$ точек. При произвольном выборе точек, речь идет о разделенных разностях, получаемых следующим образом:

первый порядок:

$$\frac{P_n(x_2) - P_n(x_1)}{x_2 - x_1} = \Delta(x_1, x_2), \ldots, \frac{P_n(x_{n+1}) - P_n(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \Delta(x_{n+1}, x_n),$$

второй порядок:

$$\frac{\Delta(x_2, x_3) - \Delta(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} = \Delta^2(x_1, x_2, x_3), \ldots$$

$$\ldots, \frac{\Delta(x_n, x_{n+1}) - \Delta(x_{n-1}, x_n)}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \Delta^2(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}),$$

и, наконец, разность n-го порядка:

$$\Delta^n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\Delta^{n-1}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) - \Delta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_1}.$$

При эквидистантном выборе точек

$$x_1, x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h = x_1 + 2h, \ldots, x_{n+1} = x_n + h = x_1 + nh$$

формулы упрощаются; знаменателем i-ой разности является для всех значений разностей величина ih.

Для восстановления полинома $P_n(x)$ по его разностям служит формула Ньютона

$$P_n(x) = P_n(x_1) + (x - x_1)\Delta(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\Delta^2(x_1, x_2, x_3) + \ldots + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\Delta^n(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Для значения числа $N = P_n(x_0)$ получаем

$$N = P_n(x_0) = P_n(x_1) + (x_0 - x_1)\Delta(x_1, x_2) +$$

$$+ (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\Delta^2(x_1, x_2, x_3) + \dots +$$

$$+ (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)\Delta^n(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

Для того, чтобы данное представление в форме разностей могло быть принято в качестве системы счисления, необходимо определить правила выполнения арифметических операций над числами, представленными в этой форме.

Так как разделенная разность любого порядка суммы (разности) двух чисел равна сумме (разности) разделенных разностей этого порядка слагаемых (уменьшаемого и вычитаемого), то представление суммы двух чисел получается так же, как и в компонентной форме, суммированием соответствующих цифр слагаемых. Так, если

$$N_1 = (\delta_0^1, \delta_1^1, \dots, \delta_n^1),$$

$$N_2 = (\delta_0^2, \delta_1^2, \dots, \delta_n^2),$$

$$N_\pm = (\delta_0^\pm, \delta_1^\pm, \dots, \delta_n^\pm),$$

то

$$\delta_0^\pm = \delta_0^1 \pm \delta_0^2, \ \delta_1^\pm = \delta_1^1 \pm \delta_1^2, \dots, \delta_n^\pm = \delta_n^1 \pm \delta_n^2.$$

Несколько сложнее обстоит дело с операцией умножения, поскольку связь между разностью произведения и произведением разностей уже не определяется так просто. Определим эту связь.

Пусть даны две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и пусть $R(x) = f(x)\,\varphi(x)$. Тогда

$$\Delta R(x) = R(x + h) - R(x) = f(x + h)\,\varphi(x + h) - f(x)\,\varphi(x).$$

Обозначим разности функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно через $\Delta f(x)$ и $\Delta\varphi(x)$. Можно написать следующее тождество:

$$\Delta f(x)\Delta\varphi(x) = f(x + h)\,\varphi(x + h) - f(x)\,\varphi(x + h) -$$

$$- \varphi(x)f(x + h) + f(x)\,\varphi(x).$$

Отсюда

$$\Delta R(x) = f(x)\ \varphi(x+h) + \varphi(x) f(x+h) + \Delta f(x) \Delta\varphi(x) - 2f(x)\varphi(x)$$

или, заменяя $f(x+h)$ и $\varphi(x+h)$ их выражениями через $f(x)$ и $\Delta f(x)$ и, соответственно, $\varphi(x)$ и $\Delta\varphi(x)$, получаем

$$\Delta R(x) = f(x)\,\Delta\varphi(x) + \varphi(x)\,\Delta f(x) + \Delta f(x)\,\Delta\varphi(x).$$

Еще сложнее эта связь представляется для разностей последующих порядков. Мы не будем приводить соответствующие выражения, укажем лишь, что они приводят к правилу выполнения умножения, аналогичному правилу умножения для чисел,представленных в полиадической системе. Это уже видно по формуле для первых разностей и определяется самой формулой восстановления,которая при введении обозначений

$$p_i = (x_0 - x_i)\ , \qquad \Delta^i (x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) = a_i\ ,$$

$$(i = \overline{1, n}); \qquad P_n(x_1) = a_0$$

переходит в обычную форму представления числа в полиадической системе

$$N = a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_1 p_2 + \ldots + a_i p_1 p_2 \ldots p_i + \ldots$$

$$\ldots + a_n p_1 p_2 \ldots p_n\ .$$

Такой подход к трактовке полиадической системы может позволить создавать многочисленные ее модификации, вытекающие из интерполяционных формул, использующих восходящие, нисходящие и центральные разности в их различных интерпретациях.

