1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 9(26)

УДК 513.81

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРЕМЫ А.Д.АЛЕКСАНДРОВА О ХАРАКТЕРИСТИКЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Г.Ш.Рубинштейн

В заметке с помощью доказанного А.Д.Александровым [1] признака конечномерного эллипсоида устанавливаются некоторые следствия из результатов автора [2] о реализации абстрактных осевых структур, которые имеют непосредственное отношение к основаниям геометрии.

Говорят, что множество Q наделено **осевой структурой**, если в Q выделена некоторая совокупность $\mathcal{K}$ упорядоченных подмножеств (осей) $\vec{\Pi}$ и при этом выполнены следующие условия (аксиомы):

1^0. Каждая ось $\vec{\Pi} \in \mathcal{K}$ является совершенно (линейно) упорядоченным непрерывным множеством (все сечения его дедекиндовы) без наименьшего и наибольшего элементов.

2^0. Каковы бы ни были два (различных) элемента – точки x и y из Q, в $\mathcal{K}$ найдется и притом единственная ось $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}(x,y)$ такая, что $x \in \vec{\Pi}$, $y \in \vec{\Pi}$, $x \prec y$, где $\prec$ обозначает отношение предшествования, порождаемое отношением порядка $\preccurlyeq$ на оси $\vec{\Pi}$.

3^0. Оси $\vec{\Pi}(x,y)$ и $\vec{\Pi}(y,x)$, отвечающие любым двум (различным) точкам x и y из Q, состоят из одних и тех же элементов.

4^0. Если точки x, y, $z \in Q$ не лежат на одной оси, то при любых $u \in \vec{\Pi}(x,y)$, $v \in \vec{\Pi}(y,z)$ таких, что на соответствующих осях $y \prec u$, $y \prec v \prec z$, оси $\vec{\Pi}(u,v)$ и $\vec{\Pi}(x,z)$ имеют общую точку w, которая на $\vec{\Pi}(x,z)$ удовлетворяет соотношению $x \preccurlyeq w \preccurlyeq z$.

Множество Q, наделенное осевой структурой $\mathcal{T}$, называется осевым пространством и обозначается через $(Q,\mathcal{T})$ или одной буквой Q, когда это не может вызвать недоразумений.

Простейшим примером осевого пространства может служить произвольное аффинное пространство, в котором в качестве осей принимаются естественным образом упорядоченные прямые. Далее, естественными осевыми структурами наделяются все открытые выпуклые множества в аффинных пространствах (в качестве осей принимаются расположенные в этих множествах части аффинных осей), в частности, открытые эллипсоиды, которые можно рассматривать как аффинные реализации пространств Лобачевского.

Сразу же заметим, что естественные осевые структуры аффинных пространств и пространств Лобачевского (конечной и бесконечной размерности) являются достаточно однородными. Группа $P(Q,\mathcal{T})$ осевых автоморфизмов каждого осевого пространства $(Q,\mathcal{T})$ такого типа, как нетрудно проверить, удовлетворяет следующим условиям однородности:

α) Каковы бы ни были точки x_1 и x_2 из Q, найдется автоморфизм $p\in P(Q,\mathcal{T})$ такой, что $p(x_1)=p(x_2)$. Другими словами, группа $P(Q,\mathcal{T})$ действует на Q транзитивно.

β) Каковы бы ни были оси Π_1 и Π_2 из $\mathcal{T}$, найдется автоморфизм $p\in P(Q,\mathcal{T})$, преобразующий ось Π_1 (как упорядоченное множество) в ось Π_2. Другими словами, группа $P(Q,\mathcal{T})$ действует транзитивно на множестве осей $\mathcal{T}$.

Первое из приведенных условий однородности для дальнейших целей недостаточно. Второе - является чересчур жестким. Формулировка интересующего нас более слабого условия однородности требует дополнительных сведений об осевых пространствах, к изложению которых мы и переходим.

Совокупность точек оси $\Pi(x,y)$ (или, что то же, оси $\Pi(y,x)$) в произвольном осевом пространстве Q называется прямой и обозначается через $\Pi(x,y)$.

Множество $L\subset Q$ называется аффинным многообразием, если оно вместе с каждыми двумя (различными) точками x и y содержит прямую $\Pi(x,y)$.

Минимальное аффинное многообразие, содержащее данное множество $M\subset Q$, называется аффинной оболочкой множества M и обозначается через аф.об. M.

Говорят, что точки множества M независимы, если ни одна из этих точек не содержится в аффинной оболочке остальных.

Оказывается (см. [3]), что если точки множества M независимы и $x_0 \bar{\in}$ аф.об. M, то и точки множества $M' = M \cup \{x_0\}$ также являются независимыми. Отсюда следует, что среди множеств $M \subset Q$, точки которых независимы, имеются максимальные, которые характеризуются тем, что их аффинные оболочки совпадают со всем Q. Каждое из таких множеств называется аффинной базой рассматриваемого осевого пространства Q.

