УДК 519.35:513.88 + 512.25/26 + 513.81/82

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ДВОЙСТВЕННЫМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ [ж)]

Г.Ш.Рубинштейн

Введение

Во многих разделах математики исследование встречающихся экстремальных задач (выявление признаков решения, получение различных оценок экстремума, изучение вопросов существования и единственности решения, разработка эффективных численных методов) явно или неявно опирается на рассмотрение, наряду с исследуемой задачей, другой - в определенном смысле двойственной к ней. Особенно четко это проявилось в работах по линейному программированию Л.В.Канторовича [22-30[жж)], Данцига [13-17] и других авторов [75-82]. Однако отдельные пары двойственных экстремальных задач в явном виде рассматривались еще в работах по теории игр (фон Нейман [37]) и по теории моментов (М.Г. Крейн [32]).

Работа [32] и примыкающая к ней работа С.М.Никольского [38] явились толчком к появлению многочисленных глубоких исследований двойственных связей и соотношений в задачах наилучшего приближения, а также в различных вопросах теории аналитических

ж) Эта статья представляет из себя публикацию в полном объеме докторской диссертации автора, защищавшейся в мае 1965 года на математической секции Объединенного ученого совета СО АН СССР по физико-математическим наукам.

жж) См. список цитированной литературы стр.145-149.

функций. В этой связи особо отметим работы С.Я.Хавинсона (см. его обзорную статью [71]), в которых анализ рассматриваемых экстремальных задач проводится на основе некоторой единой схемы, сформулированной и исследованной в абстрактной форме. В схеме важную роль играют теоремы отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. Однако схема С.Я.Хавинсона применима лишь в тех случаях, когда л ю б а я гиперплоскость, разделяющая данные множества, строго выделяет нужную часть одного из них. Ввиду этого в схему не укладываются многие интересные экстремальные задачи, в частности, возникающие в линейном программировании и примыкающих к нему дисциплинах.

В работах автора (см. [41-63]) намечена более общая схема исследования экстремальных задач. В ней наряду с классическими широко используется ряд более тонких теорем отделимости, в которых утверждается лишь, что среди гиперплоскостей, разделяющих данные множества, с у щ е с т в у е т такая, которая строго выделяет нужную часть одного из этих множеств. Эта схема позволяет существенно расширить круг исследуемых экстремальных задач.

Опишем абстрактную схему используемого в диссертации общего геометрического подхода к выявлению экстремальных задач, двойственных к исследуемым.[ж)]

Пусть в фиксированном множестве E выделены непустые подмножества

$$A, \quad \{B_t\}_{t\in(\alpha,\beta)}, \quad -\infty \le \alpha < \beta \le +\infty,$$

причем подмножества B_t упорядочены по убыванию:

$$B_{t''} \subset B_{t'} \quad \text{при всех } t' \le t'' .$$

Введем обозначения:

$$B_{t-0} = \bigcap_{t'\in(\alpha,t)} B_{t'}, \quad B_{t+0} = \bigcup_{t'\in(t,\beta)} B_{t'}, \quad B = B_{\alpha+0},$$

ж) В докладе на IУ Всесоюзном математическом съезде (краткое содержание доклада изложено в [57]) рассматривалась более общая схема. Здесь мы ограничиваемся описанием частного случая, достаточного для анализа задач настоящей работы. Исключение представляет лишь одна задача наилучшего приближения (гл.IУ, § 5), требующая применения схемы в полном объеме, которое мы, однако, искусственно обходим.

и предположим, что

$$A \cap B_{\beta-0} = \phi. \qquad (1)$$

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. Среди допустимых элементов $a \in A \cap B$ найти оптимальный, для которого достигает максимума величина

$$\mu(a) = \sup\{t : a \in A \cap B_t\}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь некоторую совокупность E^* подмножеств $F \subset E$ таких, что

$$F \cap B \neq \phi, \qquad (3)$$

и положим

$$A^* = \{F \in E^* : A \subset F\},\ B_t^* = \{F \in E^* : B_{t+0} \cap F = \phi\}. \qquad (4)$$

Множества B_t^*, очевидно, упорядочены по возрастанию. Их объединение по $t \in (\alpha, \beta)$ обозначим через B^*.

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА. Среди допустимых элементов $F \in A^* \cap B^*$ найти оптимальный, для которого достигает минимума величина

$$\nu(F) = \inf\{t : F \in A^* \cap B_t^*\}. \qquad (5)$$

Непосредственно из определения величин (2), (5) и множеств (4) вытекает, что для любых допустимых элементов a и F имеет место неравенство:

$$\mu(a) \leq \nu(F).$$

Последнее приводит к следующему соотношению:

$$\alpha \leq \sup_{a \in A \cap B} \mu(a) \leq \inf_{F \in A^* \cap B^*} \nu(F) \leq \beta, \qquad (6)$$

где супремум пустого множества принимается равным α, а инфимум пустого множества - равным β.

Допустим теперь, что E^* - достаточно широкое множество, а именно:

(I) При $A \cap B \neq \phi$ или $A^* \cap B^* \neq \phi$ из соотношения $A \cap B_t = \phi$ следует, что $A^* \cap B_{t'}^* \neq \phi$ для всех $t' \in (t, \beta)$.

Нетрудно проверить, что при выполнении условия (I) в среднем неравенстве соотношения (6) достигается равенство, за исключением очевидного случая, когда равенство достигается в обоих крайних неравенствах (ни в одной из рассматриваемых задач нет допустимого элемента). А тогда, ввиду (I) и (3), для существования решения по крайней мере в одной из приведенных задач необходимо наличие допустимых элементов в обеих задачах. Это условие, очевидно, является также достаточным для существования решения основной задачи, если

$$A \cap B_{t'} \neq \phi \text{ при всех } t' < t < \beta \text{ влечет } \bigcap_{t' \in (\alpha, t)} (A \cap B_{t'}) \neq \phi, \qquad (7)$$

и для существования решения двойственной задачи, если

$$A^* \cap B^*_{t'} \neq \phi \text{ при всех } t' > t > \alpha \text{ влечет } \bigcap_{t' \in (t, \beta)} (A^* \cap B^*_{t'}) \neq \phi. \qquad (8)$$

Таким образом, при выполнении условий[ж)] (I), (7) и (8) для рассматриваемых задач справедлива

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ.[жж)] Если в одной из задач нет допустимого элемента, то ни в одной из этих задач нет и оптимального. Если же в обеих задачах существуют допустимые элементы, то в них имеются также и оптимальные элементы a_0 и F_0, причем

$$\alpha < \mu(a_0) = \max_{a \in A \cap B} \mu(a) = \min_{F \in A^* \cap B^*} \nu(F) = \nu(F_0) < \beta.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекают условия существования решений в рассматриваемых задачах и признак оптимальности допустимых элементов.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ.[жж)] Следующие утверждения относительно основной и двойственной задач равносильны:

I. В обеих задачах существуют оптимальные элементы.

2. В одной из задач существует оптимальный элемент.

3. В обеих задачах существуют допустимые элементы.

4. В основной задаче существуют допустимые элементы и функция (2) на множестве этих элементов ограничена сверху величиной, меньшей, чем β.

5. В двойственной задаче существуют допустимые элементы, и функция (5) на множестве этих элементов ограничена снизу величиной, большей, чем α.

ж) В приложениях иногда оказывается удобным условия (I) и (8) заменить одним, им эквивалентным:

(II) При $A \cap B \neq \phi$ или $A^* \cap B^* \neq \phi$ из соотношения $A \cap B_{t+0} = \phi$ следует, что $A^* \cap B^*_t \neq \phi$.

жж) Аналогичные предложения были впервые сформулированы в теории линейного программирования (см., напр., [I2]).

ПРИЗНАК ОПТИМАЛЬНОСТИ*). Для оптимальности допустимого элемента в одной из задач необходимо и достаточно существование допустимого элемента во второй задаче такого, что соответствующие величины (2) и (3) совпадают.

Описанная абстрактная схема представляет скелет развиваемой концепции, основным содержанием которой служат приемы, позволяющие приводить к указанной схеме исследование различных конкретных экстремальных задач. В рассматриваемой конкретизации схемы множество E - векторное пространство (конечной или бесконечной размерности), а исходные множества A и B_i предполагаются выпуклыми. В качестве E^* принимается совокупность замкнутых полупространств F, удовлетворяющих условию (3). При этом в случае, когда A - коническое множество с вершиной в нулевой точке, мы ограничиваемся рассмотрением однородных полупространств (граничные гиперплоскости которых содержат нулевой элемент), что, очевидно, не может отразиться на результатах исследования. Основным инструментом проверки условий, обеспечивающих справедливость теоремы двойственности и вытекающих из нее следствий, служат различные теоремы об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями. При этом классические теоремы отделимости Минковского-Асколи-Мазура и Эйдельгайта, как уже отмечалось, оказываются недостаточными. Возникает необходимость в уточнении и обобщении указанных теорем, в выявлении их истоков. Решению этой проблемы посвящена работа [58], которая помещена в диссертации в качестве первой главы (стр.20-54) и служит теоретическим фундаментом дальнейших исследований.

Проведенный анализ показал, что классические теоремы отделимости основаны на небольшом числе свойств векторных пространств и потому справедливы в пространствах более общей природы. Одновременно удается получить новые результаты (теоремы 6, 7, 8, 9, 14, 15), представляющие интерес и для обычных векторных пространств. Последние систематически используются в следующих разделах работы.

Алгоритмы решения исследуемых в диссертации задач в той или иной степени примыкают к линейному программированию. В

---

*) См. сноску **) на предыдущей странице.

связи с этим в качестве приложения (стр.127-145) помещена работа [59], посвященная развитию численных методов линейного программирования. В ней известный метод последовательного улучшения допустимого вектора, предложенный Л.В.Канторовичем (см., напр., [28], стр. 315-327, [54]), излагается в форме, позволяющей алгорифмически учитывать ряд особенностей рассматриваемой задачи. Благодаря этому для многих важных классов задач линейного программирования удается построить специальные алгорифмы, позволяющие решать задачи большого объема.

Вторая глава диссертации (стр. 55-84) посвящена конечномерным задачам. В первом параграфе на основе рассмотренной выше схемы исследуются задачи линейного программирования. При этом выделяются отдельные классы задач, играющие важную роль при разработке специальных алгорифмов для решения задач большого объема.

В § 2 излагаются результаты работы [53], в которой рассмотрены экстремальные задачи, представляющие обобщение классических задач линейного программирования.

В третьем параграфе изучается задача максимизации произведения линейных функций при линейных ограничениях. Эта задача исследуется по общей схеме с существенным использованием теорем отделимости, полученных в первой главе. Помимо теоретических результатов здесь намечаются эффективные приемы численного решения рассматриваемых задач.

В § 4 намеченная выше схема используется для анализа задач выпуклого программирования.

В третьей главе (стр.85-106) приводятся примеры бесконечномерных задач. В качестве § I здесь помещена работа [30], написанная автором совместно с Л.В.Канторовичем. В этой работе изучено новое функциональное пространство, широко использующееся при построении бесконечномерных аналогов задач линейного программирования.

Во втором параграфе рассматриваются примеры бесконечномерных аналогов частных задач линейного программирования и теории игр. Третий параграф представляет описание одного бесконечномерного аналога общей линейной модели производственного планирования.

Четвертая глава диссертации (стр.107-126) посвящена вопросам наилучшего приближения функций. В качестве § I здесь помещена работа [60], в которой изучена задача наилучшего приближения нескольких заданных элементов элементами фиксированного выпуклого множества в произвольном линейном нормированном пространстве.

В двух следующих параграфах излагаются результаты работы [63]. Здесь прежде всего описан общий подход к выявлению признаков наименее уклоняющегося элемента в различных конкретных задачах наилучшего приближения (§ 2). Основой служат результаты предыдущего параграфа в сочетании с общей характеристикой экстремальных функционалов в рассматриваемом пространстве. На этом пути могут быть получены, в частности, все известные предложения теории наилучших приближений, относящиеся к задаче приближения обобщенными многочленами в различных конкретных линейных нормированных пространствах. Далее, подвергнута специальному изучению задача наилучшего приближения обобщенными многочленами в одном пространстве вектор-функций (§ 3). При этом помимо теоретических результатов намечается направление разработки эффективных численных методов решения задачи.

В качестве § 4 помещена работа [52], в которой исследуется задача равномерного приближения заданной непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций и намечаются пути решения этой задачи.

Наконец, в последнем параграфе изучается задача наилучшего приближения, близкая по постановке к рассматривавшейся ранее в [70].

ГЛАВА I

ТЕОРЕМЫ ОТДЕЛИМОСТИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ *)

Возможность отделения гиперплоскостями выпуклых множеств в векторных пространствах широко используется при изучении различных вопросов, в частности, играет важную роль в анализе многих экстремальных проблем (см. [57]). Однако при этом некоторые реальные задачи, не укладывающиеся в рамки известных теорем отделимости, из рассмотрения выпадают, в других - приходится накладывать излишне жесткие ограничения, понижающие ценность получаемых результатов. В связи с этим возникла необходимость в уточнении и обобщении указанных теорем, в выявлении их истоков.

Проведенный анализ показал, что классические теоремы отделимости основаны на небольшом числе свойств векторных пространств и потому справедливы в пространствах более общей природы. Кроме того, удается получить некоторые новые результаты, представляющие интерес и для случая обычных векторных пространств. Доказательства теорем носят элементарно-геометрический характер. Основаны они на построениях, аналогичных применявшимся в [41, 45], и в принципе не сложнее известных доказательств подобных теорем в векторных пространствах (см., например, [39]).

