УДК 512.25/26 + 519.3

О КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В НЕКОТОРЫХ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ

В.А.Булавский

Пусть X — вещественное гильбертово пространство, Y - банахово пространство с конусом положительных элементов K, $A: X \to Y$ - линейный непрерывный оператор и $b \in Y$. Требуется найти $x \in X$, решающий задачу:

$$Ax - b \geqslant 0, \|x\|^2 - \min. \tag{I}$$

Для решения этой задачи в конечномерном случае имеется конечный метод (например, [I,2,3]). В бесконечномерном случае, а также если конус K не является многогранным, решение можно осуществлять с помощью предварительной аппроксимации задачи, исследуя сходимость решений. Такой подход использован, например, в [7]. Представляется, однако, что в некоторых случаях может оказаться более предпочтительным метод, в котором аппроксимация происходит в процессе счета и осуществляется с учетом ситуации на каждом шаге. Методы такого рода для нескольких других задач строились ранее [4]. Мы рассмотрим здесь метод решения задачи (I), а также метод решения системы выпуклых неравенств, которые естественным образом обобщают методы для конечномерного случая, построенные ранее [I,2,5,6].

Предположим, что имеется последсвательность $\{g_i \mid i = 1,2,\dots\}$ положительных функционалов над Y, замкнутая коническая оболочка которых совпадает с конусом положительных функционалов K^*. Нам удобно будет считать, что $\|g_i\| = 1$ при всех i. Выберем $\beta_0 > 0$ и последовательность чисел $\{\beta_i \mid i = 1,2,\dots\}$

так, что $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots > 0$ и $\lim \beta_i = 0$, и положим $N_0 = 0$, $S_0 = \varnothing$ и $x_0 = 0$. Будем последовательно строить числа B_K, номера N_K, векторы $x_K \in X$ и семейства $\{h_\nu^K \mid \nu \in S_K\} \subset K^*$ следующим образом. Предположим, что к началу очередного шага указанные объекты построены так, что каждый h_ν^K принадлежит выпуклой оболочке семейства $\{g_i \mid 1 \leqslant i \leqslant N_K\}$, семейство $\{A^* h_\nu^K \mid \nu \in S_K\}$ линейно независимое и существуют (единственные) числа $\mu_\nu^K > 0$, $\nu \in S_K$, при которых $x_K = \sum\limits_\nu \mu^K A^* h_\nu^K$, причем

$$h_\nu^K (A x_K - b) = 0, \ \nu \in S_K .$$

Здесь $A^* : Y^* \longrightarrow X$ - оператор, сопряженный к A. Известно, что при этих условиях вектор x_K решает задачу

$$\begin{gathered} h_\nu^K (Ax - b) \geqslant 0, \quad \nu \in S_K, \\ \|x\|^2 - \min, \end{gathered} \tag{2}$$

причем $\|x_K\|^2 = \sum\limits_\nu \mu_\nu^K h_\nu^K (b)$. Пусть $\nu' \notin S_K$. Если существует номер $i_0 \leqslant N_K$, для которого $g_{i_0} (A x_K - b) < - B_K$, то положим $N_{K+1} = N_K$, $B_{K+1} = B_K$. В противном случае выберем N_{K+1} настолько большим, что при $B_{K+1} = \beta_{N_{K+1}}$ найдется номер $i_0 \leqslant N_{K+1}$, для которого $g_{i_0} (A x_K - b) < - B_{K+1}$. В качестве $h_{\nu'}^K$ возьмем любой элемент выпуклой оболочки семейства $\{g_i \mid i \leqslant N_{K+1}\}$, для которого

$$h_{\nu'}^K (A x_K - b) = -\Delta < - B_{K+1} .$$

Например, можно положить $h_{\nu'}^K = g_{i_0}$.

