УДК 517.51

ХАРАКТЕРИСТИКА НАСЫЩЕНИЯ КЛАССА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г.Ш.Рубинштейн

§ I. Предварительные замечания

Благодаря естественному упорядочению множества R вещественных чисел каждая функция $f: G \longrightarrow R$ определяет на G некоторый совершенный предпорядок

$$x \preccurlyeq_f y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

При этом во многих случаях существенными являются не сáми функции, а определяемые ими предпорядки. В связи с этим в множестве $F(G)$ всех вещественнозначных функций, определенных на одном и том же множестве G, вводится следующее отношение эквивалентности. Функции f и φ из $F(G)$ считаются **эквивалентными**, если определяемые ими на G совершенные предпорядки $\preccurlyeq_f$ и $\preccurlyeq_\varphi$ совпадают, т.е.

$$f(x) \leq f(y) \Longleftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Отвечающий каждой функции $f \in F(G)$ класс эквивалентности $F_f(G)$, как нетрудно проверить, допускает следующее функциональное описание:

$$F_f(G) = \{u \circ f\}_{u \in \mathcal{U}(T_f)},$$

где T_f - множество значений рассматриваемой функции f, $\mathcal{U}(T_f)$ - совокупность всех возрастающих функций $u: T_f \rightarrow R$, а под $u \circ f$ понимается суперпозиция функций u и f, т.е.

такая функция $\varphi \in F(G)$, что

$$\varphi(x) = u(f(x)), \quad x \in G.$$

Множество $\Phi \subset F(G)$ называется **насыщенным**, если оно вместе с каждой функцией f содержит весь класс эквивалентности $F_f(G)$, т.е. Φ совпадает с множеством

$$\mathcal{U}\Phi = \bigcup_{f\in\Phi} F_f(G) = \{u \circ f : f \in \Phi, u \in \mathcal{U}(T_f)\}. \qquad (1)$$

В общем случае определяемое согласно (1) множество $\mathcal{U}\Phi$ называется **насыщением** исходного множества $\Phi \subset F(G)$.

Как уже отмечалось, в ряде случаев функции $f \in F(G)$ используются лишь как инструмент для задания соответствующих совершенных предпорядков на множестве G. А это означает, что при замене исходных функций эквивалентными функциями изучаемая задача, по существу, не изменяется. Между тем разработанные методы решения часто применимы лишь в случае, когда рассматриваемые функции принадлежат некоторым "хорошим" классам (например, являются выпуклыми). Если эти классы не являются насыщенными, то изучение их насыщений, доведенное до разработки приемов разыскания по каждой функции $f \in \mathcal{U}\Phi$ эквивалентной ей функции $\varphi \in \Phi$, позволяет расширить рамки применимости разработанных методов. Этим в основном и объясняется интерес к изучению насыщений некоторых классов $\Phi \subset F(G)$.

Рассмотрению интересующего нас конкретного класса функций и обсуждению проблемы описания его насыщения предпошлем ещё одно рассуждение общего плана.

Представляющие практический интерес "хорошие" классы $\Phi \subset F(G)$, как правило, состоят из функций, имеющих связные области значений. Покажем, что в этом случае по каждой функции $\varphi \in \mathcal{U}\Phi$ легко строится эквивалентная ей функция φ_0 из более узкого множества

$$\mathcal{U}_c\Phi = \{u \circ f : f \in \Phi, u \in \mathcal{U}_c(T_f)\}, \qquad (2)$$

где через $\mathcal{U}_c(T_f)$ обозначено множество непрерывных функций $u \in \mathcal{U}(T_f)$. Действительно, в рассматриваемом случае область значений T_φ любой функции $\varphi \in \mathcal{U}\Phi$ как упорядоченное множество изоморфно некоторому связному множеству вещественных чисел. Следовательно, множество T_φ может быть получено из своей выпуклой оболочки $\operatorname{conv} T_\varphi$ исключением некоторого множества попарно-непересекающихся полуоткрытых интервалов. А это означает, что при любом $t_0 \in R$ функция

$$v(t)= \begin{cases} \mu(T_\varphi \cap [t_0, t]) & \text{при } t \geq t_0 , \\ -\mu(T_\varphi \cap [t, t_0]) & \text{при } t \leq t_0 , \end{cases}$$

где μ – лебегова мера, является возрастающей на T_φ , т.е. принадлежит множеству $\mathcal{U}(T_\varphi)$. Нетрудно проверить, что в качестве интересующего нас элемента множества (2) может быть принята функция $\varphi_0 = v \circ \varphi$.

В дальнейшем под G всюду понимается более чем одноточечное выпуклое множество произвольного вещественного векторного пространства. При этом нас будут интересовать, в основном, функции $f \in F(G)$, удовлетворяющие следующему условию непрерывности:

УСЛОВИЕ C . Сужение f на пересечение множества G с любой прямой является непрерывной функцией.