§ I. Обобщенные векторные пространства

Рассмотрим множество E, в котором каждым двум (различным) элементам - точкам x и y сопоставлено некоторое содержащее их подмножество с фиксированным отношением порядка. Относительно этого упорядоченного множества, обозначаемого через $\Pi(x,y)$ и называемого о с ь ю, проходящей через точку x в направлении точки y, предполагается**):

---

*) В качестве этой главы, как отмечалось, помещена работа автора [58].

**) Используемая терминология относительно упорядоченных множеств соответствует принятой в [39].

1^0. Ось $\vec{\Pi}(x,y)$ - совершенно упорядоченное, непрерывное множество (все сечения его дедекиндовы), в котором нет наименьшего и наибольшего элементов, причем точка x предшествует y : $x \prec y$.

2^0. Оси $\vec{\Pi}(x,y)$ и $\vec{\Pi}(y,x)$ состоят из одних и тех же элементов, но имеют противоположное упорядочение (если на одной из них $z \prec u$, то на второй z следует за u : $z \succ u$).

3^0. Ось $\vec{\Pi}(z,u)$, отвечающая точкам оси $\vec{\Pi}(x,y)$, находящимся в соотношении $z \prec u$, совпадает с осью $\vec{\Pi}(x,y)$.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего и, в частности, для формулировки еще одного предположения.

Множество точек оси $\vec{\Pi}(x,y)$ называется **п р я м о й**, проходящей через точки x и y, и обозначается через $\Pi(x,y)$ (без стрелки). Из сделанных предположений вытекает, что через любые две (различные) точки в E проходит одна и только одна прямая.

Естественным образом определяются понятия **о т р е з к о в** (открытого, замкнутого и полуоткрытых), соединяющих точки x и y (с концами в этих точках):

$$O(x,y)=\{z\in\vec{\Pi}(x,y): x\prec z\prec y\},\ O[x,y]=O(x,y)\cup\{x,y\},$$

$$O[x,y)=O(x,y)\cup\{x\},\ O(x,y]=O(x,y)\cup\{y\};$$

л у ч а с вершиной x, направленного в точку y :

$$\Lambda(x,y)=\{z\in\vec{\Pi}(x,y): z\succ x\};$$

с и м м е т р и ч н о г о ему луча (с вершиной x, направленного в сторону, противоположную y):

$$\hat{\Lambda}(x,y)=\{z\in\vec{\Pi}(x,y): z\prec x\}.$$

Для удобства вводятся еще так называемые вырожденные прямые, отрезки, лучи, состоящие из одной точки x :

$$\Pi(x,x)=O(x,x)=O[x,x]=O[x,x)=O(x,x]=\Lambda(x,x)=\hat{\Lambda}(x,x).$$

Множества $M\subset E$, содержащие с каждыми двумя своими точками проходящую через них прямую или соединяющий их отрезок, называются, соответственно, **а ф ф и н н ы м и м н о г о о б р а з и я м и** и **в ы п у к л ы м и м н о ж е с т в а м и**, а выпуклые множества, содержащие вместе с каждой своей точкой направленный в эту точку луч с вершиной в фиксированной точке x_0, называются **к о н у с а м и** с вершиной x_0. Конус, очевидно, может иметь несколько вершин и, если одна из них принадлежит конусу, он содержит все свои вершины.

Минимальные множества введенных типов, содержащие данное множество A, называются **о б о л о ч к а м и** этого множества, соответственно **а ф ф и н н о й**, **в ы п у к л о й** и **x_0-к о н и ч е с к о й** (аф. об. A, вып. об. A, x_0-кон. об. A). Каждая из них, очевидно, получается путем объединения соответствующих оболочек конечных подмножеств рассматриваемого множества A.

Точки множества A считаются **н е з а в и с и м ы м и**, точнее, аффинно-независимыми, если ни одна из них не содержится в аффинной оболочке остальных. Аналогично определяются понятия выпуклой и x_0-конической независимости.

Последнее предположение относительно рассматриваемого **о б о б щ е н н о г о в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а** E (о. в. пространства) состоит в следующем (аксиома Паша):

4⁰. Если принадлежащая аффинной оболочке независимых точек x, y, z невырожденная прямая пересекает открытый отрезок $O(x, y)$ (имеет с ним общую точку), то она пересекает также по крайней мере один из замкнутых отрезков $O[x,z]$, $O[y,z]$.

СЛЕДСТВИЕ I. В о. в. пространстве аффинное многообразие L, представляющее аффинную оболочку независимых точек x, y, z, обладает следующими свойствами:

а) Если $u \in O(x,y)$, $V = O[x,z] \cup O(y,z)$, то $L = \bigcup_{v \in V} \Pi(u,v)$.

б) Аффинная оболочка независимых точек u, v, $w \in L$ совпадает с L.

в) Каковы бы ни были точки u, v, $w \in L$ и невырожденная прямая $\Pi \subset L$, из соотношения $\Pi \cap O(u,v) \neq \emptyset$ вытекает, что непустым является также множество $\Pi \cap (O[u,w] \cup O(v,w))$, причем последнее (за исключением тривиального случая, когда $u, v, w \in \Pi$) состоит из одной точки.

г) Если Π - невырожденная прямая, принадлежащая L, то множество $L \setminus \Pi$ однозначно представимо в виде объединения двух выпуклых множеств G_1 и G_2. Последние не имеют общих точек и являются конусами с вершиной в произвольной точке

$x_0 \in \Pi$, причем луч $\Lambda(x_0, u) \subset G_1$ тогда и только тогда, когда симметричный луч $\tilde{\Lambda}(x_0, u) \subset G_2$. Кроме того, при любых $u \in G_1$, $v \in G_2$ отрезок $O(u, v)$ имеет общую точку с Π.

д) При любых независимых точках u, u', $v \in L$ среди невырожденных лучей $\Lambda(v, v')$ с вершиной в точке v имеется один и только один такой, что

$$\Lambda(v, v') \subset L, \Lambda(v, v') \cap \Lambda(u, u') = \phi,$$

$$\Lambda(v, w) \cap \Lambda(u, u') \neq \phi \text{ для всех } w \in O(u', v').$$

Фигурирующий в д) луч $\Lambda(v, v')$ называется параллельным к лучу $\Lambda(u, u')$.

Для примера проверим г). Если точки u, v, $w \in L \setminus \Pi$, то прямая Π, в силу в), либо пересекает два из трех отрезков $O(u, v)$, $O(v, w)$, $O(w, u)$, либо не имеет общих точек ни с одним из них. Точки u, $v \in L \setminus \Pi$ будем считать находящимися в соотношении $u \equiv v$, если $\Pi \cap O(u, v) = \phi$. Введенное отношение рефлексивно и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности в $L \setminus \Pi$. При этом для любых u, v, $w \in L \setminus \Pi$ по крайней мере одно из соотношений $u \equiv v$, $v \equiv w$, $w \equiv u$ выполняется. Поэтому число различных классов попарно эквивалентных точек не превосходит двух. С другой стороны, их не может быть меньше двух, так как при $x_0 \in \Pi$, $u \in L \setminus \Pi$, $v \in \tilde{\Lambda}(x_0, u)$ множество $\Pi \cap O(u, v) = \{x_0\}$, т.е. $u \not\equiv v$. Множество точек одного класса обозначим через G_1, другого – через G_2. В силу определения эти множества выпуклые, $G_1 \cup G_2 = L \setminus \Pi$, $G_1 \cap G_2 = \phi$, при $u \in G_1$, $v \in G_2$ множество $\Pi \cap O(u, v) \neq \phi$. Далее, если $x_0 \in \Pi$, $u \in G_2$, то прямые Π и $\Pi(x_0, u)$ имеют одну общую точку x_0; поэтому луч $\Lambda(x_0, u) \subset G_1$, а симметричный луч $\tilde{\Lambda}(x_0, u) \subset G_2$. Наконец, единственность представления $L \setminus \Pi$ в виде объединения двух выпуклых множеств следует из того, что любое выпуклое множество $G \subset L \setminus \Pi$ целиком лежит либо в G_1, либо в G_2.

Аксиома Паша позволяет также дополнить характеристику осей, приведенную в предположении I^0.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в о. в. пространстве E имеется по крайней мере три независимые точки, то все невырожденные открытые отрезки, лучи и прямые, как упорядоченные подмножества соответствующих осей, между собой изоморфны.

Благодаря такой однородности осей в о. в. пространстве, не сводящемся к одной прямой, для любой точки x и проходящей через нее оси $\overline{\Pi}$ имеется последовательность точек $x_n \in \overline{\Pi}$ такая, что

$$x_n \prec x_{n+1}, \quad n=1,2,\ldots, \quad \sup x_n = x .$$

Сделанные предположения относительно рассматриваемых пространств оказываются достаточными для построения содержательной теории, включающей значительную часть общей теории векторных пространств. Не имея возможности переизлагать в этом плане соответствующие разделы общего курса, мы ограничимся перечислением простейших свойств о. в. пространств, используемых в настоящей работе.

Прежде всего на основании следствия I из аксиомы Паша доказываются следующие леммы.

ЛЕММА I. Если точка y не принадлежит аффинному многообразию $L=\bigcup_{x\in X_1}\Lambda(x_0,x)$, выпуклому множеству $M=\bigcup_{x\in X_2}O(x_0,x)$ или конусу $K=\bigcup_{x\in X_3}\Lambda(x_0,x)$, то аф. об. $(L\cup\{y\})=\bigcup_{x\in X_1'}\Pi(x_0,x)$, вып.об. $(M\cup\{y\})=\bigcup_{x\in X_2'}O(x_0,x]$, x_0-кон. об. $(K\cup\{y\})=\bigcup_{x\in X_3'}\Lambda(x_0,x)$, где множества X_1', X_2', X_3' представляют объединения отрезков $O[x,y]$ соответственно по $x\in X_1$, $x\in X_2$, $x\in X_3$.

ЛЕММА 2. Совокупность вершин произвольного конуса образует аффинное многообразие.

ЛЕММА 3. Если L - аффинное многообразие вершин конуса K и точка $x\in L$, то множество $\tilde{K}=\bigcup_{y\in K}\tilde{\Lambda}(x,y)$ также является конусом, вершины которого заполняют L. Этот конус не зависит от выбора точки $x\in L$ и пересечение его с K либо совпадает с L, либо является пустым множеством.

Фигурирующие в лемме конусы K и $\tilde{K}$ называются с и м м е т р и ч н ы м и.

ЛЕММА 4. Если M и N - выпуклые множества, а x_0 - произвольная точка, то x_0-кон. об. $M=\bigcup_{x\in M}\Lambda(x_0,x)$, вып. об. $(M\cup N)=\bigcup_{x\in M,\,y\in N}O[x,y]$.

С помощью первой части леммы I проверяется

ТЕОРЕМА I. Если аффинная оболочка независимых точек, образующих множество A, не содержит точки x, то и расширенное множество $A'=A\cup\{x\}$ состоит из независимых точек.

На основании этой теоремы любая система независимых точек может быть дополнена до максимальной, аффинная оболочка которой совпадает со всем пространством. Такую максимальную систему независимых точек естественно назвать б а з и с о м (точнее, аффинным базисом) рассматриваемого о. в. пространства E, так как для каждой точки $x\in E$ однозначно определяется конечная подсистема, аффинная оболочка которой содержит x, а аффинные оболочки ее собственных подмножеств точки x не содержат. Различные аффинные базисы одного и того же о. в. пространства, как нетрудно проверить, имеют равные мощности. Это позволяет ввести понятие размерности о.в. пространства и его аффинных многообразий, которые, очевидно, также являются о. в. пространствами. Чтобы не входить в противоречие с привычным, под размерностью о. в. пространства или аффинного многообразия будем понимать мощность соответствующего базиса с исключенным одним элементом. При этом точки и прямые имеют привычные размерности 0 и I.

Далее, мощность дополнения базиса аффинного многообразия до базиса всего о. в. пространства не зависит от способа дополнения и называется д е ф е к т н о й р а з м е р н о с т ь ю рассматриваемого аффинного многообразия.

Наряду с конечномерными важную роль играют аффинные многообразия конечной дефектной размерности, в частности имеющие дефектную размерность I. Относительно последних, называемых гиперплоскостями, может быть доказано предложение, напоминающее аксиому Паша.

ЛЕММА 5. Если H - гиперплоскость, то при любых точках $x, y, z\in E$ из соотношения $H\cap O(x,y)\neq\phi$ вытекает, что непустым является также множество $H\cap(O[x,z]\cup O(y,z))$, причем последнее (за исключением тривиального случая, когда $x,y,z\in H$) состоит из одной точки.

На основании этой леммы точно так же, как это делалось при проверке пункта г) следствия I аксиомы Паша, доказывается

ТЕОРЕМА 2. Множество $E\setminus H$, дополнительное к гиперплоскости H, однозначно представимо в виде объединения двух выпуклых множеств G_1 и G_2. Последние не имеют общих точек и являются симметричными конусами, множеством вершин которых служит гиперплоскость H, причем при любых $y \in G_1$, $x \in G_2$ отрезок $O(y, x)$ имеет общую точку с H.

Фигурирующие в теореме конусы G_1 и G_2 называются о т к р ы т ы м и п о л у п р о с т р а н с т в а м и, отвечающими гиперплоскости H. Присоединяя к ним эту гиперплоскость, получаем так называемые замкнутые полупространства:

$$F_1 = G_1 \cup H, \quad F_2 = G_2 \cup H,$$

которые также являются симметричными конусами с множеством вершин H.