Можно показать (см. [3]), что все аффинные базы осевого пространства имеют одну и ту же мощность. Это позволяет ввести понятие размерности осевого пространства. При этом, чтобы не входить в противоречие с привычным, в качестве размерности осевого пространства Q, обозначаемой через $\dim Q$, принимается мощность его аффинной базы, из которой удален один элемент. При этом, как нетрудно видеть, размерности осевых пространств, порожденных открытыми выпуклыми множествами аффинных пространств, совпадают с аффинными размерностями соответствующих множеств, или, что то же, содержащих их аффинных пространств.

Далее, в осевых пространствах вводится понятие параллельности осей (по Лобачевскому). Для этого прежде всего доказывается (см. [3]), что если для непересекающихся осей $\vec{\Pi}_0$ и $\vec{\Pi}_1$ при некоторых x, y, z таких, что

$$\vec{\Pi}(x,y) = \vec{\Pi}_0, \quad z \in \vec{\Pi}_1, \tag{I}$$

выполнено приводимое ниже условие (!), то это условие выполняется при любых x, y, z, удовлетворяющих соотношениям (I).

УСЛОВИЕ (!). Какова бы ни была точка $u \in \vec{\Pi}(y,z)$, удовлетворяющая соотношению $y \prec u \prec z$, ось $\vec{\Pi}(x,u)$ пересекается с осью $\vec{\Pi}_1$ в некоторой точке v такой, что $\vec{\Pi}(z,v) = \vec{\Pi}_1$.

Говорят, что ось $\vec{\Pi}_0$ параллельна оси $\vec{\Pi}_1$, и пишут $\vec{\Pi}_0 \parallel \vec{\Pi}_1$, если эти оси не имеют общих точек и удовлетворяют условию (!) при любых x, y, z таких, что имеет место (I), а также в том случае, когда эти оси совпадают.

Можно показать (см. [3]), что, каковы бы ни были осевое пространство $(Q, \mathcal{T})$, ось $\vec{\Pi} \in \mathcal{T}$ и точка $x_0 \in Q$, найдется одна и только одна ось $\vec{\Pi}_0$ такая, что $x_0 \in \vec{\Pi}_0$ и $\vec{\Pi}_0 \parallel \vec{\Pi}$. Между тем в двумерных осевых пространствах отношение параллельности, вообще говоря, не является симметричным (соответствующий пример имеется в [3]). Однако в осевых пространствах размерности большей двух это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности в множестве осей $\mathcal{T}$.

Осевые автоморфизмы осевого пространства $(Q, \mathcal{T})$ (точнее, порождаемые ими автоморфизмы множества $\mathcal{T}$), очевидно, согласуются с введенным отношением эквивалентности. Поэтому группа $P(Q, \mathcal{T})$ осевых автоморфизмов (точнее, порождаемая ею группа автоморфизмов множества $\mathcal{T}$) допускает факторизацию, в результате которой получается группа $\tilde{P}(Q, \mathcal{T})$ автоморфизмов множества $\tilde{\mathcal{T}}$ связок параллельных осей.

На языке введенной группы автоморфизмов интересующее нас условие однородности осевого пространства, дополняющее ранее рассмотренные условия α и β, формулируется следующим образом:

УСЛОВИЕ γ. Группа автоморфизмов $\tilde{P}(Q, \mathcal{T})$ действует на множестве $\tilde{\mathcal{T}}$ транзитивно.

На языке исходной группы $P(Q, \mathcal{T})$ осевых автоморфизмов осевого пространства $(Q, \mathcal{T})$ это означает, что каковы бы ни были оси $\vec{\Pi}_1$ и $\vec{\Pi}_2$ из $\mathcal{T}$, найдется автоморфизм $p \in P(Q, \mathcal{T})$, преобразующий ось $\vec{\Pi}_1$ (как упорядоченное множество) в некоторую ось, параллельную оси $\vec{\Pi}_2$, но не обязательно с ней совпадающую, как это требовалось в более сильном условии β.

Приведем теперь точные формулировки предложений из [I] и [2], о которых шла речь в самом начале заметки.

ТЕОРЕМА О РЕАЛИЗАЦИИ (см. [2]). Каждое осевое пространство Q, имеющее размерность $\dim Q > 3$, может быть реализовано в аффинном пространстве соответствующей размерности в виде открытого (в сильнейшей локально-выпуклой топологии) выпуклого множества с естественной осевой структурой.

ТЕОРЕМА А.Д.АЛЕКСАНДРОВА (см. [I]). Пусть M - ограниченное замкнутое выпуклое множество в конечномерном аффинном пространстве и $P(M)$ - группа его проективных автоморфизмов.

Тогда из транзитивности группы $P(M)$ на границе Γ множества M следует, что это множество является эллипсоидом.