Совокупность таких функций обозначается через $F_C(G)$.

Ясно, что каждая функция $f \in F_C(G)$ имеет связную область значений. Поэтому изучение насыщения (1) каждого класса $\Phi \subset F_C(G)$ сводится к описанию более узкого множества (2), которое в данном случае представимо в виде:

$$\mathcal{U}_C\Phi = \mathcal{U}\Phi \cap F_C(G).$$

§ 2. Выпуклые и квазивыпуклые функции

Напомним, что функция $f \in F(G)$ называется выпуклой, если для любых x , $y \in G$ и $\lambda \in (0,1)$ имеет место неравенство:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{3}$$

Из этого определения следует, в частности, что для любой выпуклой функции $f \in F(G)$ справедливы следующие утверждения:

1°. Отвечающие функции f лебеговы множества

$$L_t(f) = \{ x \in G : f(x) \leq t \}$$

являются выпуклыми.

2^0. Если точка x_0 выпуклого множества $M \subset G$ доставляет локальный минимум функции f на пересечении M с любой прямой, проходящей через x_0, то

$$f(x_0) = \min_{x \in M} f(x).$$

3^0. Сужение функции f на любой открытый отрезок $(x,y) \subset \subset G$ является непрерывной функцией.

Весьма важными для приложений являются свойства 1^0 и 2^0. В связи с этим многими авторами наряду с классом $V(G) \subset F(G)$ выпуклых функций рассматривается более широкий класс $W(G)$, состоящий из всех функций $f \in F(G)$, удовлетворяющих условиям 1^0 и 2^0. Такие функции называют квазивыпуклыми. Некоторые авторы под квазивыпуклыми функциями понимают еще более широкий класс $\tilde{W}(G)$, состоящий из функций $f \in F(G)$, удовлетворяющих только одному условию 1^0.

Функции $f \in \tilde{W}(G)$, как нетрудно проверить, характеризуются тем, что при любых x, $y \in G$ и $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\}. \qquad (4)$$

А для функций $f \in W(G)$, кроме того, при $f(x) \ne f(y)$ в (4) имеет место строгое неравенство.

Класс $V(G)$ выпуклых функций, очевидно, не является насыщенным, а введенные более широкие классы $W(G) \subset \tilde{W}(G)$ квазивыпуклых функций таковыми являются. Между тем ни при каком более чем одноточечном выпуклом множестве G насыщение $\mathcal{U}V(G)$ класса $V(G)$ не совпадает с $W(G)$. Следовательно, описание множества $\mathcal{U}V(G)$ сводится к выявлению дополнительных условий, при которых функция $f \in W(G)$ эквивалентна некоторой функции $\varphi \in V(G)$.

Мы ограничимся рассмотрением выпуклых функций, определенных на более чем одноточечных относительно открытых выпуклых множествах G (для любых x, $y \in G$ существует $\lambda > 0$ такое, что $y + \lambda(y-x) \in G$). В этом случае, очевидно, на основании 3^0 имеем: $V(G) \subset F_c(G)$. А это означает, что изучение интересующего нас насыщения $\mathcal{U}V(G)$ сводится к изучению более узкого множества

$$\mathcal{U}_c V(G) = \mathcal{U}V(G) \cap F_c(G) \subset W(G) \cap F_c(G) = W_c(G).$$

Именно в таком виде рассматриваемая задача была поставлена впервые одним из основоположников выпуклого анализа В.Фенхелем в его монографии [I] (стр. II5–I37) и с тех пор известна под названием проблемы Фенхеля.

Сразу же заметим, что ввиду свойств 1^0 и 2^0 квазивыпуклые функции f могут достигать максимума на относительно открытых выпуклых множествах только в том случае, когда $f(x)=Const$. Поэтому связные области значений T_f интересующих нас функций $f\in W_c(G)$ либо совпадают со своими открытыми ядрами T_f°, либо же содержат помимо того еще одну точку

$$\theta = min_{x\in G} f(x).$$

Далее, благодаря условию C каждая функция $f\in W_c(G)$ обладает следующим свойством:

4^0. Каковы бы ни были $t<t'$ из T_f, найдутся точки $x\in f^{-1}(t)$ и $y\in f^{-1}(t')$ такие, что функция f на отрезке $[x,y]$ возрастает.