За конечное число действий [2] можно либо выяснить, что неравенство

$$h_{\nu'}^K (Ax - b) \geqslant 0$$

несовместно с ограничениями задачи (2) и, следовательно, задача (I) не имеет решения, либо найти $\bar S_K \subset S_K \cup \{\nu'\}$ и $\bar\mu_\nu^K > 0$, $\nu \in \bar S_K$, такие, что $\nu' \in \bar S_K$, семейство $\{A^* h_\nu^K \mid \nu \in \bar S_K\}$ линейно независимое, а вектор $x_{K+1} = \sum\limits_\nu \bar\mu_\nu^K A^* h_\nu^K$ удовлетворяет системе

$$h_\nu^K (A x_{K+1} - b) = 0, \ \nu \in \bar S_K,$$

и, следовательно, решает задачу

$$h_\nu^k(Ax-b)\geq 0,\ \nu\in\bar S_k,\ \|x\|^2-\min. \qquad (3)$$

Поскольку $\nu'\in\bar S_k$, то $\|x_{k+1}-x_k\|\geq\Delta_k\,/\,\|A^*h_{\nu'}^k\|$, а если x_{k+1} определить так, чтобы он решал задачу

$$h_\nu^k(Ax-b)\geq 0,\ \nu\in S_k\cup\{\nu'\};\ \|x\|^2-\min, \qquad (4)$$

то для него окажется

$$\|x_{k+1}\|^2\geq\|x_k\|^2+\Delta_k^2\,/\,\|A\|^2.$$

Мы, однако, не будем предполагать, что x_{k+1} решает задачу (4), если число элементов $\bar S_k$ меньше числа элементов S_k. В противном случае это предположение будет делаться.

Пусть $\{T_\nu\mid\nu\in S_{k+1}\}$ – некоторое разбиение множества $\bar S_k$. При переходе к следующему шагу положим

$$\mu_\nu^{k+1}=\sum_{\sigma\in T_\nu}\bar\mu_\sigma^k,\quad h_\nu^{k+1}=\frac{1}{\mu_\nu^{k+1}}\sum_{\sigma\in T_\nu}\bar\mu_\sigma^k h_\sigma^k,\ \nu\in S_{k+1}.$$

При такой организации вычислений возможны два случая обрыва последовательности $\{x_k\}$. Именно, либо на некотором шаге окажется, что задача (I) несовместна, либо не найдется номера N_{m+1}. В последнем случае при всех n оказывается $g_n(Ax_m-b)\geq-\beta_i$, $i>n$, и следовательно, $g_n(Ax_m-b)\geq 0$. Таким образом, x_m решает задачу (I).

ТЕОРЕМА. Если последовательность $\{x_k\}$ бесконечная, то либо $\lim\|x_k\|=+\infty$, и тогда задача (I) несовместна, либо последовательность $\{x_k\}$ сходится к решению задачи (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество решений системы $h_\nu^k(Ax-b)\geq 0$, $\nu\in S_k$, содержит множество решений неравенства $Ax-b\geq 0$ и не пересекается с открытым шаром $\{x\in X\mid\|x\|<\|x_k\|\}$, то из равенства $\lim\|x_k\|=+\infty$ следует несовместность задачи (I).

Пусть $\lim\|x_k\|=r<+\infty$. Тогда открытый шар $\{x\in X\mid\|x\|<r\}$ не содержит решения задачи (I). Так как $B_{k+1}<\Delta_k$ и на бесконечном числе шагов x_{k+1} решает задачу (4), то $\lim B_k=0$ и на бесконечном числе шагов оказывается $N_{k+1}>N_k$. Обозначим через $\{k_s,\ s=1,2,\dots\}$ последовательность номеров таких шагов. Так как семейство $\{h_\nu^k\mid\nu\in S_k\}$ конечное, а x_k решает задачу (2), то найдется такое $\varepsilon_k>0$

что $\|x\| \geq \|x_K\| - \frac{1}{K}$ при всяком x, удовлетворяющем системе

$$h_\nu^K(Ax - b) \geq -\varepsilon_K, \ \nu \in S_K.$$

При этом можно считать, что последовательность $\{\varepsilon_K\}$ убывает и сходится к нулю. Для каждого n обозначим через K_n такой номер, что $N_{K_n} < n \leq N_{K_n+1}$. Найдется такой τ_n, что

$$g_i(Ax_{\tau_n} - b) \geq -\varepsilon_{K_n}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому выпуклое и замкнутое множество M_n решений системы

$$g_i(Ax - b) \geq -\varepsilon_{K_n}, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\|x\| \leq r$$