Говорят, что гиперплоскость H в ы д е л я е т (с т р о г о в ы д е л я е т) множество M, если последнее содержится в одном из замкнутых (открытых) полупространств, отвечающих H. Если множества M и N принадлежат различным замкнутым (открытым) полупространствам, отвечающим H, то говорят, что гиперплоскость H р а з д е л я е т (с т р о г о р а з д е л я е т) M и N. Наконец, если H разделяет M и N и при этом N лежит в открытом полупространстве, то говорят, что H с т р о г о о т д е л я е т N от M.

Под теоремами отделимости понимаются различные признаки существования гиперплоскостей, выделяющих или разделяющих данные множества.

В заключение опишем конструкцию, которая может использоваться вместо обычного перехода к фактор-пространствам, играющего, как известно, важную роль в теории векторных пространств.

Каждому открытому полупространству G, отвечающему произвольной гиперплоскости H, и аффинному многообразию $L \subset H$ мы сопоставим некоторое новое о. в. пространство, которое назовем ф а к т о р-п р о с т р а н с т в о м полупространства G по аффинному многообразию L и будем обозначать через G/L.

Для построения указанного пространства каждой точке $x \in G$ отнесем аффинное многообразие

$$L_x = \text{аф. об.} (L \cup \{x\})$$

и в качестве элементов множества G/L примем подмножества

$$X = G \cap L_x .$$

Аффинное многообразие L, очевидно, является гиперплоскостью в L_x (имеет в L_x дефектную размерность 1), и одно из отвечающих L открытых полупространств совпадает с X. Два элемента X_1 и X_2 множества G/L считаются различными, если как подмножества G, они между собой не совпадают. При этом, как легко видеть, $X_1 \cap X_2 = \phi$.

Каждым двум различным элементам $X_1, X_2 \in G/L$ сопоставим в E аффинное многообразие

$$L_{X_1 X_2} = \text{аф. об.} (X_1 \cup X)$$

и в G/L подмножество

$$\Pi(X_1, X_2) = \{X \in G/L : X \subset L_{X_1 X_2}\}.$$

Последнее после введения в нем отношения порядка будет принято за ось $\Pi(X_1, X_2)$ в G/L.

Прежде всего заметим, что для каждого $X \in \Pi(X_1, X_2)$ аффинное многообразие L_X = аф. об. X является гиперплоскостью в $L_{X_1 X_2}$. Через G_1 обозначим открытое полупространство в $L_{X_1 X_2}$, отвечающее гиперплоскости L_{X_1} и содержащее множество X_2, а пересечение этого полупространства с H обозначим через X_∞. Условимся теперь элементы $X' \neq X''$ множества $\Pi(X_1, X)$ считать находящимися в соотношении $X' \prec X''$, если гиперплоскость $L_{X''}$ в $L_{X_1 X_2}$ разделяет множества X' и X_∞.

Нетрудно проверить, что определенные таким образом в G/L оси $\Pi(X_1, X_2)$ удовлетворяют всем аксиомам о. в. пространства.

Отображение полупространства G на фактор-пространство G/L, сопоставляющее каждой точке $x \in G$ в G/L элемент $X = G \cap L_x$, называется каноническим.

При каноническом отображении φ образом оси $\Pi(x, y)$ (или ее части, расположенной в G) является одна точка, если $\varphi(x) = \varphi(y)$, или часть оси $\Pi(\varphi(x), \varphi(y))$, если $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. В последнем случае из соотношения $u \prec v$ на оси $\Pi(x, y)$ следует, что $\varphi(u) \prec \varphi(v)$ на $\Pi(\varphi(x), \varphi(y))$, и образом отрезка $O[x, y]$ служит отрезок $O[\varphi(x), \varphi(y)]$. Отсюда, в частности, вытекает, что выпуклые множества из G переходят в выпуклые множества в G/L.

Отметим еще, что в случае, когда аффинное многообразие L имеет в E конечную дефектную размерность n, размерность фактор-пространства G/L на единицу меньше.

§ 2. Простейшая топология

В о. в. пространстве E точка x множества M называется $(*)$-в н у т р е н н е й, если на любом луче с вершиной в этой точке найдется точка y такая, что $O[x,y]\subset M$. Обозначим через $\mathcal{G}$ совокупность множеств $G\subset E$, все точки которых $(*)$-внутренние. Очевидно, всякое объединение множеств из $\mathcal{G}$, а также пересечение любого конечного числа таких множеств принадлежит $\mathcal{G}$. Однако дополнение $E\setminus G$ множества G из $\mathcal{G}$ принадлежит $\mathcal{G}$ лишь в тривиальном случае, когда $G=E$ или $G=\phi$. Поэтому $\mathcal{G}$, как система открытых множеств, определяет в E некоторую связную топологию, которую естественно назвать $(*)$-т о п о л о г и е й.

Из теоремы 2 вытекает, что определенные выше открытые и замкнутые полупространства являются, соответственно, $(*)$-открытыми и $(*)$-замкнутыми, причем вторые представляют замыкание первых в рассматриваемой топологии.

Для выпуклого множества M $(*)$-замкнутость, как легко видеть, означает, что оно содержит множество $\bar{\bar{M}}$ концов полуоткрытых отрезков $O[x,y)$, принадлежащих M. Включение $M\subset\bar{\bar{M}}$ имеет место, очевидно, всегда. Поэтому $(*)$-замкнутые выпуклые множества M характеризуются равенством $M=\bar{\bar{M}}$.

Рассмотрим произвольное выпуклое множество M. Соответствующее ему множество $\bar{\bar{M}}$, как и в обычных векторных пространствах, всегда выпукло, но в случае бесконечномерных пространств, вообще говоря, не является $(*)$-замкнутым.[*] Определим трансфинитную последовательность выпуклых множеств M_ξ $(0\leqslant\xi\leqslant\Omega$, где Ω - первое несчетное порядковое число), полагая $M_0=M$ и для порядковых чисел $\xi>0$ $M_\xi=\bar{\bar{M}}_{\xi-1}$, если ξ первого рода, $M_\xi=\bigcup\limits_{\xi'<\xi}M_{\xi'}$, если ξ второго рода (предельное порядковое число). Докажем $(*)$-замкнутость множества M_Ω. В одномерном о. в. пространстве, очевидно, уже множество M_1 $(*)$-замкнуто. Если же рассматриваемое о. в. пространство более чем одномерно, из замечания к следствию 2 из аксиомы Паша (§ I) вытекает представимость любого полуоткры-

---

*) Ниже будет показано, что в конечномерных о. в. пространствах $\bar{\bar{M}}$ всегда $(*)$-замкнуто.

того отрезка $O[x,y)$ в виде объединения счетного числа замкнутых отрезков:

$$O[x,y)=\bigcup_{n=1}^{\infty} O[x,y_n].$$

Поэтому при $O[x,y)\subset M_\Omega$ каждая точка y_n содержится в некотором множестве M_{ξ_n}, где $\xi_n<\Omega$. Если ξ - первое порядковое число, большее всех ξ_n, то $\xi_0<\Omega$ и точка $y\in \in M_{\xi_0+1}\subset M_\Omega$, т.е. множество $M_\Omega=\bar{M}_\Omega$ и, следовательно, является $(*)$-замкнутым.

Из приведенных рассуждений, в частности, следует выпуклость $(*)$-замыкания $\bar{M}$ выпуклого множества M. Далее, $(*)$-замыкание $\bar{K}$ конуса K с вершиной x_0 является конусом с той же вершиной и симметричный ему конус K является замыканием конуса $\bar{K}$. Например, для проверки последнего достаточно на основании следствия I из аксиомы Паша показать, что аналогичными свойствами обладает отвечающее конусу K множество $\bar{\bar{K}}$, т.е. оно является конусом с вершиной x_0 и $\bar{\bar{K}}=\bar{K}$.

Выпуклое множество M назовем **т е л е с н ы м**, если оно имеет $(*)$-внутренние точки. Совокупность последних будем обозначать через M^* и называть **я д р о м**.

Как и в обычных векторных пространствах, справедлива следующая лемма, которая проверяется с помощью пункта г) следствия I (§ I).

ЛЕММА 6. Если M - телесное выпуклое множество, точка $x\in M^*$ и отрезок $O[x,y)\subset M$, то последний целиком лежит в M^*.

СЛЕДСТВИЕ I. Ядро M^* телесного выпуклого множества M является $(*)$-открытым выпуклым множеством. При этом имеют место соотношения:

$$\bar{M}=(\overline{M^*})=(\bar{M}^*),\quad (\bar{M})^*=M^*.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Ядро K^* телесного конуса K с вершиной x_0 является конусом с той же вершиной, причем $(\overline{K^*})=(\bar{K})^*$.

ТЕОРЕМА 2'. Если не совпадающий со всем пространством E $(*)$-замкнутый конус K содержит от каждой прямой, проходящей через его вершину, по крайней мере один луч, то аффинное многообразие вершин рассматриваемого конуса является гиперплоскостью и одно из замкнутых полупространств, отвечающих этой гиперплоскости, совпадает с K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аффинное многообразие вершин конуса K и симметричного конуса $\tilde{K}$, в силу леммы 3, представимо в виде: $H=K\cap\tilde{K}$. По условию конус $K\neq E$, $(*)$-замкнут и $K\cup\tilde{K}=E$. Поэтому $\tilde{K}\setminus H=E\setminus K$ и является $(*)$-открытым множеством. Оно совпадает с ядром конуса $\tilde{K}$, так как точки множества H (как вершины конуса, отличного от всего пространства) в $(\tilde{K})^*$ не содержатся. На основании следствий I и 2 леммы 6 $\tilde{K}\setminus H$ – $(*)$-открытый конус и симметричный ему конус $K\setminus H$ также является $(*)$-открытым. А это значит, что на отрезке $O(x,y)$, соединяющем любые точки $x\in K\setminus H$, $y\in\tilde{K}\setminus H$, должна найтись точка $z\overline{\in}(K\setminus H)\cup(\tilde{K}\setminus H)$, т.е. принадлежащая H. Но тогда аф. об. $(H\cup\{x\})$ содержит $\tilde{K}\setminus H$ и $K\setminus H$, т.е. совпадает с E. Следовательно, H – гиперплоскость. Ввиду единственности представления $E\setminus H$ в виде объединения двух выпуклых множеств (теорема 2), $K\setminus H$ – открытое полупространство, отвечающее H, а $K=(K\setminus H)\cup H$ – соответствующее замкнутое полупространство, что и утверждалось.

§ 3. Классические теоремы отделимости

ЛЕММА 7. Если точка x_o и непустые выпуклые множества U и V таковы, что при любых $u\in U$, $v\in V$ лучи $\Lambda(x_o,u)$ и $\Lambda(x_o,v)$ не являются симметричными, то конус $K=x_o$-кон. об. $(U\cup V)$ не совпадает со всем пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 3 конус K представим в виде

$$K=\bigcup_{x\in X}\Lambda(x_o,x),\quad \text{где } X=\bigcup_{u\in U,\, v\in V}O[u,v].$$

Поэтому достаточно показать существование луча с вершиной x_o, не имеющего общих точек с X. Точка x_o не может принадлежать одновременно U и V, так как луч $\Lambda(x_o,x_o)$ сам себе симметричен. Пусть $x_o\overline{\in}U$, $K_o=x_o$-кон. об. U и $\tilde{K}_o$- симметричный конус. Покажем, что $\tilde{K}_o\cap X=\emptyset$. Действительно, в противном случае при некоторых u, $u'\in U$, $v\in V$ имели

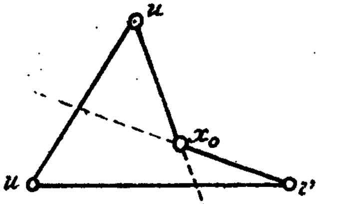


Рис. I

бы $\tilde{\Lambda}(x_o, u') \cap O(u, v) \neq \phi$ и тогда (см. рис. I) луч $\tilde{\Lambda}(x_o, v)$ пересекался бы с отрезком $O[u, u'] \subset V$, что противоречит условию.

ЛЕММА 8. Если телесный конус Q с вершиной x_o не совпадает со всем пространством, то существует гиперплоскость H, проходящая через точку x_o и выделяющая Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство $\mathfrak{K}$ конусов K с вершиной x_o, содержащих конус Q и не совпадающих со всем пространством. Последнее означает, что эти конусы не могут пересекаться с конусом $\bar{Q}^*$, симметричным к ядру Q^* конуса Q. По лемме Цорна*) в $\mathfrak{K}$ существует по крайней мере один максимальный элемент K_o (не содержащийся как правильная часть ни в каком другом конусе K из $\mathfrak{K}$). Семейство $\mathfrak{K}$ обладает следующими свойствами:

I. Если конус K из $\mathfrak{K}$, то и его $(*)$-замыкание $\bar{K}$ принадлежит $\mathfrak{K}$ (следствия I и 2 леммы 6).

2. Если конус K из $\mathfrak{K}$ не содержит точек симметричных лучей $\Lambda(x_o, x)$, $\tilde{\Lambda}(x_o, x)$, то конус $K' = x_o$-кон. об. $(K \cup \{x\})$ принадлежит $\mathfrak{K}$ (лемма 7).