§ 3. Вспомогательные функции

Известно (см. [2]), что если сужения функции $f\in F(G)$ на пересечения множества G с любой прямой являются измеримыми функциями, то интересующие нас неравенства (3) и (4) являются следствиями соответствующих неравенств при некотором фиксированном $\lambda\in(0,1)$, например, при $\lambda=\frac{1}{2}$. Следовательно, это имеет место для всех функций $\mathcal{U}F_c(G)$. А это означает, что изучение поставленного вопроса относительно функций $f\in W_c(G)$ можно вести на языке вспомогательных функций

$$\tau_f(t,t')=sup\{f(\tfrac{x+y}{2}): x\in f^{-1}(t),\ y\in f^{-1}(t')\}, \qquad (5)$$

определенных на $T_f\times T_f$.

Из сказанного следует, что функция $f\in\mathcal{U}F_c(G)$ в том и только том случае является выпуклой, если при любых t и t' из T_f

$$t+t'-2\tau_f(t,t')\geqslant 0. \qquad (6)$$

Из условия (6) вытекает, в частности, что для функций $f \in V(G)$ (а также для эквивалентных им функций $f \in \mathcal{U}V(G)$) при любых $t < t'$ из T_f имеют место строгие неравенства

$$\tau_f(t,t') < t'. \qquad (7)$$

Что касается функций $f \in W_c(G)$, то для них (следовательно, и для эквивалентных им функций $f \in \mathcal{U}W_c(G)$) при любых $t < t'$ из T_f имеем:

$$\tau_f(t,t) = t \ , \quad t < \tau_f(t,t') \leq t'.$$

Однако для некоторых из этих функций условие (7) нарушается. Например, для дробно-линейной функции

$$f(\xi,\eta) = \frac{\xi}{\eta} \ , \quad \xi \in R, \ \eta > 0,$$

как легко видеть, $\tau_f(t,t') = t'$ при любых $t < t'$ из $T_f = R$, а для функции

$$f(\xi,\eta) = \begin{cases} \eta & \text{при } \eta \geq 0 \ , \\ \eta e^{\xi} & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}$$

условие (7) нарушается при $t < t' = 0$. В литературе обычно ограничиваются рассмотрением только таких тривиальных примеров функций $f \in W_c(G) \setminus \mathcal{U}_c V(G)$. Между тем при любом G существуют функции $f \in W_c(G) \setminus \mathcal{U}_c V(G)$, удовлетворяющие условию (7). Таковой является, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{при } x \in (-3,-1], \\ x^3 & \text{при } x \in [-1,+1). \end{cases} \qquad (8)$$

На языке введенных вспомогательных функций (5) проблема Фенхеля состоит в выяснении условий, при которых для заданной функции $f \in W_c(G)$, где G – более чем одноточечное относительно открытое выпуклое множество, существует такая функция $u: T_f \to R$, что

$$u(t') - u(t) > 0, \ u(t) + u(t') - 2u(\tau_f(t,t')) \geq 0 \qquad (9)$$

при любых $t < t'$ из T_f. При этом функция u автоматически является непрерывной, т.е. принадлежит классу $\mathcal{U}_c(T_f)$.

В дальнейшем под G всюду понимается более чем одноточечное относительно открытое выпуклое множество, и это особо оговариваться не будет. Пусть T_f – область значений некоторой фиксированной функции $f \in W_c(G)$. Связное подмножество T множества T_f мы назовем регулярным, если для него существует так называемая разрешающая функция, т.е. такая функция $u: T \to R$, что при любых $t < t'$ из T справедливы соотношения (9).

Точку $t^* \in T$ назовем регулярной, если при некотором $\varepsilon > 0$ регулярным является множество $T = T_f \cap (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$.

Если рассматриваемая функция $f \in W_c(G)$ принадлежит классу $\mathcal{U}_c V(G)$, то само множество T_f и все его точки, очевидно, являются регулярными. Справедливо также следующее обратное утверждение.

ТЕОРЕМА I. Если для функции $f \in W_c(G)$ все внутренние точки множества T_f являются регулярными, то эта функция эквивалентна некоторой выпуклой функции, т.е. принадлежит классу $\mathcal{U}_c V(G)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА I. Пусть $f \in W_c(G)$, а вещественнозначная функция u, определенная на связном подмножестве T множества T_f, удовлетворяет условию: для каждого $t^* \in T$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $t < t'$ из $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \cap T$ выполняются соотношения (9). Тогда функция u является разрешающей для всего множества T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, при выполнении условия леммы функция $u: T \to R$, очевидно, является возрастающей. Допустим, что при некоторых $t_0 \le t_0'$ из T

$$u(t_0) + u(t_0') - 2u(\tau_f(t_0, t_0')) < 0.$$

Тогда найдутся точки $x_0 \in f^{-1}(t_0)$ и $y_0 \in f^{-1}(t_0')$ такие, что функция $\varphi(x) = u(f(x))$ на отрезке $[x_0, y_0]$ возрастает, причем

$$\psi(x_0, y_0) = \varphi(x_0) + \varphi(y_0) - 2\varphi\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) < 0.$$

