УДК 513.88

К ЗАДАЧЕ О ПЕРЕМЕЩЕНИИ МАСС

М.А.Рвачев

Пусть X есть пространство, наделенное мерой μ и метрикой ρ, $\mathcal{D}$ - его подмножество, имеющее конечную меру $\mu(\mathcal{D})$, R - такое подмножество пространства X, что мера R не меньше меры $\mathcal{D}$. Рассмотрим класс $\mathcal{F}$, состоящий из сохраняющих меру отображений f множества $\mathcal{D}$ во множество R. Задача о перемещении масс состоит в том, чтобы найти такое отображение f_0, которое дает минимум по всем $f \in \mathcal{F}$ интегралу

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x, fx)\, d\mu,$$

представляющему собой "работу", которая необходима для перемещения "массы" $\mu(\mathcal{D})$ из $\mathcal{D}$ в R, если каждую точку $x \in \mathcal{D}$ "перевозить" в точку fx по соединяющему их отрезку.

Отображения из $\mathcal{F}$ мы будем называть перевозками. Искомую перевозку назовем минимальной.

Первоначальная постановка задачи о перемещении масс принадлежит Гаспару Монжу (1781 г.). Монж рассматривал задачу о минимизации работы при перемещении одного объема $\mathcal{D}$ (*déblai* - выравниваемая почва) в другой, равный ему, - R (*remblai* - насыпь). Позднее этой задачей занимался П.Аппель [1]. Аппелем была доказана теорема Монжа, согласно которой при определенных допущениях существует такая поверхность, что линии, по которым следует осуществлять перевозки, ортогональны к ней. В работах Л.В.Канторовича [2] и [3], Л.В.Канторовича и Г.Ш.Рубинштейна

[4] рассмотрена та же задача в пространствах общего вида и найдены необходимые и достаточные условия минимальности f_0 – ее потенциальность.

В настоящей работе решается одна весьма частная задача о перемещении масс. Это задача о "перемещении дерна" с квадрата на полуплоскость, которую неоднократно ставил Г.Ш.Рубинштейн (см. [5], стр. 185). В задаче $\mathcal{D}$ есть квадрат на плоскости $R^2 = \{x = (x_1, x_2)\}$, примыкающий одной стороной к полуплоскости R. (В отличие от задачи Монжа здесь $\mu(R) = \infty$). Ответ дается в виде графика (рис. 3) и таблицы значений граничной кривой $g(x_1)$ (к ней ортогональны линии перевозки) и ее эволюты, по которой строится потенциальная функция.

Нетрудно видеть, что если f_0 минимальна, то точки из $\mathcal{D}$ в R перевозятся по некоторым отрезкам прямых, которые мы называем линиями перевозки. Укажем на следующие элементарные условия, необходимые для минимальности f_0 :

линии перевозки f_0 не пересекаются между собой; (I)

для каждой точки $x \in \mathcal{D}$ пересечение шара с центром в x и радиуса $[x, f_0 x]$ с $R \setminus f_0(\mathcal{D})$ имеет меру нуль. (2)

Если какое-нибудь из этих условий не выполнено, то можно исправить f_0 так, что совершаемая при перевозке работа уменьшится.

Перевозка f называется потенциальной, если существует функция $U(x)$, определенная на $\mathcal{D} \cup R$ и такая, что

$$|U(x) - U(x')| \leq \rho(x, x'), \quad U(fx) - U(x) = \rho(x, fx).$$

Функцию $U(x)$ назовем потенциалом f .

Будем говорить, что потенциал $U(x)$ и перевозка f согласованы, если $U(x) > U(x')$ при $x \in R \setminus f(\mathcal{D}),\ x' \in f(\mathcal{D})$. (3)

ЛЕММА. Если существует потенциал, согласованный с перевозкой f , то эта перевозка минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой перевозки f

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(x, fx)\,d\mu \geq \int_{\mathcal{D}} [U(fx) - U(x)]\,d\mu = \int_{f(\mathcal{D})} U(x)\,d\mu - \int_{\mathcal{D}} U(x)\,d\mu \geq$$

$$\inf_{E \subset R,\ \mu(E) = \mu(\mathcal{D})} \int_E U(x)\,d\mu - \int_{\mathcal{D}} U(x)\,d\mu = \int_{f_0(\mathcal{D})} U(x)\,d\mu - \int_{\mathcal{D}} U(x)\,d\mu = \int_{\mathcal{D}} \rho(x, f_0 x)\,d\mu$$

Предпоследнее равенство мы получили из согласованности f_0 и $U(x)$. Минимальность f_0 доказана.