Поэтому максимальный конус K_o $(*)$-замкнут и содержит от каждой прямой, проходящей через его вершину, по крайней мере один луч, т.е. K_o - полупространство. Отвечающая ему гиперплоскость H является искомой.

ТЕОРЕМА 3 (МИНКОВСКОГО - АСКОЛИ - МАЗУРА). Если аффинное многообразие $L \neq \phi$ не содержит точек ядра M^* телесного выпуклого множества M, то существует гиперплоскость H, содержащая L и выделяющая M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 при любой точке $x_o \in L$ конус $K = x_o$-кон. об. $(L \cup M^*)$ не совпадает со всем пространством. По лемме 8 существует гиперплоскость H, проходящая через точку x_o и выделяющая K. Она, очевидно, содержит L и выделяет M.

---

*) Под леммой Цорна понимается следующее предложение из теории упорядоченных множеств: если в упорядоченном множестве X каждое совершенно упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то в X имеется по крайней мере один максимальный элемент (см. [39] стр. I8).

ТЕОРЕМА 4 (ЭЙДЕЛЬГАЙТА). Если ядро M^* телесного выпуклого множества M и непустое выпуклое множество N не пересекаются, то существует гиперплоскость H, разделяющая M и N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать существование точки x_0 такой, что x_0-конические оболочки M^* и N не имеют общих точек. Тогда существующая в силу лемм 7 и 8 гиперплоскость H, проходящая через x_0 и выделяющая конус $K = x_0$-кон. об. $(M^* \cup Q)$, где $Q = \bigcup_{x \in N} \tilde{\Lambda}(x_0, x)$ будет, очевидно, разделять M и N.

В качестве x_0 может быть принята любая точка, не принадлежащая множествам

$$A_1 = \bigcup_{y \in M^*; z \in N} \tilde{\Lambda}(y, z), \quad A_2 = \bigcup_{y \in M^*; z \in N} \tilde{\Lambda}(z, y).$$

Последние, как нетрудно проверить, непустые, $(*)$-открытые и не имеют общих точек. В силу связности пространства, их объединение не совпадает со всем пространством, т.е. существует точка $x_0 \bar{\in} A_1 \cup A_2$.

ТЕОРЕМА 5. Каждое $(*)$-замкнутое телесное выпуклое множество M является пересечением некоторого множества замкнутых полупространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что любая точка $x \bar{\in} M$ может быть строго отделена от M. Пусть $x \bar{\in} M$, а y-произвольная точка ядра M^*. На отрезке $O[x, y]$, очевидно, найдется точка z такая, что

$$O[x, z) \cap M = \phi, \quad O[z, y] \subset M.$$

В силу теоремы 4, существует гиперплоскость H, разделяющая множества M и $O[x, z)$. Покажем, что она строго отделяет точку x от M. Гиперплоскость H, очевидно, проходит через точку z. Если бы она содержала также точку x, то тогда бы

$$y \in \Pi(x, z) \subset H,$$

что невозможно, так как при выделении гиперплоскостью телесного выпуклого множества ядро его всегда выделяется строго.

§ 4. Строение выпуклого множества

Рассматриваемое здесь понятие строения выпуклого множества оказывается тесно связанным с вопросом отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями и играет важную роль в дальнейшем изложении.

Прежде всего в каждом выпуклом множестве M о. в. пространства E определим бинарное отношение, полагая $x \leqslant_M y$ ($y \geqslant_M x$), если точки x, $y \in M$ таковы, что луч $\bar{\Lambda}(y, x)$ с вершиной y, направленный в сторону, противоположную x, пересекается с M. Это отношение, как нетрудно проверить, рефлексивно и транзитивно, т.е. является отношением предпорядка в M. Определяемое им отношение эквивалентности $\equiv_M$ ($x \equiv_M y$, если $x \leqslant_M y$ и $y \leqslant_M x$) разбивает M на попарно взаимно-простые классы - выпуклые множества $G_x(M) = \{x' : x' \equiv_M x\}$, являющиеся элементами фактор-множества $\mathcal{G}(M)$ множества M по отношению $\equiv_M$. Введенное отношение предпорядка в M ассоциирует в $\mathcal{G}(M)$ некоторое отношение порядка, а именно: элементы этого множества считаются находящимися в соотношении $G_x(M) \leqslant G_y(M)$, если $x \leqslant_M y$. Упорядоченное этим отношением множество $\mathcal{G}(M)$ называется *строением* соответствующего выпуклого множества M и является его важной характеристикой. В частности, она может быть положена в основу классификации выпуклых множеств в о. в. пространстве.

Заметим, что при любых точках x, $y \in M$ точка $z \in O(x, y)$ удовлетворяет соотношениям: $x \leqslant_M z$, $y \leqslant_M z$, причем при $x \leqslant_M u$, $y \leqslant_M u$ точка $z \leqslant_M u$. Отсюда, в частности, следует, что при $x_1 \leqslant_M x_2$, $y_1 \leqslant_M y_2$, $z_1 \in O(x_1, y_1)$, $z_2 \in O(x_2, y_2)$ имеет место соотношение $z_1 \leqslant_M z_2$.

Отнесем теперь каждой точке x выпуклого множества M конус $K_x(M)$, аффинное многообразие $L_x(M)$ и выпуклое множество $F_x(M)$, полагая $K_x(M) = x$-кон. об. M, $L_x(M) = K_x(M) \cap \bar{K}_x(M)$, $F_x(M) = L_x(M) \cap M$, где через $\bar{K}_x(M)$ обозначен конус, симметричный к $K_x(M)$.

Нетрудно видеть, что $L_x(M) =$ аф. об. $F_x(M)$ и в ней множество $F_x(M)$, называемое x-гранью, является телесным с ядром $G_x(M)$. Затем легко проверяется эквивалентность следующих утверждений относительно точек $x, y \in M$:

$$x \leq_M y,\ K_x(M) \subset K_y(M),\ L_x(M) \subset L_y(M),\ F_x(M) \subset F_y(M),\ x \in F_y(M).$$

В частности, это означает, что семейства множеств

$$\mathcal{K}(M) = \{K_x(M)\},\quad \mathcal{L}(M) = \{L_x(M)\},\quad \mathcal{F}(M) = \{F_x(M)\},$$

упорядоченные по возрастанию (по включению), изоморфны строению $\mathcal{J}(M)$ множества M. Далее, для каждой x-грани имеем

$$F_x(M) = \{x' \in M : x' \leq_M x\}.$$

Помимо указанных множеств, оказывается полезным иногда рассмотрение выпуклых множеств

$$S_x(M) = \{x' \in M : x' \geq_M x\}.$$

Подмножество $P \subset M$ называется порождающим, если

$$M = \bigcup_{x \in P} F_x(M),$$

т.е. для каждой точки $x' \in M$ найдется точка $x \in P$ такая, что $x' \leq_M x$. Выпуклое множество $M \neq \emptyset$, очевидно, тогда и только тогда является телесным относительно своей аффинной оболочки (короче, о т н о с и т е л ь н о т е л е с н ы м), когда имеется порождающее подмножество, состоящее из одной точки. Для этого достаточно существование порождающего подмножества $P \subset M$, не содержащего бесконечных возрастающих последовательностей точек[ж)]

$$x_1 <_M x_2 <_M \ldots <_M x_n <_M \ldots$$

Действительно, если $x_1 \in P$ и $F_{x_1}(M) \neq M$, то при любых $x \in M \setminus F_{x_1}$ и $x' \in O(x_1, x)$ найдется точка $x_2 \in P$ такая, что $x_2 \geq_M x' >_M x_1$. Если $F_{x_2}(M) \neq M$, то в P найдется точка $x_3 >_M x_2$ и т.д. Через конечное число шагов приходим к точке $x_n \in P$, для которой $F_{x_n}(M) = M$.

Отсюда, в частности, следует относительная телесность выпуклых множеств, имеющих конечные порождающие подмножества, а также относительная телесность произвольных выпуклых множеств

ж) Соотношение $x <_M y$ означает, что $x \leq_M y$, но $x \not\equiv_M y$ (соотношение $x \equiv_M y$ не выполняется).

в конечномерных обобщенных векторных пространствах. Из последнего факта и следствия I леммы 6 вытекает утверждение, приведенное в сноске на стр. 28.

Совокупность $(*)$-внутренних точек относительно телесного выпуклого множества M в E' – аф. об. M, как и в случае телесных выпуклых множеств, обозначается через M^* и называется ядром.

ЛЕММА 9. Если M и N – относительно телесные выпуклые множества, то таковыми являются также множества

$$U = \text{вып. об.}(M \cup N) = \bigcup_{y\in M,\, z\in N} O[y,z],\ V = \bigcup_{y\in M,\, z\in N} \tilde{\Lambda}(y,z),$$

причем, каковы бы ни были точки $y_0 \in M^*$ и $z_0 \in N^*$, имеют место включения $O(y_0, z_0) \subset U^*$, $\tilde{\Lambda}(y_0, z_0) \subset V^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется показать, что при любых точках $y \in M$, $z \in N$, $y_0 \in M^*$, $z_0 \in N^*$, $u \in O[y,z]$, $u_0 \in O(y_0, z_0)$, $v \in \tilde{\Lambda}(y,z)$, $v_0 \in \tilde{\Lambda}(y_0, z_0)$ выполняются соотношения

$$u \leq_U u_0\ ,\quad v \leq_V v_0\ .$$

Первое из них является следствием очевидных соотношений $y \leq_U y_0$, $z \leq_U z_0$, а второе вытекает из того, что при $v' \in \tilde{\Lambda}(y_0, z)$ имеем $v \leq_V v' \leq_V v_0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если выпуклые множества M, N и точки $y_0 \in M$, $z_0 \in N$ таковы, что аффинная оболочка множества $G_{y_0}(M) \cup G_{z_0}(N)$ совпадает со всем пространством E, то множество

$$A = \bigcup_{y\in S_{y_0}(M),\, z\in S_{z_0}(N)} \tilde{\Lambda}(y,z)$$

является $(*)$-открытым.

Действительно, в силу доказанной леммы при любых $y_0' \geq_M y_0$, $z_0' \geq_N z_0$ множества $\bigcup_{y\in G_{y_0'}(M),\, z\in G_{z_0'}(M)} \tilde{\Lambda}(y,z)$ являются $(*)$-открытыми, а интересующее нас множество A представляет объединение таких множеств по $y_0' \geq_M y_0$, $z_0' \geq_N z_0$.

Выпуклые множества M, имеющие счетные порождающие подмножества P, назовем квазителесными. На такие множества нам удастся перенести некоторые известные результаты, относящиеся к отделимости телесных выпуклых множеств.

В первом параграфе были введены понятия фактор-пространства G/L полупространства G по аффинному многообразию L и канонического отображения G на G/L. Нетрудно видеть, что при каноническом отображении φ точки x_1 и x_2 выпуклого множества $M\subset G$, находящиеся в соотношении $x_1 \leq_M x_2$, переходят в элементы, для которых в G/L выполняется аналогичное соотношение

$$\varphi(x_1) \leq_{M'} \varphi(x_2),$$

где под M' понимается образ M в G/L. Это означает, что порождающее подмножество $P\subset M$ переходит в порождающее подмножество $P'\subset M'$. Следовательно, телесным, относительно телесным и квазителесным выпуклым множеством $M\subset G$ отвечают в G/L множества того же типа; $(*)$-открытые выпуклые множества M переходят в $(*)$-открытые множества в G/L. Для $(*)$-замкнутых множеств аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Вместе с тем справедлива следующая

ЛЕММА 10. Если аффинное многообразие L состоит из одной точки x_0 и $(*)$-замкнутое выпуклое множество $M\subset G$ ограничено (не содержит лучей), то при каноническом отображении G в G/L образом M служит $(*)$-замкнутое множество M'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементами X множества G/L в данном случае служат лучи $\Lambda(x_0,x)\subset G$. Пусть отрезок $O[Y,Z)\subset M'$ и выбрана последовательность элементов этого отрезка такая, что на оси $\Pi(Y,Z)$

$$Y_n \prec Y_{n+1},\ n=0,1,2,\dots,\ \sup Y_n = Z.$$

В силу предположений относительно множества M, двумерное многообразие $E_1 =$ аф. об. $(Y\cup Z)$ содержит последовательность точек, удовлетворяющих условию

$$y_n \in Y_n \cap M,\ \tilde\Lambda(y_n, x_0)\cap M=\emptyset,\ n=0,1,2,\dots$$

Рассмотрим лучи $\Lambda(y_0,y_n)$ и точки y_n' ($n=1,2,\dots$) пересечения этих лучей с лучом $\Lambda(x_0,y_1)$. Указанные точки, как легко проверить, содержатся в M и на оси $\Pi(x_0,y_0)$ образуют убывающую последовательность. Инфимум их обозначим через y_0' и рассмотрим луч $\Lambda(y_0,y_0')$. Последний пересекается с каждым лучом $\Lambda(x_0, y_n)$ в некоторой точке z_n ($n=1,2,\ldots$), принадлежащей множеству M, в силу его $(*)$-замкнутости. Эти точки на оси $\Pi(y_0, y_0')$ возрастают и не могут быть неограниченными, так как M не содержит лучей. А тогда существует точка $z = \sup z_n \in M$. Она, как нетрудно видеть, лежит на луче Z и, следовательно, элемент $Z \in M'$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в конечномерном о. в. пространстве E последовательность непустых ограниченных $(*)$-замкнутых выпуклых множеств удовлетворяет условию

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots,$$

то эти множества имеют, по крайней мере, одну общую точку.