Но тогда, ввиду очевидного равенства

$$\psi(x_0, y_0) = \psi\left(x_0, \frac{x_0 + y_0}{2}\right) + \psi\left(\frac{x_0 + y_0}{2}, y_0\right) + 2\psi\left(\frac{3x_0 + y_0}{4}, \frac{x_0 + 3y_0}{4}\right),$$

на отрезке $[x_0, y_0]$ найдутся точки x_1 и y_1 такие, что $\psi(x_1, y_1)<0$, причем $y_1 - x_1 = \frac{1}{2}(y_0 - x_0)$. Таким образом, строится последовательность вложенных отрезков $[x_k, y_k]$, для которых

$$\psi(x_k; y_k) < 0, \quad y_k - x_k = \frac{1}{2^k}(y_0 - x_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Построенные отрезки, очевидно, имеют единственную общую точку x^*. Но тогда для $t^* = f(x^*) \in T_f$, как легко видеть, не существует требуэмого $\varepsilon > 0$, и лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть для рассматриваемой функции $f \in W_c(G)$ множество $T = [t_0, t_0']$, где $t_0 < t_0'$ из T_f, является регулярным, а функции $u_1 : T \to R$ и $u_2 : T \to R$ являются разрешающими для T. Тогда при любом $t^* \in (t_0, t_0')$ справедливы неравенства:

$$\inf_{t \in [t_0, t^*)} \frac{u_2(t^*) - u_2(t)}{u_1(t^*) - u_1(t)} > 0, \qquad \sup_{t \in (t^*, t_0']} \frac{u_1(t) - u_1(t^*)}{u_2(t) - u_2(t^*)} < +\infty .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точки $x_0 \in f^{-1}(t_0)$ и $y_0 \in f^{-1}(t_0')$ выбрать так, чтобы функция f на отрезке $[x_0, y_0]$ возрастала, то функции

$$\varphi_i(\lambda) = u_i(f(x_0 + \lambda(y_0 - x_0))), \ \lambda \in [0, 1], \ i = 1, 2,$$

очевидно, будут возрастающими и выпуклыми. Поэтому при любом $\lambda^* \in (0, 1)$ имеем:

$$\inf_{\lambda \in [0, \lambda^*)} \frac{\varphi_2(\lambda^*) - \varphi_2(\lambda)}{\varphi_1(\lambda^*) - \varphi_1(\lambda)} \geqslant \frac{1-\lambda^*}{\lambda^*} \cdot \frac{\varphi_2(\lambda^*) - \varphi_2(0)}{\varphi_1(1) - \varphi_1(\lambda^*)} > 0,$$

$$\sup_{\lambda \in (\lambda^*, 1]} \frac{\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(\lambda^*)}{\varphi_2(\lambda) - \varphi_2(\lambda^*)} \leqslant \frac{\lambda^*}{1-\lambda^*} \cdot \frac{\varphi_1(\lambda^*) - \varphi_1(0)}{\varphi_2(1) - \varphi_2(\lambda^*)} < +\infty,$$

откуда следует справедливость утверждений леммы.

ЛЕММА 3. Пусть функция $f \in W_c(G)$ и точки $t_1 < t_2 < t_1' < t_2'$ из T_f таковы, что множества $T_1 = [t_1, t_1']$ и $T_2 = [t_2, t_2']$ являются регулярными. Тогда регулярным является также множество $T = [t_1, t_2']$. При этом, каковы бы ни были разрешающие функции

$$u_1 : T_1 \to R, \quad u_2 : T_2 \to R,$$

и точка $t^* \in (t_2, t_1')$, при достаточно больших M разрезающими для множества T являются функции

$$u(t)=\begin{cases} u_1(t) & \text{при } t\in[t_1,t^*], \\ M\cdot[u_2(t)-u_2(t^*)]+u_1(t^*) & \text{при } t\in[t^*,t_2'], \end{cases} \tag{10}$$

$$u(t)=\begin{cases} -\frac{1}{M}\cdot[u_1(t^*)-u_1(t)]+u_2(t^*) & \text{при } t\in[t_1,t^*], \\ u_2(t) & \text{при } t\in[t^*,t_2'] . \end{cases} \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы I достаточно показать, что функции (10) и (11) удовлетворяют неравенству

$$u(t)+u(t')-2u(\tau_f(t,t'))\geq 0$$

при любых $t<t^*<t'$ из $[t_2,t_1']$. А это проверяется с помощью леммы 2. Действительно, на основании этой леммы при достаточно большом M имеем:

$$u_1(t^*)-u_1(t')\leq M\cdot[u_2(t^*)-u_2(t)],\ t\in[t_2,t^*],$$

$$u_2(t')-u_2(t^*)\geq\frac{1}{M}\cdot[u_1(t')-u_1(t^*)],\ t\in[t^*,t_1'].$$

Поэтому для функции (10) при $t_0=\tau_f(t,t')\in[t_2,t^*]$

$$u(t)+u(t')-2u(t_0)=u_1(t)+M[u_2(t')-u_2(t^*)]-$$

$$-2u_1(t_0)\geq u_1(t)+u_1(t')-2u_1(t_0)\geq 0,$$

а при $t_0\in[t^*,t_1']$

$$-\frac{1}{M}[u(t)+u(t')-2u(t_0)]=\frac{1}{M}[u_1(t^*)-u_1(t)]-$$

$$u_2(t')+2u_2(t_0)-u_2(t^*)\leq-[u_2(t)+u_2(t')-2u_2(t_0)]\leq 0.$$

Аналогично проверяется утверждение относительно функции (11).

ЛЕММА 4. Если регулярное множество $T\subset T_f$ ограничено снизу и его точная нижняя граница θ принадлежит множеству $T_f\setminus T$, то множество $\tilde{T}=\{\theta\}\cup T$ также является регулярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая свойство 4^0, при любом $t\in T$ можно выбрать точки $x\in f^{-1}(\theta)$ и $y\in f^{-1}(t)$ так, чтобы функция f на отрезке $[x,y]$ возрастала. Но тогда определенная на $(x,y]$ функция $\varphi(z)=u(f(z))$, очевидно, будет возрастающей и выпуклой. Поэтому

$$\alpha = \inf_{z\in(x,y)} \varphi(z) = \inf_{t\in T} u(t) > -\infty,$$

и в качестве разрешающей для множества $\tilde{T}$ может быть принята функция

$$\tilde{u}(t)=\begin{cases} \alpha & \text{при } t=\theta ,\\ u(t) & \text{при } t\in T .\end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из проведенного рассуждения следует, в частности, что разрешающая функция u для связного множества $T\subset T_f$ не имеющего максимального элемента, всегда непрерывна. Более того, это справедливо и в том случае, когда функция $u: T\to R$ для любых $t<t'$ из T удовлетворяет более слабому условию:

$$u(t')-u(t)\geq 0,\ u(t)+u(t')-2u(\tau_f(t,t'))\geq 0. \qquad (9')$$

Если при этом для некоторых $\bar{t}<\bar{t}'$ из T имеет место равенство $u(\bar{t})=u(\bar{t}')$, но $u(t)\neq Const$, то в множестве T найдется внутренняя точка t_0 такая, что $u(t)=u(t_0)$ при всех $t\leq t_0$ из T, а при $t_0\leq t<t'$ из T выполняются соотношения (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. При выполнении условий теоремы совокупность T_f^o внутренних точек множества T_f, очевидно, представима в виде объединения по $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ семейства регулярных открытых интервалов $T_k=(t_k,t'_k)$ таких, что $t_k<t'_{k-1}<t_{k+1}<t'_k$. Пусть функции $u_k: T_k\to R$ являются разрешающими для этих интервалов. Тогда, зафиксировав произвольно точки $t_k^*\in(t_k,t'_{k-1})$, определим по индукции функцию $u: T_f^o\to R$, принимая

$$u(t)=u_0(t),\ t\in[t_0^*,t_1^*],$$

$$u(t)=M_k[u_k(t)-u_k(t_k^*)]+u(t_k^*),\ t\in[t_k^*,t_{k+1}^*],\ k>0,$$

$$u(t)=-\frac{1}{M_k}[u_k(t_{k+1}^*)-u_k(t)]+u(t_{k+1}^*),\ t\in[t_k^*,t_{k+1}^*],\ k<0.$$

Если при этом на каждом очередном шаге k выбирать достаточно большое M_k, то построенная функция u на основании леммы 3 будет разрешающей и, следовательно, множество T_f^o

является регулярным.

Если множество T_f не совпадает со своим открытым ядром T_f°, т.е. содержит помимо того еще минимальный элемент θ, то регулярность этого множества вытекает из леммы 4. Далее, на основании замечания к этой лемме заключаем, что разрешающая функция $u: T_f \to R$ является непрерывной. Следовательно, рассматриваемая функция $f \in W_C(G)$ принадлежит классу $U_c V(G)$, и теорема доказана.

Регулярное множество $T \subset T_f$ условимся называть с и л ь н о р е г у л я р н ы м, если для этого множества существует разрешающая функция u из $Lip^1(T)$, т.е. такая, что

$$\sup_{t<t'} \frac{u(t')-u(t)}{t'-t} < +\infty .$$

Точку $t^* \subset T_f$ назовем с и л ь н о р е г у л я р н о й, если при некотором $\varepsilon > 0$ таковым является множество $(t^*-\varepsilon, t^*+\varepsilon) \cap T_f$.

