1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 9(26)

УДК 517.51 : 519.5

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВ

Г.Ш.Рубинштейн

Рассматриваемые в заметке классы непрерывных функций множеств потребовались автору в связи с изучением бесконечномерных аналогов некоторых конкретных задач математического программирования.

I. Нас будет интересовать пространство $C(B)$ всех вещественно значных непрерывных функций*), определенных на σ-решетке B подмножеств некоторого множества Q.

Напомним соответствующие определения.

Совокупность B подмножеств множества Q, как известно, называется *σ-решеткой*, если она замкнута относительно счетных объединений и пересечений. А это означает, что σ-решетка вместе с каждой последовательностью множеств e_i содержит ее нижний и верхний пределы

$$\underline{\lim}\, e_i = \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{i=K}^{\infty} e_i\,, \quad \overline{\lim}\, e_i = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{i=K}^{\infty} e_i\,, \qquad (I)$$

в частности, их общее значение, когда рассматриваемая последовательность сходится. Вместе с тем σ-решетка, вообще говоря, не содержит пустого множества. Поэтому обычное понятие дизъюнктности множеств здесь теряет смысл. В ряде случаев его с успехом заменяет следующее более общее понятие, которое оказывается полезным также при изучении неаддитивных функций на σ-алгебрах.

---

*) Имеется в виду непрерывность относительно теоретико-множественного предела. Для некоторых из рассматриваемых вопросов условие непрерывности несущественно. Однако это специально оговариваться не будет.

Семейство множеств σ-решетки, содержащее более одного множества, называется **относительно дизъюнктным**, если пересечение каждой пары множеств этого семейства совпадает с пересечением всех его множеств. Это означает, в частности, что любые два множества σ-решетки относительно дизъюнктны. Далее, при замене множеств относительно дизъюнктного семейства их объединениями (пересечениями) с произвольным фиксированным множеством относительная дизъюнктность семейства не нарушается.

Определенная на σ-решетке B вещественно значная функция φ называется **непрерывной**, если для любой сходящейся последовательности множеств $e_i \in B$

$$\lim \varphi(e_i) = \varphi(\lim e_i). \qquad (2)$$

Совокупность таких функций, очевидно, замкнута относительно естественных линейных операций и потому образует векторное пространство, которое обозначается через $C(B)$.

Важное подпространство $V(B)$ в пространстве $C(B)$ образуют функции $\varphi \in C(B)$, удовлетворяющие условию

$$\varphi(e' \cup e'') + \varphi(e' \cap e'') = \varphi(e') + \varphi(e''). \qquad (3)$$

Указанные функции естественно назвать **аддитивными** (или даже σ-аддитивными) в **широком смысле**. Действительно, нетрудно проверить, что функция $\varphi: B \to R$ в том и только том случае принадлежит классу $V(B)$, если для любого не более чем счетного относительно дизъюнктного семейства $\{e_i\}_{i\in J} \subset B$ имеет место равенство

$$\varphi(\bigcup_{i\in J} e_i) - \varphi(\bigcap_{i\in J} e_i) = \sum_{i\in J} (\varphi(e_i) - \varphi(\bigcap_{j\in J} e_j)).$$

А это означает, что если рассматриваемая σ-решетка B является σ-алгеброй, то функции из $V(B)$ (и только они) представимы в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где φ_0 - константная функция (принимающая постоянное значение на всех $e \in B$), а φ_1 - обычная σ-аддитивная функция.

Выделенное подпространство $V(B)$, очевидно, является пересечением выпуклого конуса $\underline{V}(B)$, состоящего из функций $\varphi \in C(B)$, удовлетворяющих неравенству

$$\varphi(e' \cup e'') + \varphi(e' \cap e'') \le \varphi(e') + \varphi(e''), \qquad (4)$$

с симметричным выпуклым конусом $\overline{V}(B)$, состоящим из функций $\varphi \in C(B)$, удовлетворяющих противоположному неравенству

$$\varphi(e' \cup e'') + \varphi(e' \cap e'') \geqslant \varphi(e') + \varphi(e''). \qquad (5)$$

Функции $\varphi \in \underline{V}(B)$ естественно назвать п о д а д д и т и в н ы м и, а функции $\varphi \in \overline{V}(B)$ - н а д а д д и т и в н ы м и.

При изучении бесконечномерного аналога известной задачи о минимальном разрезе (см. [I], стр. 186) для доказательства существования решения потребовалось следующее вспомогательное утверждение, которое, по-видимому, представляет также некоторый самостоятельный интерес.