Слабо позиционная система (включая и ее частный случай - систему остаточных классов) обладает, помимо возможностей организации параллельной арифметической обработки частей слова, также и свойством самокоррекции.

Вопросы рационального кодирования играют важную роль в системах обработки и передачи информации. Многочисленные исследования, начало которым было положено К.Шенноном,проведенные за последнее десятилетие, убедительно показали, что возможны построения таких систем передачи информации, в которых за счет специального кодирования может быть создан иммунитет против самых разнообразных случайных искажений несущих информацию сигналов.

Несмотря на очевидные достоинства применения методов специального кодирования при построении систем передачи и обработки информации, эти методы не получили практически достаточно серьезного распространения. Здесь, по-видимому, сыграло роль то обстоятельство, что предварительное преобразование информации при передаче (кодирование), равно как и обратное преобразование информации при приеме (декодирование), требуют разработки соответствующей аппаратуры, достаточно сложной и специфичной по своему характеру.

Для вычислительных средств применение методов специального кодирования диктуется самой насущной необходимостью. Любая вычислительная машина является сама по себе системой передачи и обработки информации. В вычислительной машине происходит постоянно циркуляция информации; из оперативного накопителя в арифметическое устройство и устройство управления, из арифметического устройства в накопители оперативный, внешний и др. Хотя в машине и нет длинных линий передач, но зато по имеющимся в ней коротким линиям информация циркулирует с огромной скоростью и в больших количествах.

Поэтому даже с точки зрения только передачи информации при разработке вычислительных средств возникает важная задача обеспечения достоверности всего этого колоссального потока информации. А ведь в вычислительной машине, кроме того, должна быть обеспечена еще и достоверность арифметической и логической обработки информации. Практически без применения методов специального кодирования обеспечение достоверности в вычислительной машине достигается двойным просчетом для обнаружения правильности результатов решения задач и тройным просчетом в случае обнаруженного расхождения для выбора правильного результата. Такой путь обеспечения достоверности уменьшает фактическую производительность машины, по крайней мере, вдвое. Отсюда ясно, что обеспечение достоверности каким-либо методом, отличным от указанных повторных просчетов, прямо и непосредственно связано с увеличением производительности вычислительных машин.

Для каждого специального кода, от которого требуется, чтобы он обладал способностью к обнаружению и коррекции ошибки, характерно наличие двух групп цифр - информационной и контрольной. В информационную группу входят цифры, составляющие числовое значение закодированной величины, в контрольную -

цифры, дополнительно вводимые для целей обнаружения и коррекции возможных искажений при передаче. Эти дополнительные цифры являются избыточными с точки зрения числового значения величины и удлиняют код, что, разумеется, несколько уменьшает пропускную способность канала при последовательной передаче и увеличивает количество каналов при параллельной передаче. Однако, эти обстоятельства должны окупаться теми возможностями, которые доставляют избыточные цифры для обнаружения и исправления ошибок. В связи с разработкой машинной арифметики в слабо-позиционной системе возникла возможность построения кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки и вместе с тем полностью арифметичных, где информационная и контрольная части совершенно равноправны относительно любой рациональной операции.

Исследования позволили установить весьма важный факт, определяющий возможность построения обнаруживающих и корректирующих кодов в слабо-позиционной системе, а именно: любое искажение цифры по одному какому-либо разряду превращает это число в неправильное, т.е. выводит его из рабочего диапазона и тем самым позволяет обнаружить наличие искажения. Более того, существует только одно единственное значение этой цифры, которое может превратить неправильное число в правильное.

Вообще говоря, введением одного избыточного основания скорректировать ошибку не представляется возможным. Однако, в ряде случаев можно и при одном избыточном основании сделать выводы о правильности отдельных цифр.

Устанавливается, что ошибка, если она на каком-либо этапе реализации цепи операций имела место, либо сохранится до конца вычисления и проявит себя легко обнаруживаемой неправильностью конечного результата, либо в процессе дальнейших вычислений самоустранится и тогда будет получен нужный конечный результат.