Из приведенного доказательства теоремы ясно, что если для рассматриваемой функции $f \in W_C(G)$ все точки $t^* \in T_f^{\circ}$ являются сильно регулярными, то для множества T_f существует такая разрешающая функция u, что при любом $\bar{t} \in T_f$ сужение этой функции на множество $T = \{t \in T_f : t \leq \bar{t}\}$ принадлежит классу $Lip^1(T)$.

§ 4. Характеристика регулярных и сильно регулярных точек

В предыдущем параграфе было показано, что интересующая нас проблема Фенхеля сводится к выяснению условий, при которых для функции $f \in W_C(G)$ все точки открытого ядра T_f° области значений T_f являются регулярными. Помимо условий, характеризующих регулярные точки, мы установим также необходимые и достаточные условия, при которых точка $t^* \in T_f^{\circ}$ является сильно регулярной.

Введем вспомогательные линейные нормированные пространства аддитивных функций с конечными носителями. Для этого рассмотрим произвольное ограниченное связное множество $T \subset R$ и совокупности $\mathfrak{M}_T$ всех его подмножеств. Для каждого $t_0 \in T$ определим функцию $\mu_{t_0}: \mathfrak{M}_T \to R$, полагая

$$\mu_{t_0}(e)=1 \text{ при } t_0 \in e \ , \ \mu_{t_0}(e)=0 \text{ при } t_0 \bar{\in} e \ .$$

Далее, через $\Phi(\mathfrak{M}_T)$ обозначим совокупность функций $\mu: \mathfrak{M}_T \to R$, представимых в виде линейных комбинаций

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu_{t_k} \ , \ n=1,2,\ldots, \tag{12}$$

где точки $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ из T, а c_k – произвольные вещественные числа с суммой, равной нулю. В получаемом таким образом линейном пространстве $\Phi(\mathfrak{M}_T)$ аддитивных функций (12) с конечными носителями введем две нормы:

$$\|\mu\|_v = \sum_{k=1}^{n} |c_k| , \quad \|\mu\|_w = \sum_{k=1}^{n-1} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i \Big| (t_{k+1} - t_k)$$

и соответствующие линейные нормированные пространства обозначим через $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$ и $\Phi^{(w)}(\mathfrak{M}_T)$.

Сразу же заметим, что каждый аддитивный и однородный функционал в $\Phi(\mathfrak{M}_T)$ имеет вид:

$$\ell_u \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \mu_{t_k} \Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k u(t_k), \tag{13}$$

где функция $u: T \to R$ по данному функционалу определяется с точностью до постоянного слагаемого. При этом функционал (13) является непрерывным в пространстве $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$ в том и только том случае, если

$$\|u\|_m = \sup_{t,t' \in T} |u(t') - u(t)| < +\infty.$$

Это означает, в частности, что при $T=[\bar{t}, \bar{t}']$ каждая неубывающая функция $u: T \to R$ определяет непрерывный функционал в $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$.

Что касается непрерывных функционалов в пространстве $\Phi^{(w)}(\mathfrak{M}_T)$, то порождающие их функции $u: T \to R$ удовлетворяют условию (ср. [3]):

$$\|u\|_{Lip} = \sup_{t \neq t'} \frac{u(t') - u(t)}{t' - t} < +\infty.$$

Сопоставим теперь каждой функции $f \in W_c(G)$ и отрезку $T=[\bar{t},\bar{t}']$ в $\Phi(\mathfrak{M}_T)$ два множества:

$$A(f,T)=\{a_{tt'}=\mu_{t'}-\mu_t : t<t' \text{ из } T\} \quad ,$$
$$B(f,T)=\{b_{tt'}=\mu_t+\mu_{t'}-2\mu_{\tau_i(t,t')} : t<t' \text{ из } T\} \; .$$

Коническую оболочку их объединения обозначим через $K(f,T)$, а через $K^*(f,T)$ обозначим сопряженный конус, состоящий из функционалов (13), принимающих неотрицательные значения на всех $\mu \in K(f,T)$.

Нетрудно видеть, что для функций $u: T \to R$, отвечающих функционалам $\ell_u \in K^*(f,T)$, и только для таких функций при любых $t<t'$ из T выполняются соотношения (9′). В частности, это означает, что все функционалы $\ell_u \in K^*(f,T)$ являются непрерывными в пространстве $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$.