содержит x_{τ_n}. Кроме того, оно содержится в множестве решений системы

$$h_\nu^{K_n}(Ax - b) \geq -\varepsilon_{K_n}, \ \nu \in S_{K_n},$$

и, следовательно, не пересекается с открытым шаром $\{x \in X \mid \|x\| < \|x_{K_n}\| - \frac{1}{K_n}\}$. Положим $\delta_n = r - \|x_{K_n}\| + \frac{1}{K_n}$. Тогда диаметр M_n не превосходит $2\sqrt{2r\delta_n}$, а так как $K_n \to +\infty$, то $\delta_n \to 0$. Поскольку $K_{n+1} \geq K_n$, а $\varepsilon_{K_{n+1}} \leq \varepsilon_{K_n}$, то $M_{n+1} \subset M_n$ при всех n. Точка $\bar{x}$, составляющая пересечение множеств M_n, очевидно, является решением задачи (I). При этом $\bar{x} = \lim x_{\tau_n}$ и $\|\bar{x}\| = r$.

Из доказанного следует, что при всех i

$$g_i(Ax_K - b) \geq -\|A\| \sqrt{r^2 - \|x_K\|^2}.$$

Действительно, если бы для некоторого i' это неравенство оказалось нарушенным, то положив $h_{\nu'}^K = g_{i'}$ (может быть, изменив при этом K-ый шаг) и определив $x_{K,1}$ как решение задачи (4), мы получили бы, что оно, а следовательно, и решение задачи (I), имеет норму, большую r. Таким образом, τ_n можно было выбрать настолько большим, что $x_K \in M_n$ при $K \geq \tau_n$, то есть $\bar{x} = \lim x_K$. Теорема доказана.

Условимся в дальнейшем говорить, что x_K решает задачу (I) с точностью до ε, если $N_{K+1} > N_K$ и $\beta_{N_K} \leq \varepsilon$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть X – вещественное гильбертово пространство, Y_s, $s = 1, 2, \ldots, m$, – банаховы пространства, в каждом из которых выбран конус K_s положительных элементов, а $A_s : X \to Y_s$, $s = 1, 2, \ldots, m$, –

выпуклые дифференцируемые по Фреше отображения, производные A'_s которых ограничены в каждом шаре. Предположим, что для каждого s имеется нормированная последовательность $\{g_i^s \mid i=1,2,\ldots\}$ функционалов, замкнутая коническая оболочка которой совпадает с K_s, а также убывающая и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\beta_i^s \mid i=1,2,\ldots\}$. Требуется найти решение системы

$$A_s(x) \le 0, \quad s=1,2,\ldots,m. \tag{5}$$

Выберем произвольно $x_0 \in X$ и последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такую, что $\varepsilon_k > 0$ и $\lim \varepsilon_k = 0$. Построим последовательность $\{x_k\}$, определив x_{k+1} по x_k следующим образом. Сначала описанным выше методом с точностью до ε_k при каждом $s=1,2,\ldots,m$ найдем решение задачи:

$$A'_s(x_k)(x-x_k)+A_s(x_k)\le 0,$$
$$\|x-x_k\|^2 - \min.$$

Пусть $x_{k,s}$, $s=1,2,\ldots,m$, найденные решения. Тогда для каждого решения $\tilde{x}$ системы (5) окажется

$$(x_{k,s}-x_k,\ \tilde{x}-x_{k,s}) \ge 0.$$

Вектор x_{k+1} определим как решение задачи

$$\begin{gathered}(x_{k,s}-x_k,\ x-x_{k,s})\ge 0,\ s=1,2,\ldots,m,\\ \|x-x_k\|^2 - \min.\end{gathered} \tag{6}$$

Так как x_{k+1} является линейной комбинацией x_k и $x_{k,s}$, $s=1,2,\ldots,m$, то эта задача конечномерная.