ЛЕММА I. Каковы бы ни были множества $e_1 \subset e_2$ из B и функция $\varphi \in \underline{V}(B)$, последняя достигает минимума в интервале

$$\mathcal{J}(e_1, e_2) = \{e \in B : e_1 \subset e \subset e_2\}.$$

При этом совокупность множеств, на которых достигается указанный минимум, является σ-решеткой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее утверждение проверяется без труда. Действительно, если

$$\mu(e_1, e_2) = \inf \{\varphi(e) : e \in \mathcal{J}(e_1, e_2)\} > -\infty, \qquad (6)$$

то при любых e' и e'' из $\mathcal{J}_0 = \{e \in \mathcal{J}(e_1, e_2) : \varphi(e) = \mu(e_1, e_2)\}$, учитывая (4), имеем:

$$\varphi(e' \cup e'') = \varphi(e' \cap e'') = \mu(e_1, e_2).$$

Следовательно, множество $\mathcal{J}_0$ замкнуто относительно конечных объединений и пересечений. А тогда, ввиду непрерывности функции φ, оно замкнуто также относительно счетных объединений и пересечений.

Приступая к доказательству неравенства (6), прежде всего заметим, что если последовательность множеств $e_i \in B$ состоит из попарно сравнимых множеств, то из нее можно выделить монотонные подпоследовательности, имеющие своими пределами множества (I).

Далее, каково бы ни было множество $e_3 \in \mathcal{J}(e_1, e_2)$, при всех $e \in \mathcal{J}(e_1, e_2)$ на основании (4) имеем:

$$\varphi(e) \geqslant \varphi(e \cap e_3) + \varphi(e \cup e_3) - \varphi(e_3) \geqslant \mu(e_1, e_3) + \mu(e_3, e_2) - \varphi(e_3).$$

Следовательно, если функция φ не ограничена снизу на интервале $\mathcal{J}(e_1, e_2)$, то она не может быть ограниченной снизу одновременно на двух рассмотренных подинтервалах $\mathcal{J}(e_1,e_3)$ и $\mathcal{J}(e_3,e_2)$. А это означает, что при нарушении неравенства (6) может быть построена последовательность попарно сравнимых множеств $e_i \in \mathcal{J}(e_1, e_2)$, для которой $\lim \varphi(e_i) = -\infty$. Но тогда функция φ не могла бы быть определенной на множествах (I). Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (6).

Заметим теперь, что если для множеств e' и e'' из $\mathcal{J}(e_1,e_2)$

$$\varphi(e') \leq \mu(e_1, e_2) + \delta', \quad \varphi(e'') \leq \mu(e_1, e_2) + \delta'',$$

то на основании неравенства (4) имеем:

$$\max\{\varphi(e' \cup e''), \ \varphi(e' \cap e'')\} \leq \mu(e_1, e_2) + \delta' + \delta''.$$

Поэтому, если последовательность множеств $e_i \in \mathcal{J}(e_1, e_2)$ такова, что

$$\varphi(e_i) \leq \mu(e_1, e_2) + 2^{-i}\varepsilon,$$

где ε – фиксированное положительное число, то при любых натуральных K и p справедливо неравенство

$$\max\{\varphi(\bigcap_{i=K}^{K+p} e_i), \ \varphi(\bigcup_{i=K}^{K+p} e_i)\} \leq \mu(e_1, e_2) + \frac{\varepsilon}{2^{K-1}}.$$

Из этого неравенства и непрерывности функции φ следует, что множества (I) входят в $\mathcal{J}_0$, и лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Соотношение (2) в доказательстве использовалось только для монотонных последовательностей.

2. Простейшие неаддитивные функции множеств конструируются с помощью аддитивных функций многих переменных.

Функцию $\psi: B^n \rightarrow R$ назовем *n-кратной аддитивной функцией в широком смысле*, если при любых фиксированных $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из B все функции

$$\psi_K(e) = \psi(e_1, \ldots, e_{K-1}, e, e_{K+1}, \ldots, e_n), \ e \in B, \tag{7}$$

принадлежат классу $V(B)$, т.е. являются аддитивными в широком смысле. Совокупность таких функций обозначим через $V_n(B)$.

Функция $\varphi: B \rightarrow R$ называется полиномиальной порядка n, если она совпадает с диагональным сечением некоторой функции $\psi \in V_n(B)$, т.е.

$$\varphi(e) = \psi(e, e, \ldots, e), \ e \in B.$$

Из этого определения следует, что все полиномиальные функции непрерывны, причем каждый класс $P_n(B)$ полиномиальных функций порядка n является подпространством пространства $C(B)$. Далее, $P_1(B) = V(B)$, а при $m < n$ имеет место включение $P_m(B) \subset P_n(B)$.

Остановимся на интересном обобщении характеристики (3) класса полиномиальных функций первого порядка.