Далее, из замечания к лемме 4 следует, что внутренняя точка t^* множества T_f значений функции $f \in W_c(G)$ в том и только том случае является регулярной, если при некоторых $\bar{t}<t^*<\bar{t}'$ из T_f отвечающий множеству $T=[\bar{t},\bar{t}']$ сопряженный конус $K^*(f,T)$ содержит функционал ℓ_u, удовлетворяющий условию:

$$\ell_u(-a_{\bar{t}t^*})=u(\bar{t})-u(t^*)<0. \qquad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. Необходимым и достаточным условием регулярности внутренней точки t^* множества T_f значений функции $f \in W_c(G)$ является наличие в T_f точек $\bar{t}<t^*<\bar{t}'$ таких, что множество $T=[\bar{t},\bar{t}']$ удовлетворяет условию:

$$\rho_v(-a_{\bar{t}t^*},K(f,T))=\inf_{a\in K(f,T)}\|a+a_{\bar{t}t^*}\|_v>0. \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $T=[\bar{t},\bar{t}']$, где $\bar{t}<t^*<\bar{t}'$ из T_f, удовлетворяет условию (15). Тогда аддитивная функция $-a_{\bar{t}t^*}$, очевидно, не принадлежит замыканию $\bar{K}^{(v)}(f,T)$ конуса $K(f,T)$ в пространстве $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$. Поэтому найдется функционал $\ell_u \in K^*(f,T)$, удовлетворяющий условию (14), и потому точка t^* является регулярной. Наоборот, если внутренняя точка t^* множества T_f является регулярной, то при некоторых $\bar{t}<t^*<\bar{t}'$ из T_f отвечающий множеству $T=[\bar{t},\bar{t}']$ сопряженный конус $K^*(f,T)$ содержит функционал ℓ_u, удовлетворяющий условию (14). Но тогда аддитивная функция $-a_{\bar{t}t^*}$ не принадлежит замыканию $\bar{K}^{(v)}(f,T)$ конуса $K(f,T)$, и потому имеет место (15).

ТЕОРЕМА 3. Внутренняя точка t^* множества T_f значений функции $f \in W_C(G)$ тогда и только тогда является сильно регулярной, если при некоторых $\bar{t} < t^* < \bar{t}'$ множество $T = [\bar{t}, \bar{t}']$ удовлетворяет условию:

$$\rho_w(-a_{\bar{t}t^*}, K(f,T)) = \inf_{a \in K(f,T)} \|a + a_{\bar{t}t^*}\|_w > 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В отличие от предыдущей теоремы здесь рассматривается замыкание $\bar{K}^{(w)}(f,T)$ конуса $K(f,T)$ в пространстве $\Phi^{(w)}(\mathfrak{M}_T)$. В остальном доказательство, по существу, не меняется.

§ 5. Дополнительные замечания

Прежде всего, выведем интересное следствие из доказанной теоремы 2. Для этого, фиксируя произвольно точки $\alpha_0 < t^* < \beta_0$ из области значений T_f функции $f \in W_C(G)$, в множестве $T = [\alpha_0, \beta_0]$ определим по индукции две монотонные последовательности точек:

$$\alpha_i = \tau_f(\alpha_{i-1}, t^*), \beta_i = \tau_f(t^*, \beta_{i-1}), \ i = 1, 2, \ldots \ . \quad (17)$$

Покажем, что для соответствующих аддитивных функций в пространстве $\Phi^{(v)}(\mathfrak{M}_T)$ справедливы следующие соотношения:

$$\rho_v(-a_{\alpha_i t^*}, K(f,T)) \geq \frac{1}{2^i} \rho_v(-a_{\alpha_0 t^*}, K(f,T)), \quad (18)$$

$$\rho_v(-a_{t^*\beta_i}, K(f,T)) \leq \frac{1}{2^i} \rho_v(-a_{t^*\beta_0}, K(f,T)). \quad (19)$$

Действительно, учитывая определения множеств $A(f,T)$ и $B(f,T)$, а также соотношения (17), имеем:

$$a_{\alpha_i t^*} = \frac{1}{2}(a_{\alpha_{i-1} t^*} + b_{\alpha_{i-1} t^*}), \ a_{t^*\beta_i} = \frac{1}{2}(a_{t^*\beta_{i-1}} - b_{t^*\beta_{i-1}}).$$

Поэтому

$$\rho_v(-a_{\alpha_i t^*}, K(f,T)) = \inf_{a \in K(f,T)} \|a + \tfrac{1}{2}(a_{\alpha_{i-1}t^*} + b_{\alpha_{i-1}t^*})\|_v \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \inf_{a \in K(f,T)} \|a + a_{\alpha_{i-1}t^*}\|_v = \frac{1}{2}\rho_v(-a_{\alpha_{i-1}t^*}, K(f,T)),$$

$$\rho_v(-a_{t^*\beta_i}, K(f,T)) = \inf_{a\in K(f,T)} \| a+\tfrac{1}{2}(a_{t^*\beta_{i-1}} - b_{t^*\beta_{i-1}})\|_v \le$$
$$\le \tfrac{1}{2} \inf_{a\in K(f,T)} \| a + a_{t^*\beta_{i-1}}\|_v = \tfrac{1}{2}\rho_v(-a_{t^*\beta_{i-1}}, K(f,T)),$$