Проверяется индукцией по размерности пространства. При размерности $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n>1$ и при $n'<n$ утверждение справедливо. Проведем произвольную гиперплоскость H. Если она пересекается с бесконечным числом множеств M_k, наличие у них общей точки следует из предположения индукции. В противном случае найдется открытое полупространство G, содержащее все множества M_k, начиная с некоторого. Переходя к $(n-1)$-мерному фактор-пространству G/L, где в качестве L взята произвольная точка $x_0 \in H$, получаем существование луча $\Lambda(x_0, x)$, пересекающегося со всеми множествами M_k. Таким образом, вопрос сводится к одномерному пространству, для которого, как отмечалось, он очевиден.

Заметим, что в конечномерных о. в. пространствах оказывается справедливой также и значительно более сильная теорема Хелли [11] о совокупностях выпуклых множеств с общими точками. Однако в настоящей статье она нам не понадобится.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $(*)$-замкнутое выпуклое множество M не пересекается с выпуклой оболочкой N конечного числа точек $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то на любом луче $\Lambda(y,z)$ с вершиной $y \in N$ найдется точка y_0 такая, что множество $N' =$ вып. об. $(N \cup \{y_0\})$ также не имеет общих точек с M.

Действительно, пусть последовательность точек $z_n \in \Lambda(y,z)$ такова, что $z_{n+1} \prec z_n$, $n=1,2,\ldots$, $\inf z_n = y$. Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (M \cap \text{вып. об.}\{y_1, \ldots, y_m, z_n\}) = M \cap N = \emptyset$$

и, в силу предыдущего следствия, в качестве y_0 могут быть взяты точки z_n с достаточно большим номером.

§ 5. Некоторые уточнения и обобщения классических результатов

Следующие предложения, опирающиеся на понятия, введенные в предыдущем параграфе, дополняют и обобщают результаты § 3.

ТЕОРЕМА 6. Если для выпуклого множества M, аффинного многообразия $L \neq \phi$ и точки $y_0 \in M$ выполнены условия

$$L \cap S_{y_0}(M) = \phi, \quad \text{аф. об. } (L \cup G_{y_0}(M)) = E',$$

где $E' =$ аф. об. $(L \cup M)$, то существует гиперплоскость H, содержащая L и выделяющая M, причем такая, что

$$H \cap S_{y_0}(M) = \phi.$$

ТЕОРЕМА 7. Если выпуклые множества M, N и точки $y_0 \in M$, $z_0 \in N$ удовлетворяют условию

$$S_{y_0}(M) \cap S_{z_0}(N) = \phi, \quad \text{аф. об. } (G_{y_0}(M) \cup G_{z_0}(N)) = E',$$

где $E' =$ аф. об. $(M \cup N)$, то множества M и N можно разделить гиперплоскостью, содержащей не более одной из точек y_0, x_0.

ТЕОРЕМА 8. Если ядро M^* относительно телесного выпуклого множества M не имеет общих точек с выпуклым множеством $N \neq \phi$, для которого подмножество $N' = N \cap$ аф. об. M является порождающим, то существует гиперплоскость H, разделяющая M и N, причем такая, что $H \cap M^* = \phi$.

ТЕОРЕМА 9. Если $(*)$-замкнутое выпуклое множество M является квазителесным и точка $x_0 \bar{\in} M$, то существует гиперплоскость, строго отделяющая x_0 от M.

Первая теорема в частном случае, когда M – телесное выпуклое множество и точка y_0 принадлежит его ядру, совпадает с доказанной выше теоремой Минковского-Асколи-Мазура. Следующие два предложения являются обобщениями (в различных направлениях) теоремы Эйдельгайта. Последнее предложение позволяет усилить теорему 5, заменив в ней условие телесности выпуклого множества M более слабым требованием квазителесности M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Выберем произвольно точку $x_0 \in L$ и рассмотрим конус $K = x_0$-кон. об. $(L \cup S_{y_0}(M))$. Очевидно, для выпуклого множества R = вып. об. $(L \cup G_{y_0}(M))$ выполняются соотношения

$$R \subset K, \text{ аф. об. } R = \text{аф. об. } K = E'.$$

На основании леммы 9 конус K является относительно телесным. Повторяя доказательство теоремы 3 с заменой множества M^* на $S_{y_0}(M)$, получаем существование в E гиперплоскости H', содержащей L и выделяющей K. При этом точка y_0 не принадлежит H' и в качестве искомой может быть взята любая гиперплоскость H из E, удовлетворяющая условиям

$$H' \subset H, \quad y_0 \bar{\in} H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Очевидно, достаточно показать существование в E' гиперплоскости H', разделяющей множества $S_{y_0}(M)$ и $S_{z_0}(N)$. Для этого можно повторить доказательство теоремы 4, заменяя в нем множества M^* и N соответственно на $S_{y_0}(M)$ и $S_{z_0}(N)$. При этом, правда, несколько сложнее проверяется тот факт, что множества

$$A_1 = \bigcup_{y \in S_{y_0}(M),\, z \in S_{z_0}(N)} \tilde{\Lambda}(y,z), \quad A_2 = \bigcup_{y \in S_{y_0}(M),\, z \in S_{z_0}(N)} \tilde{\Lambda}(z,y)$$

являются $(*)$-открытыми в E'. Однако это было показано выше (следствие леммы 9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. По теореме 4 в E'=аф. об. M существует гиперплоскость H', разделяющая выпуклые множества M и N'. Соответствующее открытое полупространство в E', содержащее M^*, обозначим через G', а дополнительное замкнутое полупространство, содержащее N', - через F'. Выпуклые множества

$$M_1 = G', \quad N_1 = \text{вып. об. } (F' \cup N),$$

расположенные в E''= аф. об. $(M \cup N)$, очевидно, не имеют общих точек, причем N_1 является телесным в E'' (для любых точек $x \in N_1$ и $x_0 \in F' \setminus H'$ имеет место соотношение $x \leq_{N_1} x_0$). Поэтому в E'' существует гиперплоскость H'', разделяющая M_1 и N_1, причем $H' \subset H''$, $G' \cap H'' = \emptyset$. Условиям доказываемой теоремы удовлетворяет любая гиперплоскость H из E, содержащая H'' и не проходящая через некоторую точку $x_0 \in E' \setminus H'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Достаточно рассмотреть случай, когда аффинная оболочка множества M совпадает со всем пространством E. Пусть $X=\{x_i\}$ - счетное порождающее подмножество M и нам удалось найти относительно телесное выпуклое множество N, удовлетворяющее условиям

$$x_0 \in N^*,\ M \cap N^* = \phi,\ \text{аф. об. } N = E', \qquad (1)$$

где $E' =$ аф. об. $(X \cup \{x_0\})$. Тогда существование интересующей нас гиперплоскости, строго отделяющей точку x_0 от M, следует из предыдущей теоремы.

Для построения указанного выпуклого множества N выберем точки $y_i \in \Lambda(x_0, x_i)$, $z_i \in \bar{\Lambda}(x_0, x_i)$ так, чтобы выпуклые множества $N_m =$ вып. об. $\bigcup_{i=1}^{m} O[y_i, z_i]$, расположенные в конечномерных аффинных многообразиях

$$E_m = \text{аф. об. } \{x_0, x_1, \dots, x_m\}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

не пересекались с множествами $M_m = E_m \cap M$. Существование таких точек y_i и z_i было доказано выше (следствие 2 леммы 10). Множество $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$, как нетрудно видеть, удовлетворяет условиям (1), и теорема полностью доказана.

§ 6. Многогранники

Остановимся особо на рассмотрении выпуклых $(*)$-замкнутых множеств M, имеющих конечные строения (соответствующие семейства множеств $\mathcal{G}(M)$, $\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{F}(M)$ содержат конечное число различных элементов). Такие множества называются многогранниками. Простейшими примерами могут служить аффинные многообразия и замкнутые полупространства, строения которых содержат соответственно 1 и 2 элемента.

Если многогранник M содержит $r+1$ элементов таких, что

$$x_0 <_M x_1 <_M \dots <_M x_r,$$

но не содержит большего числа точек, удовлетворяющих подобному соотношению, то будем говорить, что многогранник M имеет сложность r.

В произвольном выпуклом множестве M точка x называется экстремальной, а соответствующая грань $F_x(M)$ минимальной, если в M не существует точки $x' <_M x$ и, следовательно,

$$F_x(M) = G_x(M). \tag{2}$$

В случае $(*)$-замкнутости выпуклого множества M минимальные грани характеризуются равенством

$$F_x(M) = L_x(M). \tag{3}$$

Действительно, множества $G_x(M)$, как отмечалось, являются $(*)$-открытыми в $L_x(M)$, а грани $F_x(M)$, представляющие пересечение $(*)$-замкнутых множеств M и $L_x(M)$, $(*)$-замкнуты. Отсюда на основании связности аффинных многообразий заключаем, что из (2) следует (3). С другой стороны, $G_x(M)$-ядро относительно телесного выпуклого множества $F_x(M)$, и потому из соотношения (3) вытекает (2).

Каждый многогранник $M \neq \emptyset$ является, очевидно, относительно телесным выпуклым множеством, в котором имеется по крайней мере одна минимальная грань. При этом он является конусом тогда и только тогда, когда содержит лишь одну минимальную грань. Последняя представляет аффинное многообразие вершин конуса.

ЛЕММА II. Для любого многогранника M конусы $K_x(M)$ из $\mathfrak{K}(M)$ являются многогранниками.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in M$ и $K = x_0$-кон.об. $M = \bigcup\limits_{x \in M} \Lambda(x_0, x)$. Если точки $x_1, x_2 \in M$, $y_1 \in \Lambda(x_0, x_1)$, $y_2 \in \Lambda(x_0, x_2)$, то из $x_1 \leq_M x_2$ следует, очевидно, что $y_1 \leq_K y_2$. Поэтому число элементов в строении $\mathcal{T}(K)$ конуса K конечно (не превосходит числа элементов в $\mathcal{T}(M)$). Остается проверить $(*)$-замкнутость K. Пусть отрезок $O[y_0, y] \subset K$. На основании замечания к следствию 2 из аксиомы Паша (§ I) существует последовательность $\{y_n\} \subset O[y_0, y]$ такая, что на оси $\Pi(y_0, y)$

$$y_n \prec y_{n+1}, n = 1, 2, \ldots \quad \sup y_n = y.$$

Если некоторая подпоследовательность $\{y_{n_k}\} \subset M$, то $y \in M \subset K$, в силу замкнутости M. Будем считать, что $\{y_n\} \cap M = \emptyset$. Тогда $\Lambda(x_0, y_n) \cap M = O(x_0, x_n]$, $n = 1, 2, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что все точки x_n M-эквивалентны, т.е. принадлежат одному и тому же множеству $G_x(M)$ (всего таких множеств конечное число). Если бы при некоторых $n_1 < n_2 < n_3$ точка $x_{n_3} \bar{\in} \Pi(x_{n_1}, x_{n_2})$, то это противоречило бы соотношению $x_{n_2} \not>_M x_0$ (см. рис. 2). Поэтому точки x_n лежат на одной оси

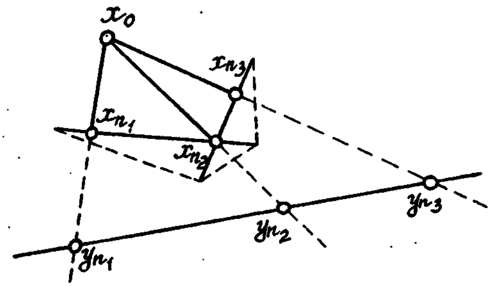


Рис. 2

$\vec{\Pi}(x_1, x_2)$ и точка $x = \sup x_n$, в силу $(*)$-замкнутости M, содержится в M. А тогда точка y, принадлежащая лучу $\Lambda(x_0, x)$, принадлежит конусу K, что и требовалось доказать.

Если M и N – многогранники, $P = M \cap N$, то соотношение $x \leq_P y$, очевидно, равносильно тому, что $x \leq_M y$ и $x \leq_N y$. Поэтому пересечение любого конечного числа многогранников является многогранником (число элементов в его строении не превосходит произведения аналогичных чисел для исходных многогранников). В частности, отсюда вытекает, что, каковы бы ни были аффинное многообразие E' и замкнутые полупространства $F_1, F_2, \ldots, F_m$, множество[ж)]

$$M = E' \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \tag{4}$$

является многогранником. Справедливо также обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 10. Каждый многогранник M допускает представление в форме (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если многогранник M совпадает со своей аффинной оболочкой E', утверждение очевидно. Если же $E' \setminus M \neq \emptyset$ и точка $x_0 \in M^*$, найдется непосредственно предшествующая ей точка, т.е. такая точка x_1, что $x_1 <_M x_0$, но ни для одной точки $x >_M x_1$ соотношение $x <_M x_0$ не имеет места. Докажем, что отвечающий этой точке конус $F' = K_{x_1}(M)$ являя-

ж) Допускается также $m=0$; при этом под $\bigcap_{i=1}^{m} F_i$ понимается все пространство E.

ется замкнутым полупространством в E'. В силу теоремы 3 и леммы II, достаточно показать, что конус F' от каждой прямой $\Pi(x,y)\subset E'$ содержит по крайней мере один луч. Если бы пересечение конуса F' с прямой $\Pi(x_1,y)$ состояло из одной точки x_1, то нашлась бы точка $y_1\in F'$ такая, что $x_1<_{F'}y_1<_{F'}x_0$(см. рис. 3). А тогда для некоторой точки $x\in M$ имели бы $x_1<_M x<_M x_0$, что противоречит предположению.