Это позволяет обработку информации, представленной в специальном коде, вести без контроля каждого отдельного результата лишь поэтапно. Конечный результат каждого этапа может быть подвергнут контролю и его правильность подтверждает правильность проведения операций данного этапа. В случае обнаружения ошибки производится коррекция, а исправленный результат участвует в последующих этапах.

Арифметичность введенного специального кодирования позво-

ляет также организовать коррекцию при наличии только одного избыточного основания в разрезе динамики вычислительного процесса (по смыслу), т.е. рассматривая характер возможного распределения ошибок в последовательно полученных при реализации программы результатах.

Метод исправления по смыслу заключается в анализе изменения совокупностей допустимых ошибок последовательных результатов операций и постепенным стягиванием этой совокупности к единственной ошибке, имевшей на самом деле место.

Независимость цифр числа в его представлении в остаточных классах, с одной стороны, и возможность исправления одиночной ошибки в отдельной цифре числа, с другой, позволяет по новому подойти к конструктивной компоновке вычислительной машины и к решению задачи резервирования. Выберем одно из оснований принятой в машине системы оснований и рассмотрим все оборудование, относящееся к этому основанию. Очевидно сюда, кроме оборудования арифметического блока может быть отнесена та часть оборудования накопителей чисел всех ступеней, которая обеспечивает хранение цифр по данному основанию, сюда же относится и часть оборудования входных-выходных устройств, которая обеспечивает прием цифр по данному основанию и фиксацию, в том или ином виде, результата преобразований. Вся эта группа оборудования, необходимого для работы с одним основанием, составляет машинный тракт. Очевидно, что совокупность машинных трактов по всем основаниям системы представляет собой подавляющую часть всего оборудования машины, поскольку массовые каналы, в среднем, охватывают около 70% оборудования.

В силу арифметичности введенной системы контроля и благодаря эффективности методов обнаружения и исправления одиночных ошибок, возникающих в массовых каналах, весьма своеобразно решается как задача резервирования аппаратуры внутри отдельных машин, так и задача резервирования самих вычислительных машин в комплексе. Прежде всего обратим внимание на то, что дополнительного резервирования массовых каналов не требуется. Введение дополнительного (контрольного) основания предполагает, практически, введение дополнительного машинного тракта по этому основанию, что как с точки зрения функциональной, так и с точки зрения аппаратурной, создает необходимую для резервирования избыточность.

При этом одиночные ошибки, независимо от их классификации на случайные сбои или отказы и независимо от величины

или продолжительности действия ошибки, исправляются и на функционирование вычислительной машины не влияют.

Предположим теперь, что имеет место двойная ошибка, то есть одновременная ошибка в двух цифрах числа, что связано с наличием неверного функционирования двух машинных трактов. Не будем обращать внимания на тот факт, что более чем в 90% случаев двойная ошибка обнаруживается и может быть исправлена. Рассмотрим вариант отключения одного из неисправных машинных трактов. Тогда функционирование остаточных массовых каналов будет производиться так же, как и в случае одиночной ошибки. При этом уменьшится только диапазон представления чисел в машине.

Таким образом, мыслим такой режим работы вычислительной машины, когда ее способность правильно функционировать не зависит от состояния аппаратуры массовых каналов. При этом задача решается правильно, но с уменьшающейся точностью по мере отключения неисправных машинных трактов. Естественно, что с каждым отключением очередного тракта мы, фактически, переходим к новой системе оснований и при этом меняются константы, участвующие в реализации алгоритмов арифметического устройства. Но поскольку эти константы хранятся в числовой памяти машины, то живучесть массовых каналов будет определяться тем объемом памяти, который отводится под хранение констант. Иначе говоря, живучесть машинных трактов обеспечивается увеличением только типового оборудования самих машинных трактов.

Несомненно, что резервирование отдельных машин слишком дорого, а при резервировании нескольких машин для системы либо требуются большие емкости памяти резервных машин, либо теряется часть информации при переходе на резерв.В связи с этим весьма эффективна живучесть отдельной машины. По мере выхода из строя машинных трактов точность ее работы падает. Поэтому на резервную машину передается правильно решаемый алгоритм, но имеющий ухудшенные точностные показатели. Резервная машина,принимая такой алгоритм и получая входную информацию, восстанавливает точность результатов до ее максимального значения.

Таким образом, живучесть отдельной машины гармонически обеспечивает живучесть многомашинной системы.