ТЕОРЕМА. Если система (5) совместна, то $\lim\|x_k-x_{k+1}\|=0$ и последовательность $\{x_k\}$ слабо сходится к решению системы (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{x}$ – решение системы (5). Тогда $\tilde{x}$ удовлетворяет неравенствам (6), и потому $\|x_{k+1}-\tilde{x}\|^2+\|x_{k+1}-x_k\|^2\le \|x_k-\tilde{x}\|^2$. Таким образом, $\lim\|x_k-x_{k+1}\|^2=0$ и $\|x_{k+1}-\tilde{x}\|\le \|x_k-\tilde{x}\|$. Последовательность $\{x_k\}$ ограничена. Пусть $x_{k_\nu}\xrightarrow{\text{сл.}}\bar{x}$. Покажем, что $\bar{x}$ является решением системы (5). Действительно, если для некоторого s оказалось $A_s(\bar{x})\notin C$, то существует $g\in K_s^*$ такой, что $\|g\|=1$ и $g(A_s(\bar{x}))>0$. Тогда найдется такой g_i^s, что $g_i^s(A_s(\bar{x}))=2\delta>0$. Поскольку выпуклый функционал слабо полунепрерывен снизу, то для некоторого $\bar{n}$ окажется, что $g_i^s(A_s(x_{k_\nu}))>\delta$ и $\varepsilon_{k_\nu}<\min\{\delta/2\ ;\ \beta_i^s\}$ при $\nu>\bar{n}$. Тогда

$$g_i^s(A_s'(x_{k_\nu})(x_{k_\nu,s}-x_{k_\nu})+A_s(x_{k_\nu}))\le\frac{\delta}{2},$$

$$g_i^s(A_s'(x_{k_\nu})(x_{k_\nu,s}-x_{k_\nu}))\le-\frac{\delta}{2}.$$

Поэтому $\|x_{k_{\nu+1}}-x_{k_\nu}\|\ge\|x_{k_\nu,s}-x_{k_\nu}\|\ge\delta/2L$, где $L=\sup\{\|A'(x)\|\ |\ \|x-\bar{x}\|\le\|x_0-\bar{x}\|\}$. Полученное неравенство противоречит тому, что $\lim\|x_{k+1}-x_k\|=0$. Таким образом, $\bar{x}$ является решением системы (5). Пусть $\bar{\bar{x}}$ - другая слабо предельная точка последовательности $\{x_k\}$. Тогда она тоже является решением системы (5), и потому существуют $\lim\|x_k-\bar{x}\|$ и $\lim\|x_k-\bar{\bar{x}}\|$. Но $2(x_k,\bar{\bar{x}}-\bar{x})=(\bar{\bar{x}}-\bar{x},\bar{\bar{x}}+\bar{x})+\|\bar{x}-x_k\|^2-\|\bar{\bar{x}}-x_k\|^2$, так что существует предел

$$\lim(x_k,\bar{\bar{x}}-\bar{x}).$$

Но тогда $(\bar{x},\bar{\bar{x}}-\bar{x})=(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{x}}-\bar{x})$, то есть $\bar{x}=\bar{\bar{x}}$. Из ограниченности последовательности $\{x_k\}$ и единственности слабо предельной точки следует, что $x_k\xrightarrow{сл}\bar{x}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как в предыдущем методе, так и в последнем, последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\beta_i^s\}$ можно выбирать по ходу решения.

Литература

1. БУЛАВСКИЙ В.А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. - "Материалы конф. по опыту и перспективам применения мат. методов и ЭВМ в планировании", Новосибирск, 1962.
2. БУЛАВСКИЙ В.А. Один специальный алгорифм квадратичного программирования. - "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып. 5, с. 23-36.
3. ШМЫРЕВ В.И. Об алгорифмах метода последовательного улучшения для квадратичного программирования. - "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып. 5, с. 133-157.
4. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. - Изд. ЛГУ, 1968.
5. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном типе проекционных методов в математическом программировании. - "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып. 5, с. 11-22.

6. ЛОБЫРЕВ А.И. Метод последовательного проектирования вдоль вспомогательного многообразия. - "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып. 5, с. 128-132.

7. FUSCIARDI A., MOSCO U., SCARPINI F., SCHIAFFINO A. A dual method for the numerical solution of some variational inequalities.-"J. Math. analysis and Appl.", 1972, v.40, N2, p. 471-493.

Поступила в ред.-изд. отд.
3. XII. 1972 г.