План решения задачи у нас следующий. Предположив, что задача решена, и исходя из допущений о симметрии и дифференцируемости, составим уравнения для решения, численно их проинтегрируем и проверим, в действительности ли мы получили решение.

Итак, X – плоскость, $\mathcal{D}$ –квадрат $-1 \le x_2 < 0$, $|x_1| \le 1/2$; R – верхняя полуплоскость: $R = \{x : x_2 \ge 0\}$.

Пусть f_0 – минимальная перевозка. Будем обозначать точки, лежащие на нижней стороне квадрата, и их первые координаты через y. Линию перевозки f_0, выходящую из y, обозначим через $\vec{\tau}(y)$, ее длину – $\tau(y)$, угол, который она образует с осью Ox_1, – через $\alpha(y)$ (см. рис.I).

Предположим, что $\alpha(y)$ дифференцируема и монотонно убывает при возрастании y, что f_0 симметрично относительно оси Ox_2. Определим $\tau(y)$ из равенства площадей $S_1 = S_2$ (рис.I):

$$S_1 + S_2 = \Delta y \sin\alpha \cdot \tau - \frac{\tau^2}{2}\Delta\alpha + O(\Delta y),$$

$$S_1 = \Delta y - \frac{1}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha + O(\Delta y),$$

откуда $$\tau = \frac{\sin\alpha}{\alpha'} + \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha')^2} - \frac{4}{\alpha'} + \frac{2}{\sin^2\alpha}} \,. \qquad (4)$$

В случае, показанном на рис. 2, $\tau(y)$ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\sin\alpha}{\alpha'} + \left(\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha')^2} - \frac{2(1+(1/2-y)\,tg\,\alpha}{\alpha'} + \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{(1/2-y)^2}{\cos^2\alpha}\right)^{1/2}. \qquad (5)$$

Пусть $g(x_1)$ – верхняя граница $f_0(\mathcal{D})$. Из необходимого условия (2) на f_0 $\vec{\tau}(y)$ перпендикулярен к $g(x_1)$, откуда легко находим

$$\tau'(y) = -\cos\alpha(y). \qquad (6)$$

Равенства (4), (5) и (6) задают дифференциальное уравнение 2-го порядка на $\alpha(y)$, которые достаточно решить при $y \in [0, 1/2]$. Граничные условия задаются на обоих концах:

при $y = 0$, $\alpha(y) = \pi/2$ – из предположения о симметричности

f_0 при $y=1/2$ $\alpha' = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha+\cos\alpha}$ – это условие нетрудно получить из условия (2) и условия сохранения площадей, сравнивая площади, заменяемые $\overrightarrow{\tau(y)}$ на $\mathcal{D}$ и $f_0(\mathcal{D})$ при $y \to 1/2$.

Решив численно полученное уравнение и вычислив затем $g(x_1)$, мы получили кривую, показанную на рис. 3, там же дана ее эволюта $\mathcal{E}$. При минимальной перевозке f_0 дерн перевозится из квадрата в часть верхней полуплоскости, ограниченную кривой $g(x_1)$, по нормалям к этой кривой. Порядок перевозки частиц дерна не имеет значения. Можно, например, перевозить точки "последовательно одна за другой". Поясним это. Рассмотрим координаты (y, ℓ) на $\mathcal{D} \cup f_0(\mathcal{D})$, которые точке x сопоставляют то y, при котором $x \in \overrightarrow{\tau(y)}$, и число ℓ – расстояние от x до точки эволюты $\mathcal{E}$, соответствующей направлению $\overrightarrow{\tau(y)}$. Пусть в этих координатах нижняя сторона квадрата $\mathcal{D}$ задается уравнением $\ell = d(y)$, а нижняя сторона $f_0(\mathcal{D})$ – уравнением $\ell = u(y)$ (рис. 3). Последовательная перевозка дерна в координатах (y, ℓ) имеет вид:

$$f_0^1(y,\ell) = (y, \sqrt{\ell^2+u^2-d^2}).$$

Очевидно, что $f_0^1(x_1, x_2)$ непрерывна.