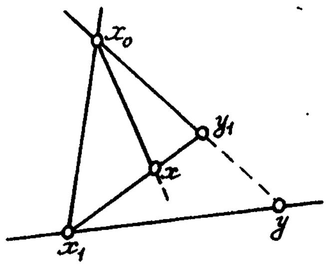


Рис. 3

Рассмотрим все различные замкнутые полупространства $F_i'=K_{x_i}(M)$ (i =I,2,..., m), отвечающие точкам $x_i\in M$, непосредственно предшествующим точке x_0, и покажем, что многогранник $M=\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_i'$.

Действительно, если точка $x\in E'\setminus M$, то на луче $\Lambda(x_0,x)$ имеется точка $x'<_M x_0$. Для нее при некотором $i=i_0$ выполняется соотношение: $x'\leq_M x_{i_0}$ и потому точка $x\bar{\in} F_{i_0}'$. Следовательно, $M\supset\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_i'$. Противоположное включение тривиально.

Гиперплоскости, отвечающие полупространствам F_i' в E', обозначим через H_i' и рассмотрим произвольные гиперплоскости H_i в E, содержащие H_i' и не проходящие через точку $x_0\in M^*$. Для замкнутых полупространств F_i, отвечающих гиперплоскостям H_i и содержащих точку x_0, как легко видеть, имеет место (4).

СЛЕДСТВИЕ I. Если для невырожденного луча $\Lambda(x,y)$ и многогранника M выполняются соотношения

$$x\in M,\ \Lambda(x,y)\subset \text{аф. об. } M,\ \Lambda(x,y)\cap M=\phi,$$

то в представлении (4) многогранника M по крайней мере одно из замкнутых полупространств F_i не имеет общих точек с лучом $\Lambda(x,y)$.

Действительно, в противном случае точки y_n оси $\vec{\Pi}(x,y)$ такие, что $y_{n+1}\prec y_n$, $\inf y_n=x$, при достаточно больших n принадлежали бы всем F_i, а значит, и многограннику M, что противоречит условию.

Непосредственно из доказательства теоремы 10, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Если многогранник M является телесным конусом и L – аффинное многообразие его вершин, то существует конечное число гиперплоскостей H_i и отвечающих им замкнутых полупространств F_i таких, что

$$M=\bigcap_{i=1}^{m} F_i\,,\ L=\bigcap_{i=1}^{m} H_i\,.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Аффинное многообразие $L_x(M)$, отвечающее точке x многогранника M, непосредственно предшествующей точке $y\in M$, является гиперплоскостью в $L_y(M)$.

Отсюда ясно, что при любой точке $x\in M$ аффинное многообразие $L_x(M)$ имеет в E' = аф. об. M конечную дефектную размерность, не превышающую сложность τ многогранника M.

ЛЕММА 12. Если многогранник $M\neq\phi$ не имеет общих точек с гиперплоскостью H, то по крайней мере один из конусов $K_x(M)\in \mathfrak{K}(M)$ также не пересекается с M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E'\cap H=\phi$, где E' = аф. об. M, то условию леммы удовлетворяет любой конус из $\mathfrak{K}(M)$. В частности, это относится к многогранникам M сложности $\tau=0$.

Пусть M имеет сложность $\tau>0$, $E'\cap H\neq\phi$ и для многогранников сложности $\tau'<\tau$ лемма справедлива. Выберем точки $x_0\in M$, $y_0\in E'\setminus M$ такие, что $\Lambda(x_0,y_0)\cap M=\phi$, и гиперплоскость, строго отделяющую указанный луч от M (см. следствие I теоремы 10), обозначим через H_0.

Если $N_0=K_{x_0}(M)\cap H\neq\phi$, то $L_0=H_0\cap H$ является гиперплоскостью в H_0 и не имеет общих точек с многогранником $M_0=M\cap H_0$ сложности $\tau'<\tau$. Поэтому при некоторой точке $x_1\in M_0$

$$K_{x_1}(M_0)\cap L_0=\phi.$$

Если $N_1=K_{x_1}(M)\cap H\neq\phi$, то найдется точка $y_1\in N_1$ такая, что

$$K_{y_1}(N_1)\cap L_0=\phi.$$

Нетрудно видеть, что конус $K_{x_1}(M)$ не содержит точек $(*)$-открытого конуса $K_1=x_1$-кон. об. K_1', где $K_1'=y_1$-кон.об. L_0. Поэтому существует гиперплоскость H_1, строго отделяющая K_1 от $K_{x_1}(M)$. Она, очевидно, проходит через точки x_1,

y_1 и в H_1 гиперплоскость $L_1 = H_1 \cap H$ не имеет общих точек с многогранником $M_1 = M \cap H_1$ сложности $r' > r$. Находим затем точки $x_2 \in M_1$, $y_2 \in N_2 = K_{x_2}(M) \cap H$ такие, что

$$K_{x_2}(M_1) \cap L_1 = \emptyset, \quad K_{y_2}(N_2) \cap L_1 = \emptyset,$$

и рассматриваем гиперплоскость H_2, строго отделяющую от конуса $K_{x_2}(M)$ (*)-открытый конус $K_2 = x_2$-кон.об. K_2', где

$$K_2' = y_2\text{- кон. об. } L_2, \ L_2 = H_2 \cap H, K_2 \supset K_1,$$

и т.д. Этот процесс не может продолжаться неограниченно, так как $\mathfrak{K}(M)$ содержит конечное число различных элементов, а получаемый на шаге i конус $K_{x_i}(M)$ содержит точку y_i, но не содержит точек $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$. С другой стороны, описанный процесс обрывается лишь в случае получения искомого конуса $K_{x_i}(M)$, для которого множество

$$N_i = K_{x_i}(M) \cap H = \emptyset.$$

ТЕОРЕМА II. Если многогранник M не содержит точек произвольного выпуклого множества N, то по крайней мере один из конусов $K_x(M) \in \mathfrak{K}(M)$ не пересекается с N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N' = E' \cap N = \emptyset$, где E'=аф.об. M, утверждение очевидно. Пусть $N' \neq \emptyset$. По теореме 3 в E' существует гиперплоскость H', разделяющая множества M и N'. Если $M \cap H' = \emptyset$, то условию теоремы удовлетворяет существующий в силу леммы 12 конус $K_x(M)$ такой, что

$$K_x(M) \cap H' = \emptyset.$$

Если же $M' = M \cap H \neq \emptyset$, вопрос сводится к многограннику M', сложность которого меньше, чем у исходного. Это позволяет провести индукцию по сложности r многогранника M.

Приведем еще несколько предложений, используемых в следующем параграфе при доказательстве теорем отделимости многогранников.

ЛЕММА 13. Если аффинное многообразие L дефектной размерности 2 не пересекается с многогранником M, то найдется гиперплоскость H, содержащая L и не имеющая общих точек с M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы II, найдется точка $x_0 \in M$ такая, что конус $K_0 = K_{x_0}(M)$ не имеет общих точек с L. Если

$K_0 \subset H_{x_0}$ = аф.об. $(L \cup \{x_0\})$, в качестве искомой может быть принята любая гиперплоскость, содержащая L и не проходящая через точку x_0.

Пусть $x_1 \in K_0 \setminus H_{x_0}$, H_{x_1} = аф. об. $(L \cup \{x_1\})$ и точка y_0 многогранника $M_1 = K_0 \cap H_{x_1}$ выбрана так, что конус $K_{y_0}(M_1)$ не пересекается с L. Тогда, очевидно, и конус $K_1 = K_{y_0}(K_0)$ не имеет общих точек с L. По теореме 6 существует гиперплоскость H, выделяющая K_1 и удовлетворяющая условиям: $L \subset H$, $y \bar{\in} H$. Нетрудно видеть, что $H \cap M = \emptyset$. Действительно, если бы нашлась точка $x \in H \cap M$, то для нее имели бы: $x \geqslant_{K_1} y$. А тогда на прямой $\Pi(y_0, x)$ нашлись бы точки конуса K_1, расположенные по разные стороны от H, что противоречит выбору H.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть конус K является пересечением замкнутых полупространств F_1 и F_2, причем аффинное многообразие его вершин $L = H_1 \cap H_2$, где H_1 и H_2 – гиперплоскости, отвечающие полупространствам F_1 и F_2. Если K не имеет общих точек с многогранником M, то найдется гиперплоскость H, содержащая L и строго отделяющая M от K.

Действительно, если $H_1 \cap M \neq \emptyset$ и $H_2 \cap M \neq \emptyset$, то в качестве H может быть взята гиперплоскость, существование которой доказано в лемме 13.

Аналогичные предложения, связанные с рассмотрением пересекающихся многогранников, доказываются значительно проще, и потому достаточно их перечислить.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если гиперплоскость H выделяет выпуклое множество M и содержит точку $x \in M$, то соответствующая x-грань $F_x(M) \subset H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для выпуклого подмножества P многогранника M множество $F_P(M) = \bigcup_{x \in P} F_x(M)$ совпадает с некоторой гранью $F_{x_0}(M)$, где точка $x_0 \in P$.

ЛЕММА I4. Если многогранники M и N имеют общие точки и $Q = M \cap N$, S = аф. об. $(F_Q(M) \cup F_Q(N))$, то

$$S \cap M = F_Q(M),\ S \cap M = F_Q(N).$$

ЛЕММА I5. Если M и N – многогранники, $Q = M \cap N \neq \emptyset$, x_0 – некоторая точка ядра грани $F_Q(M)$, $Q' = K_{x_0}(M) \cap N$, то

$$F_{Q'}(N) = F_Q(N).$$

ЛЕММА 16. Если аффинное многообразие L дефектной размерности 2 имеет общие точки с многогранником M и $P = L \cap M = F_P(M)$, то существует гиперплоскость H такая, что

$$L \subset H, \ H \cap M = P.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть конус K является пересечением замкнутых полупространств F_1 и F_2, причем аффинное многообразие его вершин $L = H_1 \cap H_2$, где H_1 и H_2 – гиперплоскости, отвечающие F_1 и F_2. Если K пересекается с многогранником M по множеству $P = F_P(M) \subset L$, то существует гиперплоскость H, разделяющая K и M и удовлетворяющая соотношениям

$$L \subset H, \ H \cap M = P.$$

§ 7. Отделимость многогранников

ТЕОРЕМА 12. Если аффинное многообразие $L \neq \phi$ не пересекается с многогранником $M \neq \phi$, то существует гиперплоскость H, содержащая L и строго выделяющая M, т.е. удовлетворяющая условию

$$L \subset H, \ H \cap M = \emptyset. \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы Цорна, в множестве $\mathscr{G}$ аффинных многообразий H, удовлетворяющих (5), имеется по крайней мере один максимальный элемент, который, ввиду леммы 13, является гиперплоскостью.

ТЕОРЕМА 13. Многогранники $M \neq \emptyset$ и $N \neq \emptyset$, не имеющие общих точек, можно строго разделить гиперплоскостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что при любых непересекающихся многогранниках $U \neq \emptyset$ и $V \neq \emptyset$ существует гиперплоскость H, строго отделяющая V от U. Тогда найдутся замкнутые полупространства F_1 и F_2 такие, что

$$M \subset F_1, \ N \cap F_1 = \emptyset, \ N \subset F_2, \ F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

В силу связности пространства, $F_1 \cup F_2 \neq E$ и, следовательно, существует точка $x_0 \bar{\in} F_1 \cup F_2$. А тогда конусы

$$K_1 = x_0\text{-кон.об. } F_1, \quad K_2 = x_0\text{-кон.об. } F_2$$

являются $(*)$-открытыми и не имеют общих точек. Разделяющая их гиперплоскость, очевидно, строго разделяет многогранники M и N.

Если аффинное многообразие $E' =$ аф.об. U не пересекается с многогранником V, то в качестве гиперплоскости, строго отделяющей V от U, может быть принята существующая по теореме I2 гиперплоскость H, содержащая E' и строго выделяющая V. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда многогранник $V' = E' \cap V \neq \phi$. При этом, в силу теоремы II, можно считать, что многогранник U является конусом. На основании следствия 2 теоремы I0 он представим в E' в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} F_i', \tag{6}$$

причем аффинное многообразие его вершин $L = \bigcap_{i=1}^{m} H_i'$, где H_i' - гиперплоскости в E', отвечающие полупространствам F_i'.

Допустим вначале, что $m=1$, т.е. $U = F_1'$ и в E' гиперплоскость $H_1' = L$ строго отделяет V' от U. Тогда гиперплоскость H, содержащая L и строго выделяющая V, одновременно строго отделяет V от U.

Покажем теперь, что общий случай сводится к рассмотренному, т.е. при любом конусе (6) в E' существует гиперплоскость H', содержащая L и строго отделяющая V' от U. При $m=2$ это вытекает из следствия леммы I3. Пусть $m>2$ и при всех $m'<m$ утверждение справедливо. Если полупространство F_1' не имеет общих точек с V', в качестве H' можно взять гиперплоскость H_1'. В противном случае по предположению индукции в E' существует гиперплоскость H_0', содержащая аффинное многообразие $L_0 = \bigcap_{i=2}^{m} H_i'$ и строго отделяющая от конуса $U_0 = \bigcap_{i=2}^{m} F_i'$ многогранник $V'' = F_1 \cap V'$. Соответствующее замкнутое полупространство, содержащее конус U_0, обозначим через F_0' и рассмотрим конус

$$U_1 = F_0' \cap F_1' \supset U_0 \cap F_1' = U.$$

Очевидно, $U_1 \cap V' = F_0' \cap F_1' \cap V' = F_0' \cap V'' = \phi$, и потому в E' существует гиперплоскость H, содержащая аффинное многообразие $L_0 \cap H_1' = \bigcap_{m=1}^{m} H_i' = L$ и строго отделяющая от конуса $U_1 \supset U$ многогранник V', что завершает доказательство теоремы.