Для этого каждой функции $\varphi \in C(B)$ сопоставим последовательность функций $\chi_m : B^m \longrightarrow R$ ($m = 2, 3, \ldots$), определяемую следующим образом:

$$\chi_m(e_1, \ldots, e_m) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{m} e_i\right) + \sum_{r=1}^{m} (-1)^r \sum_{\{i_s\} \in \mathcal{J}_{m,r}} \varphi\left(\bigcup_{s=1}^{r} e_{i_s}\right), \quad (8)$$

где $\mathcal{J}_{m,r}$ - совокупность r-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Заметим, что $\chi_2(e_1, e_2) = \varphi(e_1 \cap e_2) - \varphi(e_1) - \varphi(e_2) + \varphi(e_1 \cup e_2)$, а при $m > 2$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\chi_m(e_1, \ldots, e_m) = \chi_{m-1}(e_1, \ldots, e_{m-1}) - \chi_{m-1}(e_1 \cup e_m, \ldots, e_{m-1} \cup e_m). \quad (9)$$

Покажем теперь, что m-мерным аналогом соотношения (3) является следующее требование:

УСЛОВИЕ U_m. Определяемая согласно (8) функция $\chi_m : B^m \longrightarrow R$ обращается в ноль на любом относительно дизъюнктном семействе $\{e_i\}_{i=1}^{m} \subset B$.

Как уже отмечалось, любые два множества e_1 и e_2 из B образуют относительно дизъюнктное семейство. Поэтому условие U_2 совпадает с требованием выполнения соотношения (3). Далее, из рекуррентного соотношения (9) следует, что с увеличением параметра m условие U_m ослабляется.

ЛЕММА 2. Каждая полиномиальная функция порядка n удовлетворяет условию U_{n+1}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение проверяется индукцией по n с использованием очевидной возможности представления каждой полиномиальной функции порядка $n > 1$ в виде диагонального сечения некоторой функции $f : B^2 \longrightarrow R$ такой, что $f(e', \cdot) \in P_1(B)$, а $f(\cdot, e'') \in P_{n-1}(B)$ при любых e' и e'' из B.

В одном из докладов автора по бесконечномерным аналогам конкретных задач математического программирования была намечена схема доказательства обратного утверждения (а также двух предложений следующего пункта) для случая, когда Q - метрический компакт, а B - система его борелевских множеств. Однако эти дополнительные предположения, по-видимому, связаны лишь с используемой техникой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если функция $\varphi \in C(B)$ удовлетворяет условию U_{n+1}, то она принадлежит классу $P_n(B)$ полиномиальных функций порядка n.

3. В этом пункте предполагается, что рассматриваемая σ-решетка B является σ-алгеброй. Далее, мы ограничиваемся здесь рассмотрением неотрицательных функций $\varphi \in C(B)$, обращающихся в ноль на пустом множестве. Совокупность таких функций обозначим через $C_0^+(B)$. При этом функции φ из $V_0^+(B) = V(B) \cap C_0^+(B)$, очевидно, являются обычными мерами. Под n-кратными мерами, соответственно, понимаются такие функции $\psi \in B^n \to R$, для которых функции $\psi_k : B \to R$, определяемые согласно (7), при любых $e_1, e_2, \ldots, e_n \in B$ принадлежат классу $V_0^+(B)$, т.е. являются обычными мерами. Диагональные сечения n-кратных мер образуют класс $\Phi_n(B)$ полиномиальных мер порядка n.

Нас будет интересовать замыкание (в некоторой естественной топологии) класса $\Phi_\infty(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n(B)$ всех полиномиальных мер.

Прежде всего, докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. Для функций $\varphi \in C_0^+(B)$ условие U_m равносильно требованию обращения в ноль величин (8), отвечающих только попарно дизъюнктным (в обычном смысле) множествам $e_1, e_2, \ldots, e_m \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 2$ это известно. Пусть $m > 2$ и семейство $\{e_i\}_{i=1}^m \subset B$ является относительно дизъюнктным. Тогда, полагая

$$e_0 = \bigcap_{i=1}^{m} e_i, \quad e_i' = e_i \setminus e_0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

на основании рекуррентного соотношения (9) имеем:

$$\chi_m(e_1, \ldots, e_m) = \chi_{m-1}(e_1, \ldots, e_{m-1}) - \chi_{m-1}(e_1 \cup e_m, \ldots, e_{m-1} \cup e_m),$$

$$\chi_m(e_1', \ldots, e_{m-1}', e_0) = \chi_{m-1}(e_1', \ldots, e_{m-1}') - \chi_{m-1}(e_1, \ldots, e_{m-1}),$$

$$\chi_m(e'_1,\ldots,e'_{m-1},e_m)=\chi_{m-1}(e'_1,\ldots,e'_{m-1})-\chi_{m-1}(e_1\cup e_m,\ldots,e_{m-1}\cup e_m).$$

А это означает, что

$$\chi_m(e_1,\ldots,e_m)=\chi_m(e'_1,\ldots,e'_{m-1},e_m)-\chi_m(e'_1,\ldots,e'_{m-1},e_0),\qquad (\text{II})$$

где множества $e'_1,\ldots,e'_{m-1},e_m\in B$ и множества $e'_1,\ldots,e'_{m-1},e_0\in B$, очевидно, попарно дизъюнктны. Из полученного соотношения (II) непосредственно следует справедливость утверждения леммы.