Для упрощения формулировки основного результата, который, как уже отмечалось, является следствием приведенных теорем, условимся еще о следующем. Про определенные на одном и том же множестве Q осевую структуру $\mathcal{T}$ и аффинную структуру σ будем говорить, что они **согласованы**, если естественная осевая структура аффинного пространства (Q,σ) совпадает с заданной осевой структурой $\mathcal{T}$. Аналогично, определенные на одном и том же множестве Q осевая структура $\mathcal{T}$ и структура λ пространства Лобачевского считаются **согласованными**, если естественная осевая структура пространства Лобачевского (Q,λ) совпадает с заданной осевой структурой $\mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА. Пусть осевое пространство $(Q,\mathcal{T})$ конечной размерности $\dim(Q,\mathcal{T})>3$ удовлетворяет условию однородности γ. Тогда справедливо одно из следующих двух утверждений:

а) Множество Q можно наделить (и притом однозначно) аффинной структурой σ, согласованной с заданной осевой структурой $\mathcal{T}$. При этом группа $P(Q,\mathcal{T})$ осевых автоморфизмов осевого пространства $(Q,\mathcal{T})$ совпадает с группой аффинных автоморфизмов аффинного пространства (Q,σ).

б) Множество Q может быть наделено (и притом однозначно) структурой λ пространства Лобачевского, которая согласуется с заданной осевой структурой $\mathcal{T}$. При этом группа $P(Q,\mathcal{T})$ осевых автоморфизмов осевого пространства $(Q,\mathcal{T})$ совпадает с группой движений (в том числе и несобственных) пространства Лобачевского (Q,λ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая теорему о реализации, можно считать, что заданное осевое пространство $(Q,\mathcal{T})$ реализовано в конечномерном аффинном пространстве E в виде открытого выпуклого множества, наделенного естественной осевой структурой. При этом, в силу второй части теоремы о реализации, группа $P(Q,\mathcal{T})$ осевых автоморфизмов совпадает с группой проективных автоморфизмов выпуклого множества Q.

Покажем, что при $Q=E$ справедливо утверждение а), а при $Q\neq E$ – утверждение б).

Если $Q=E$, то каждый проективный автоморфизм является аффинным и потому справедлива вторая часть утверждения а).

Первая часть этого утверждения также очевидна. В качестве интересующей нас аффинной структуры на Q может быть принята аффинная структура пространства E, а единственность такой структуры следует из уже проверенной второй части утверждения.

При $Q \neq E$, учитывая имеющийся произвол при реализации осевых структур, можно считать, что Q - ограниченное открытое множество. Тогда каждая ось $\vec{\Pi} \in \mathcal{T}$ является естественным образом упорядоченным открытым отрезком, соединяющим две граничные точки множества Q. Одну из этих точек естественно назвать началом оси $\vec{\Pi}$, а другую - ее концом.

Каждая граничная точка множества Q является, очевидно, концом некоторой оси. При этом оси $\vec{\Pi}_1$ и $\vec{\Pi}_2$ из $\mathcal{T}$ тогда и только тогда имеют общий конец, когда они параллельны. Таким образом, устанавливается биекция f множества $\tilde{\mathcal{T}}$ связок параллельных осей на границу Γ рассматриваемого открытого выпуклого множества Q. Выясним связи этого отображения с имеющимися группами автоморфизмов.

Группа осевых автоморфизмов осевого пространства $(Q,\mathcal{T})$ при рассматриваемой реализации, как отмечалось, совпадает с группой проективных автоморфизмов открытого выпуклого множества Q. Последняя же одновременно является группой проективных автоморфизмов границы Γ и замкнутого выпуклого множества $\bar{Q} = Q \cup \Gamma$.

С другой стороны, каждый осевой автоморфизм $p \in P(Q,\mathcal{T})$ порождает некоторый автоморфизм $\tilde{p}$ из группы $\tilde{P}(Q,\mathcal{T})$ автоморфизмов множества $\tilde{\mathcal{T}}$ связок параллельных осей. При этом, какова бы ни была связка $s \in \tilde{\mathcal{T}}$, точка $f(\tilde{p}(s))$ множества Γ совпадает с точкой $p(f(s))$.

Следовательно, группа $\tilde{P}(Q,\mathcal{T})$ в рассматриваемом случае изоморфна группе $P(Q,\mathcal{T})$, и при отождествлении каждого пучка $s \in \tilde{\mathcal{T}}$ параллельных осей с отвечающей ему точкой $f(s)$ границы Γ множества Q эти группы совпадают. Поэтому из условия однородности $\lambda^{\sim}$ вытекает, что группа проективных автоморфизмов ограниченного выпуклого замкнутого множества $\bar{Q}$ действует транзитивно на его границе Γ. Такое множество, как следует из теоремы А.Д.Александрова, является эллипсоидом. Но тогда, в силу известной интерпретации геометрии Лобачевского, справедливо утверждение б), и теорема доказана.

Литература

1. АЛЕКСАНДРОВ А.Д. Конусы с транзитивной группой. - "Докл. АН СССР", 1969, т. 189, № 4, с. 695-698.

2. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одной внутренней характеристике относительно открытых выпуклых множеств. - "Докл. АН СССР", 1970, т. 193, № 5, с. 1004-1007.

3. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Теоремы отделимости выпуклых множеств.- "Сибир. мат. журн.", 1964, т. 5, № 5, с. 1098-1124.

Поступила в ред.-изд. отд.
9. XI. 1972 г.