откуда следуют соотношения (18) и (19).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f\in W_c(G)$ и множество $T^* \subset T_f$ является регулярным. Тогда при любых $\alpha_0 < t^* < \beta_0$ из T^* найдется натуральное m такое, что для определяемых согласно (17) точек α_i и β_i справедливы неравенства:

$$\tau_f(\alpha_i, \beta_{m+i}) < t^*, \ i=0,1,2,\dots .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что при некоторых $\alpha_0 < t^* < \beta_0$ из T^* требуемого m не существует. Другими словами, найдутся последовательности $\{i_k\}$ и $\{j_k\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}(j_k - i_k) = +\infty, \ \tau_f(\alpha_{i_k}, \beta_{j_k}) \ge t^*, \ k=1,2,\dots .$$

Тогда $a_{\alpha_{i_k} t^*} = a_{t^*\beta_{j_k}} - a$, где аддитивная функция

$$a = b_{\alpha_{i_k} t^*} + 2a_{t^*\tau_f(\alpha_{i_k}, \beta_{j_k})} \in K(f,T).$$

Поэтому $\rho_v(-a_{\alpha_{i_k} t^*}, K(f,T)) \le \rho_v(-a_{t^*\beta_{j_k}}, K(f,T))$, откуда, учитывая (18) и (19), имеем:

$$\rho_v(-a_{\alpha_0 t^*}, K(f,T)) \le \frac{1}{2^{j_k - i_k}} \rho_v(-a_{t^*\beta_0}, K(f,T)).$$

Но тогда аддитивная функция $-a_{\alpha_0 t^*}$ принадлежит замыканию $\bar{K}^{(v)}(f,T)$ конуса $K(f,T)$, что противоречит регулярности множества T . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Проиллюстрируем доказанное предложение на примере функции (8) из § 3. Областью значений этой функции $f\in W_c(G)$ является множество $T_f = (-1,+1)$. Далее, как нетрудно проверить, при любых $t < 0 < t'$ из T_f справедливы соотношения:

$$\tau_f(t,0) = \tfrac{1}{8}t, \ \tau_f(0,t') = \tfrac{1}{2}t',$$

причем $\tau(t,t') = 0$, если $t=-t'$. Поэтому для $\alpha_0 = -\varepsilon$, $t^*=0$ и $\beta_0 = \varepsilon$, где $\varepsilon\in(0,1)$, имеем:

$$\tau_f(\alpha_i, \beta_{3i}) = t^*, \ i=0,1,2,\dots ;$$

откуда на основании теоремы 4 заключаем, что точка $t^*=0$ не является регулярной и, следовательно, рассматриваемая функция (8) не принадлежит классу $\mathcal{U}_c V(G)$.

В заключение, отметим еще одно обстоятельство, которое иногда оказывается полезным при практическом решении задач преобразования квазивыпуклых функций в выпуклые.

Нетрудно сообразить, что функция $u \in \mathcal{U}_c(T_f)$ в том и только том случае является разрешающей для функции $f \in W_c(G)$, если определенная на множестве $u(T_f)$ возрастающая функция $\varphi = u^{-1}$ обладает следующим свойством: при любых $t<t'$ из $T_\varphi = T_f$ имеет место неравенство

$$\tau_f(t,t') \leq \tau_\varphi(t,t').$$

Далее, пусть $T \subset R$ - произвольное связное множество без наибольшего элемента, а функция $\tau: T \times T \to R$ такова, что при любых $t<t'$ из T

$$\tau(t,t)=t, \quad t<\tau(t,t')=\tau(t',t)<t'.$$

Тогда для существования возрастающей функции φ такой, что $\tau_\varphi = \tau$ необходимо и достаточно, чтобы при любых t_1, t_2, t_3, t_4 из T имело место равенство:

$$\tau(\tau(t_1,t_2),\tau(t_3,t_4))=\tau(\tau(t_1,t_3),\tau(t_2,t_4)).$$

При этом интересующая нас функция φ эффективно строится.

Литература

I. FENHEL W. Convex cones, sets and functions. Princeton, 1953

2. ВЕРТГЕЙМ Б.А. и РУБИНШТЕЙН Г.Ш. К определению квазивыпуклой функции. - В сб.:"Математическое программирование". М., "Наука", 1966, с. 121-134.

3. КАНТОРОВИЧ Л.В. и РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - "Вестник ЛГУ", серия матем., мех. и астр., 1958, в. 7, № 2, с.52-59.

Поступила в ред.-изд. отд.
13. XII. 1972 г.