Выделим теперь важный подкласс класса $\overline{V}(B)$ нададдитивных функций φ, для которых по определению выполняется соотношение (5). Последнее, очевидно, означает неотрицательность соответствующих величин (8) при $m=2$. Нас будут интересовать функции $\varphi\in C_0^+(B)$, для которых при любом $m=2,3,\ldots$ и любом относительно дизъюнктном семействе $\{e_i\}_{i=1}^m\subset B$ величины (8) удовлетворяют неравенствам

$$(-1)^m\chi_m(e_1,e_2,\ldots,e_m)\geq 0.\qquad (\text{I2})$$

Такие функции мы назовем **н а д м е р а м и** и соответствующий класс обозначим через $\Phi(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В определении надмер достаточно требовать выполнения неравенств (I2) только для попарно дизъюнктных $e_1,\ldots,e_m\subset B$. Действительно, каково бы ни было относительно дизъюнктное семейство $\{e_i\}_{i=1}^m\subset B$, вводя обозначения (I0), на основании рекуррентного соотношения (9) имеем:

$$(-1)^m\chi_m(e_1,\ldots,e_m)=(-1)^m\chi_m(e'_1,\ldots,e'_m)+(-1)^{m+1}\chi_{m+1}(e'_1,\ldots,e'_m,e_0),$$

где множества $e'_1,\ldots,e'_m,\ e_0\in B$ уже являются попарно дизъюнктными.

ЛЕММА 4. Каждая полиномиальная мера является надмерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для полиномиальных мер первого порядка (т.е. для обычных мер) интересующие нас величины (8), отвечающие попарно дизъюнктным (или относительно дизъюнктным) аргументам, очевидно, равны нулю. Следовательно, в этом случае утверждение леммы справедливо.

Далее, при $n>1$ каждая функция $\varphi\in\Phi_n(B)$ представима в виде диагонального сечения некоторой функции $f: B^2\to R$ такой, что $f(e',\cdot)\in\Phi_1(B)$, а $f(\cdot,e'')\in\Phi_{n-1}(B)$ при любых e' и e'' из B. Но тогда, учитывая монотонность полиномиальных мер, для дизъюнктных $e_1,\ e_2\in B$ имеем:

$$(-1)^2\chi_2(e_1,e_2)=-f(e_1,e_1)-f(e_2,e_2)+f(e_1\cup e_2,e_1\cup e_2)=$$

$$=-f(e_1,e_1)+f(e_1\cup e_2,e_1)-f(e_2,e_2)+f(e_1\cup e_2,e_2)\geqslant 0.$$

При $m>2$ каждому набору попарно дизъюнктных множеств $e_1,\ldots,e_m\in B$ сопоставим функции $\chi^{(\kappa)}_{m-1}: B^{m-1}\to R$, отвечающие функциям

$$f(\cdot,e_\kappa)\in\Phi_{n-1}(B),\quad \kappa=1,2,\ldots,m.$$

Тогда интересующая нас величина (8), как нетрудно проверить, может быть записана в следующем виде:

$$\chi_m(e_1,\ldots,e_m)=-\sum_{\kappa=1}^{m}\chi^{(\kappa)}_{m-1}(e_1\cup e_\kappa,\ldots,e_{\kappa-1}\cup e_\kappa,e_{\kappa+1}\cup e_\kappa,\ldots,e_m\cup e_\kappa),$$

где семейства $\{e_i\cup e_\kappa\}_{i=1,\ldots,\kappa-1,\kappa+1,\ldots,m}$ являются относительно дизъюнктными.

Из приведенных фактов с учетом замечания 2 вытекает справедливость доказываемого включения $\Phi_\infty(B)\subset\Phi(B)$.

Что касается обратного утверждения и возможности равномерного приближения произвольной надмеры полиномиальными мерами, то доказательство соответствующих предложений, как и предложения I предыдущего пункта, было намечено автором в упоминавшемся докладе для частного случая, когда σ-алгебра B является системой борелевских множеств некоторого метрического компакта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если некоторая надмера удовлетворяет условию U_{n+1}, то она является полиномиальной мерой порядка n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каждая надмера является равномерным пределом некоторой последовательности полиномиальных мер.

Литература

1. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - "Успехи мат. наук", 1970, т. 25, № 5, с. 171-201.

Поступила в ред.-изд. отд.
9. XI. 1972 г.