Приведенные предложения относились к строгой отделимости. Если аффинное многообразие L и многогранники M и N таковы, что

$$P = L \cap M \neq \emptyset, \quad Q = M \cap N \neq \emptyset,$$

то речь может идти, очевидно, лишь о нестрогой отделимости. На основании замечания I из § 6 условия*)

$$R = \text{аф. об. } (L \cup F_P(M)) \neq E, \tag{7}$$

$$S = \text{аф. об. } (F_Q(M) \cup F_Q(N)) \neq E \tag{8}$$

являются необходимыми для существования гиперплоскости, соответственно, содержащей L и выделяющей M, и для существования гиперплоскости, разделяющей M и N. Справедливы также обратные утверждения.

ТЕОРЕМА I4. При выполнении условия (7) существует гиперплоскость H, содержащая L и выделяющая M, причем такая, что

$$H \cap M = F_P(M).$$

ТЕОРЕМА I5. При выполнении (8) существует гиперплоскость H, разделяющая M и N, причем такая, что

$$H \cap M = F_Q(M), \quad H \cap N = F_Q(N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I4. Если $F_Q(M) = M$, то в качестве искомой может быть взята любая гиперплоскость H, содержащая R. В противном случае аффинное многообразие R не имеет общих точек с $M' = M \setminus F_P(M) \neq \emptyset$ (лемма I4). В множестве $\mathcal{Y}$ аффинных многообразий H, удовлетворяющих условию

$$R \subset H, \quad H \cap M' = \emptyset,$$

имеется по крайней мере один максимальный элемент, который, ввиду леммы I6, является гиперплоскостью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I5. На основании леммы I4

---

*) Здесь, как и выше, под $F_P(M)$ понимается $\bigcup_{x \in P} F_x(M)$.

$$S \cap M = F_a(M),\ S \cap N = F_a(N).$$

Если $F_a(M)=M$ или $F_a(N)=N$, существование искомой гиперплоскости следует из предыдущей теоремы. В противном случае, когда

$$M' = M \setminus F_a(M) \neq \emptyset,\ N' = N \setminus F_a(N) \neq \emptyset,$$

достаточно показать существование гиперплоскостей H_1 и H_2 таких, что H_1 строго отделяет N' от M, а H_2 строго отделяет M' от N. Действительно, если такие гиперплоскости существуют и ни одна из них не удовлетворяет условиям теоремы, т.е. $H_1 \cap M' \neq \emptyset$ и $H_2 \cap N' \neq \emptyset$, в качестве искомой может быть взята гиперплоскость H, содержащая аффинное многообразие $H_1 \cap H_2$ (дефектной размерности 2) и произвольную точку z открытого отрезка $O(x,y)$, соединяющего точки $x \in H_1 \cap M'$ и $y \in H_2 \cap N'$.

Существование указанных гиперплоскостей проверяется с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше в теореме 13 при доказательстве возможности строгого отделения многогранника $V \neq \emptyset$ от многогранника $U \neq \emptyset$, не имеющего с V общих точек. Это позволяет здесь эти рассуждения опустить, указав лишь, что вместо теорем 12, 11 и следствия леммы 13 в данном случае используется теорема 14, лемма 15 и следствие леммы 16.

§ 8. Дополнительные замечания относительно обобщенных векторных пространств

Очевидными примерами о. в. пространств являются:

1. Обычные векторные пространства E, в которых под осью $\Pi(x,y)$ понимается упорядоченное по возрастанию параметра t множество точек $z = x + t(y-x)$, где $t \in (-\infty, +\infty)$.

2. Произвольные выпуклые $(*)$-открытые подмножества G векторного пространства E, в которых осями служат упорядоченные, как и в пункте 1, множества $\Pi(x,y) = G \cap \{x + t(y-x)\}_{t \in (-\infty,+\infty)}$.

3. Пространства абсолютной геометрии, удовлетворяющие всем аксиомам Гильберта [36], за исключением аксиомы параллельности.

Последний пример, как известно, укладывается в рамки предыдущего, так как пространства абсолютной геометрии и некоторые выпуклые $(*)$-открытые подмножества векторного пространства соответствующей размерности как о. в. пространства, между собой изоморфны. Возникает вопрос, не носит ли отмеченный факт более общий характер. Изучению этого вопроса и посвящен настоящий параграф.

В произвольном о. в. пространстве E ядро Q каждого относительно телесного выпуклого множества можно, очевидно, рассматривать как самостоятельное о. в. пространство, принимая в качестве его осей расположенные в нем части соответствующих осей из E. Такие пространства будем обозначать через Q_E. Исходное о. в. пространство E считается расширением пространств Q_E, а также любых изоморфных им о. в. пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. О. в. пространство E называется **эвклидовым** (э. о. в. пространством), если для каждой невырожденной прямой Π и точки $x \bar{\in} \Pi$ имеется одна и только одна невырожденная прямая Π', удовлетворяющая условиям

$$x \in \Pi', \quad \Pi' \subset \text{аф. об. } (\Pi \cup \{x\}), \quad \Pi' \cap \Pi = \emptyset.$$

При этом прямые Π и Π' называются **параллельными**.

ЗАМЕЧАНИЕ. Новым здесь является лишь требование единственности, так как существование указанной прямой в произвольном о. в. пространстве следует из предыдущего (например, из теоремы 12).

ТЕОРЕМА 16. Фактор-пространство G/L полупространства G по аффинному многообразию L (см. стр. 26) всегда является э. о. в. пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если невырожденная прямая $\Pi(X_1, X_2)$ в G/L не проходит через X_3, то из всех невырожденных прямых

$$\Pi(X_3, X_4) \subset \text{аф. об. } \{X_1, X_2, X_3\}$$

не имеет общих элементов с прямой $\Pi(X_1, X_2)$, очевидно, только одна прямая, для которой $L_{X_3 X_4} =$ аф.об. $(L_{X_1 X_2} \cap H)$, где H - граничная гиперплоскость полупространства G.

ТЕОРЕМА 17. В произвольном о. в. пространстве E каждое аффинное многообразие $E' \neq E$, рассматриваемое как самостоятельное о. в. пространство, допускает расширение до э.о.в. пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 12 через точку $x_0 \in E \setminus E'$ можно провести гиперплоскость H, строго выделяющую E'. Отвечающее H открытое полупространство, содержащее E', обозначим через G и рассмотрим фактор-пространство G/L, где в качестве L принято аффинное многообразие, состоящее из одной точки x_0. Нетрудно проверить, что при каноническом отображении полупространства G в э. о. в. пространство G/L образом аффинного многообразия E' служит (*)-открытое в своей аффинной оболочке выпуклое множество Q, причем различным точкам $x_1, x_2 \in E'$ отвечают различные элементы в Q. Таким образом, о. в. пространства E'_E и $Q_{G/L}$ между собой изоморфны.

Покажем теперь, что в доказанной теореме условие $E' \neq E$ является существенным. Для этого прежде всего докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 18. В двумерном о. в. пространстве E, допускающем расширение до евклидова, определенное выше отношение параллельности лучей является симметричным, т.е. из параллельности луча $\Lambda(v, v')$ к лучу $\Lambda(u, u')$ следует параллельность луча $\Lambda(u, u')$ к лучу $\Lambda(v, v')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения, о. в. пространство E можно рассматривать как выпуклое (*)-открытое подмножество некоторого э. о. в. пространства E_1. Прямые, отрезки и лучи в последнем будем обозначать через $\Pi_{E_1}(x, y)$, $O_{E_1}(x, y)$ и $\Lambda_{E_1}(x, y)$, оставляя старые обозначения для подобных образований в о. в. пространстве E.

Предположим вначале, что луч $\Lambda(u, u') \neq \Lambda_{E_1}(u, u')$, т.е.

$$\Lambda(u, u') = O_{E_1}(u, u_0),$$

где u_0 - некоторая точка луча $\Lambda_{E_1}(u, u')$. На основании леммы 6 отрезок $O_{E_1}(v, u_0) \subset E$ и, следовательно, является в E лучом с вершиной v. Этот луч, как нетрудно проверить, должен быть параллельным к лучу $\Lambda(u, u')$ и потому совпадает с $\Lambda(v, v')$. В силу аксиомы Паша, при любой точке $w \in O_{E_1}(u', v') = O(u', v')$ луч $\Lambda_{E_1}(u, w)$ пересекается с отрезком $O_{E_1}(v, u_0) = \Lambda(v, v')$ (см. рис. 4), откуда следует параллельность луча $\Lambda(u, u')$ лучу $\Lambda(v, v')$.

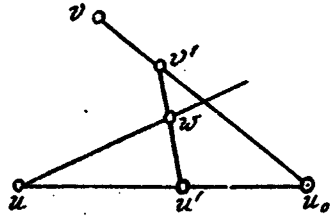


Рис. 4

Остается рассмотреть случай, когда луч $\Lambda(u,u')=\Lambda_{E_1}(u,u')$. Тогда, очевидно,

$$\Lambda_{E_1}(u,u')\cap\Lambda_{E_1}(v,v')=\emptyset$$

и луч $\Lambda_{E_1}(v,v')$ параллелен лучу $\Lambda_{E_1}(u,u')$. А в э. о. в. пространстве отношение параллельности лучей, как нетрудно видеть, является симметричным. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что луч $\Lambda(v,v')=\Lambda_{E_1}(v,v')$. Последнее следует из того, что, каковы бы ни были точки $x\in\Lambda_{E_1}(v,v')$ и $y\in\in\bar{\Lambda}(v,u)$, луч $\bar{\Lambda}_E(x,y)$ имеет общую точку с лучом $\Lambda_{E_1}(u,u')=\Lambda(u,u')$. А тогда на основании выпуклости E в E_1 точка $x\in O_E(y,z)\subset E$ и, следовательно, лежит на луче $\Lambda(v,v')$.

Приведем теперь простой пример двумерного о. в. пространства, не допускающего расширения до эвклидова.

ПРИМЕР. На обычной плоскости рассмотрим множество точек

$$E=\{x=(\xi,\eta):0<\xi<1,\ 0<\eta<1\}.$$

В качестве прямых $\Pi(x_1,x_2)$, проходящих через точки $x_1=(\xi_1,\eta_1)$ и $x_2=(\xi_2,\eta_2)$, примем расположенные в E части линий, имеющих следующие уравнения:

$$\xi=\xi_1,\quad \text{если}\quad \xi_1=\xi_2,$$

$$\eta=\frac{\eta_2-\eta_1}{\xi_2-\xi_1}\xi+\frac{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2}{\xi_2-\xi_1},\quad\text{если}\quad \frac{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2}{\xi_2-\xi_1}\geqslant 0,$$

$$\eta=\frac{(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\xi^2+(\xi_2^2\eta_1-\xi_1^2\eta_2)\xi}{\xi_1\xi_2(\xi_2-\xi_1)},\quad\text{если}\quad \frac{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

Соответствующие этим "прямым" оси $\vec{\Pi}(x_1,x_2)$ получаются путем упорядочения точек $x\in\Pi(x_1,x_2)$ по возрастанию ξ, если $\xi_1<\xi_2$, по убыванию ξ, если $\xi_1>\xi_2$, по возрастанию η, если

$\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 < \eta_2$, по убыванию η, если $\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 > \eta_2$. При этом, как нетрудно проверить, выполнены все аксиомы о. в. пространства. Вместе с тем изображенные на рис. 5 лучи

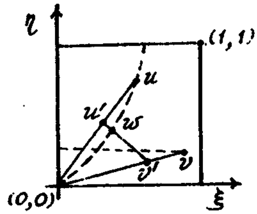


Рис. 5

$\Lambda(u,u')$ и $\Lambda(v,v')$ таковы, что луч $\Lambda(v,v')$ параллелен лучу $\Lambda(u,u')$, но луч $\Lambda(u,u')$ не является параллельным лучу $\Lambda(v,v')$. В силу теоремы 18, рассматриваемое о. в. пространство нельзя расширить до эвклидова.

ГЛАВА II

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

§ I. Линейное программирование*)

В линейной алгебре основным объектом исследования служат аффинные многообразия L из R^n. Каждое из них может быть задано системой линейных уравнений:

$$L = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \ldots, m\},$$

а также параметрически:

$$L = \{x \in R^n : x = x^0 + \sum_{k=1}^{r} c_k x^k\},$$

где x^k - фиксированные элементы R^n, c_k - произвольные вещественные числа. При решении конкретных вопросов существенное значение имеет способ задания рассматриваемых множеств. Например, чтобы выяснить, принадлежит ли некоторая точка x аффинному многообразию L, последнее желательно иметь в первой форме, а при решении вопроса о том, содержится ли аффинное многообразие L в гиперплоскости H, определяемой уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b,$$

L удобно иметь во второй форме. Тем не менее концентрировать внимание на указанном факте в линейной алгебре не приходится, так как существуют эффективные приемы перехода от одной формы задания аффинного многообразия к другой.