Докажем минимальность перевозки f_0, имеющей линиями перевозки семейство нормалей к $g(x_1)$.

Фиксируем на эволюте $\mathcal{E}$ какую-нибудь точку, например, A, тогда для каждого числа $t > \rho(A, 0)$ и для каждой точки $x \in \mathcal{D} \cup K$ найдется единственная эвольвента g_t, проходящая через точку x, соответствующая $\mathcal{E}$ и имеющая точку A центром кривизны с радиусом кривизны t (рис. 3).

Рассмотрим функцию $U(x)$, определенную на $\mathcal{D} \cup P$ и равную t, если $x \in g_t$. Нетрудно видеть, что $U(x)$ есть потенциал перевозки f_0, согласованный с ней. Поэтому в силу леммы f_0 минимальна.

Работа при перевозке f_0 (вычисленная для f_0^1) равна 0.781.

В заключение выражаю глубокую благодарность В.М.Тихомирову, под непрерывным руководством которого выполнялась эта работа.

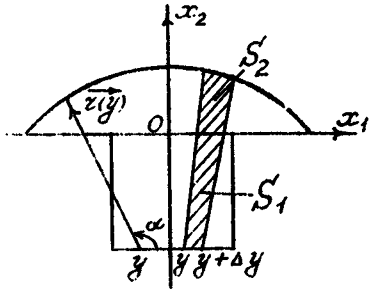

Рис. 1.

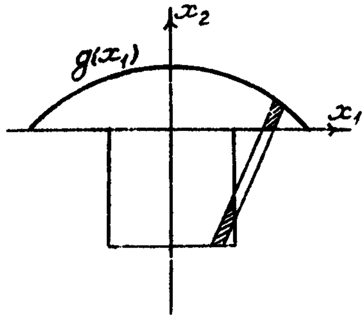

Рис. 2.

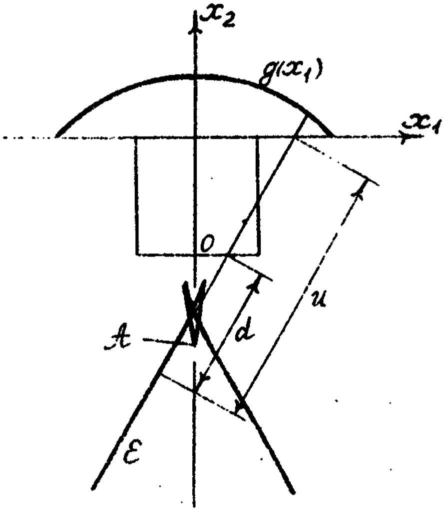

Рис. 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы $g(x_1)$ и $\mathcal{E}(x_1)$.

$g(-x_1)=g(x_1)$, $\mathcal{E}(-x_1)=\mathcal{E}(x_1)$ точность 0.015

x_1	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
g	0.54	0.54	0.54	0.53	0.53	0.53	0.52	0.51	0.50	0.49	0.48	0.46
x_1	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0	1.05	1.1	1.15
g	0.44	0.43	0.41	0.39	0.37	0.34	0.31	0.28	0.25	0.22	0.19	0.15
x_1	1.2	1.25	1.3	1.33								
g	0.11	0.07	0.03	0.00								

x_1	0	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
$-\mathcal{E}$ первая ветвь	1.43	1.34	1.30	1.22	1.14	1.08	1.02
x_1	0.1	0.08	0.06	0.04	0.00	-0.1	-0.2
$-\mathcal{E}$ вторая ветвь	1.02	1.08	1.13	1.17	1.26	1.46	1.65
x_1	-0.3	-0.4	-0.5	-0.7	-0.98		
$-\mathcal{E}$ вторая ветвь	1.82	1.97	2.12	2.40	2.78		

Литература

1. APPEL P. Le problème géométrique des debbris et remblais. Mémorial des sciences mathématique, fasc 27. Paris, 1928

2. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. - "Докл. АН СССР", 1942, т. 37, № 7-8, с. 227-229.
3. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одной проблеме Монжа. - "Успехи мат. наук", 1948, т.3, вып.2, с.225-226.
4. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - "Вестник ЛГУ", 1958, № 7, с. 52-59.
5. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - "Успехи мат. наук", 1970, т.25, вып.5, с. 171-201.

Поступила в ред.-изд. отд.
20. IV. 1972 г.