С иным положением мы сталкиваемся при расширении объектов исследования до произвольных выпуклых замкнутых многогранных множеств из R^n, которые для краткости в дальнейшем именуются просто **многогранниками**. Каждый многогранник $M \subset R^n$ может задаваться системой линейных неравенств:

---

*) Этот параграф представляет несколько расширенное изложение доклада, прочитанного автором в мае 1960 года на V Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре.

$$M=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i,\ i=1,2,\ldots,m\},$$

а также параметрически:

$$M=\{x\in R^n:\ x=\sum_{k=1}^{r}c_k x^k\},$$

где x^k – фиксированные элементы R^n, $r=r_1+r_2+r_3$ $(r_1\geq 0,$ $r_2\geq 0,\ r_3>0)$, $c_1, c_2,\ldots,c_{r_1}$ – произвольные вещественные числа, $c_k\geq 0$ $(k=r_1+1, r_1+2,\ldots,r)$, $\sum_{k=1}^{r_3}c_{r_1+r_2+k}=1$. Однако переход от одной из этих форм к другой, как правило, сопряжен с непреодолимыми вычислительными трудностями. В связи с этим для анализа и эффективного решения задач относительно многогранников возникла необходимость в разработке специальных методов, не требующих перехода от одной формы задания многогранника к другой. Это и составляет предмет **линейного программирования**.

В линейном программировании в качестве основной обычно рассматривается следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА I. Определить вектор

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_m), \tag{1}$$

максимизирующий функцию

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i \tag{2}$$

при ограничениях:

$$x_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

$$a_{ij}x_i\leq b_j,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

где a_{ij}, b_j, c_i – заданные вещественные числа.

Эта задача легко приводится к виду задач, рассмотренных во введении. Достаточно в R^{n+1} выбрать элементы

$$a^i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in},c_i),\ i=1,2,\ldots,m,$$

$$e^j=(\overbrace{0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots,0),\ j=1,2,\ldots,n+1,$$

$$b^0=(b_1,b_2,\ldots,b_n,0),$$

отвечающие числовым данным задачи I, и рассмотреть множества

$$A=\{a\in R^{n+1}: a=\sum_{i=1}^{m} x_i a^i+\sum_{j=1}^{n} x_{m+j} e^j, x_i\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,m+n\},$$

$$B_t=\{b\in R^{n+1}: b=b^0+t'e^{n+1}, t'\in[t,+\infty)\}, t\in R=(-\infty,+\infty),$$

$$B=\bigcup_{t\in R} B_t=\{b\in R^{n+1}: b=b^0+te^{n+1}, t\in R\}.$$

Допустим, что точка $a\in A\cap B$, т.е. представима в виде:

$$a=\sum_{i=1}^{m} x_i a^i+\sum_{j=1}^{n} x_{m+j} e^j=b^0+te^{n+1}, x_i\geqslant 0 (i=1,2,\ldots,m+n). \quad (5)$$

Соответствующий вектор (I), очевидно, удовлетворяет условиям (3, 4) и функция (2) на этом векторе принимает значение $\mu(x)=t$. Наоборот, если вектор (I) удовлетворяет (3, 4), то, принимая

$$x_{m+j}=b_j-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, j=1,2,\ldots,n, t=\mu(x),$$

приходим к соотношению типа (5), т.е. к некоторой точке $a\in A\cap B$. Отсюда вытекает следующая

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ. Среди допустимых элементов $a\in A\cap B$ найти оптимальный, для которого достигает максимума величина

$$\mu(a)=\sup\{t: a\in A\cap B_t\}.$$

Анализ этой задачи проводится по общей схеме, намеченной во введении. Через E^* обозначим множество однородных замкнутых полупространств F таких, что

$$F\cap B\neq\phi, \quad (6)$$

и рассмотрим его подмножества .

$$B_t^*=\{F\in E^*: B_{t'}\cap F=\phi, t'\in(t,+\infty)\}, t\in R,$$

$$B^*=\bigcup_{t\in R} B_t^*, A^*=\{F\in F^*: A\subset F\},$$

которые фигурируют в формулировке двойственной задачи.

ЗАДАЧА I'. Среди допустимых элементов $F\in A^*\cap B^*$ найти оптимальный, для которого достигает минимума величина

$$\nu(F)=\inf\{t: F\in A^*\cap B_t^*\}. \quad (7)$$

Каждое однородное замкнутое полупространство F в R^{n+1} может быть задано неравенством:

$$F=\{a=(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}):\sum_{j=1}^{n+1} z_j a_j \geq 0\},$$

где z_j – фиксированные вещественные числа. Учитывая (6), нетрудно проверить, что для полупространств $F\in B^*$ (и только для них) соответствующие коэффициенты $z_{n+1}<0$. Следовательно, отвечающие этим полупространствам неравенства делением на $|z_{n+1}|$ приводятся к виду:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_j \geq a_{n+1}. \tag{8}$$

Далее, в A^* входят те и только те полупространства F, задаваемые неравенствами (8), которые содержат точки $e^1, e^2,\ldots, e^n$, $a^1, a^2,\ldots, a^n$, т.е. удовлетворяющие условиям:

$$y_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geq c_i,\ i=1,2,\ldots,m. \tag{10}$$

При этом соответствующая величина (7), как нетрудно видеть, совпадает с

$$v(y)=\sum_{j=1}^{n} b_j y_j. \tag{11}$$

Отсюда ясно, что задача I$'$ эквивалентна следующей.

ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ I$'$. При числовых данных задачи I определить вектор

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n), \tag{12}$$

минимизирующий функцию (II) при ограничениях (9, 10).

ЛЕММА I. Каковы бы ни были вещественные числа

$$a_{ij}, b_j, c_i,\ i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n,$$

для задач I и I$'$ имеем:

I^0. Если, по крайней мере, в одной из задач существует допустимый элемент и $A\cap B_t=\phi$, то $A^*\cap B^*_t\neq\phi$.

2^0. Если $A\cap B_{t'}\neq\phi$ при всех $t'<t$, то $A\cap B_t\neq\phi$.

3^0. Если $A^* \cap B^*_{t'} \neq \emptyset$ при всех $t' > t$, то $A^* \cap B^*_t \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \cap B_t = \emptyset$. По теореме 13 § 7 главы I существует гиперплоскость, строго разделяющая многогранники A и B_t, т.е. при некотором векторе $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ и числе c имеем:

$$(z, a) > c \text{ для } a \in A, \ (z, b) < c \quad \text{для } b \in B_t .$$

Отсюда, используя определения множеств A и B_t, получаем:

$$c \leq 0, (z, a) \geq 0 \text{ при } a \in A, (z, b) < 0 \text{ при } b \in B_t, \ z_{n+1} \leq 0 .$$

Если коэффициент $z_{n+1} < 0$, что, в частности, всегда имеет место при $A \cap B \neq \emptyset$ (когда в задаче I существует допустимый элемент), то множество $A^* \cap B^*_t$ содержит полупространство F, определяемое неравенством $(z, a) \geq 0$. В противном случае найдется полупространство $F_0 \in A^* \cap B^*$, так как по условию в одной из задач допустимый элемент существует. Пусть это полупространство задается неравенством

$$(z^0, a) \geq 0.$$

Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полупространство F_1, определяемое неравенством $(z + \varepsilon z_0, a) \geq 0$, содержится в $A^* \cap B^*_t$, т.е. это множество опять-таки не пустое, что завершает доказательство первого утверждения.

Второе утверждение почти очевидно. Действительно, если при некотором $t' < t$ множество $A \cap B_{t'}$ неограниченное, то A содержит точки $b^0 + te^{n+1}$, отвечающие сколь угодно большим t, и, следовательно, $A \cap B_t \neq \emptyset$. Если же множества $A \cap B_{t'}$ ограниченные, то, ввиду их замкнутости и упорядоченности (по включению), пересечение этих множеств по $t' < t$ не пустое. С другой стороны,

$$\bigcap_{t'<t} (A \cap B_{t'}) = A \cap (\bigcap_{t'<t} B_{t'}) = A \cap B_t .$$

Последнее утверждение леммы может быть проверено непосредственно с помощью соответствующих теорем отделимости. Однако представляет методологический интерес сведение этого утверждения к предыдущему. Достаточно заметить, что задачи I и I$'$ одного и того же типа. Полагая

$$m' = n,\ n' = m,\ a'_{ij} = -a_{ji},\ b'_j = -c_j,\ c'_i = -b_i \ (i = 1, \ldots, m',\ j = 1, \ldots, n'),$$

приходим к новым задачам I и I$'$, эквивалентным старым задачам

I' и I. При этом утверждение 3^0 относительно старой задачи I' превращается в утверждение 2^0 относительно новой задачи I.

На основании доказанной леммы можно утверждать, что для рассматриваемых задач I и I' справедлива теорема двойственности, а также вытекающие из нее теорема существования и признак оптимальности. Формулировки соответствующих предложений были даны во введении и потому здесь не приводятся.

ЗАМЕЧАНИЕ. При использовании признака оптимальности полезно иметь в виду, что для векторов (I) и (I2), удовлетворяющих соответственно ограничениям (3, 4) и (9, 10), тогда и только тогда имеет место равенство $\mu(x)=\nu(y)$, когда

а) для каждого $i = 1,2,\ldots, m$ достигается равенство по крайней мере в одном из неравенств условий (3) и (10);

б) для каждого $j = 1,2,\ldots, n$ достигается равенство по крайней мере в одном из неравенств условий (4) и (9).

Это утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств

$$\mu(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\Big)x_i = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i\Big)y_j \leq \sum_{j=1}^{n} b_j y_j = \nu(y).$$

Формально задачи линейного программирования всегда могут быть сведены к виду задач I и I'. Однако при этом размерность задач, определяемая числом переменных и ограничений, существенно повышается. В связи с этим при разработке численных методов решения задач большого объема оказывается целесообразным непосредственное рассмотрение различных типов задач линейного программирования. Так, в § I Приложения приведены задачи, в которых переменные и ограничения разбиваются на три группы: переменные первой группы принимают произвольные вещественные значения, переменные второй группы - неотрицательные, переменные третьей группы изменяются в заданных замкнутых интервалах, первая группа ограничений задается в форме уравнений, вторая - в форме неравенств, третья группа ограничений, заданная в форме неравенств, вообще говоря, может нарушаться, но при этом величина максимизируемой (минимизируемой) функции уменьшается (увеличивается). Эти задачи укладываются в рассматриваемую схему, если в R^{n+1} выделить элементы:

$$a^i=(a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{in}, c_i),\ i\in M,$$
$$e^j=(\overbrace{0,\ldots,0,1}^{j}, 0,\ldots,0),\ j\in N_1,$$

$$f^j = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0),\ j \in N_3,$$

$$b^0 = (b_1, b_2, \dots, b_n, 0)$$

и положить, как и выше,

$$B_t = \{b \in R^{n+1} : b = b^0 + t' e^{n+1},\ t' \in [t, +\infty)\},\ t \in R,$$

а в множество A включить точки, представимые в виде:

$$a = \sum_{i \in M} x_i a^i + \sum_{j \in N_2 \cup N_3} x_{m+j} e^j + \sum_{j \in N_3} x'_{m+j} f^j,$$

где

$$x_i \in \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{для } i \in M_1, \\ [0, +\infty) & \text{для } i \in M_2, \\ [0, g_i] & \text{для } i \in M_3, \end{cases}$$

$$x_{m+j} \geqslant 0, \quad x'_{m+j} \geqslant 0.$$

В [46] и четвертом параграфе Приложения изучается задача, состоящая в разыскании крайней точки пересечения оси

$$B = \{b \in R^n : b = b^0 + t b^1,\ t \in R\},$$

где b^0, b^1 – ненулевые элементы R^n, с многогранником

$$A = \{a \in R^n : a = \sum_{k=1}^{p} a^k,\ a^k \in A_k,\ k = 1, 2, \dots, p\},$$

представляющим алгебраическую сумму многогранников A_k. Последние задаются параметрически с дополнительными линейными ограничениями на коэффициенты:

$$A_k = \{a \in R^n : a = \sum_{i=1}^{m_k} x_{ik} a^{ik},\ x_{ik} \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m_k} d_{ikj} x_{ik} = b_{kj}, j = 1, \dots, n_k\},$$

где a^{ik} – фиксированные элементы R^n, d_{ikj}, b_{kj} – заданные вещественные числа.

По общей схеме строится

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА. В R^n определить вектор y, минимизирующий функцию

$$\nu(y)=\sum_{k=1}^{p}\max_{a\in A_k}(a,y)-(b^0,y)$$

при условии $(b^1,y)=1$.

Сформулированные задачи, как и предыдущие, формально могут быть сведены к задачам типа I и I′. Однако выделение этого класса задач позволяет получить значительные преимущества при реализации общих алгорифмов линейного программирования (см. Приложение, § 4).

§ 2. Некоторое обобщение*)

Рассмотрим два множества индексов

$$M=\{1,2,\dots,m\},\quad N=\{1,2,\dots,n\},$$

каждое из которых разбито на три непересекающихся подмножества, содержащих соответственно m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 элементов

$$M=M_1\cup M_2\cup M_3,\quad N=N_1\cup N_2\cup N_3.$$

При этом предполагается, что

$$m_1+m_2>0,\ m_3>0,\ n_1+n_2>0,\ n_3>0.$$

Нас будет интересовать следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА II. При заданных вещественных числах

$$a_{ij}\ (i\in M,\ j\in N),\ a_{ij}>0\ (i\in M_3,\ j\in N_3)$$

определить вектор

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_m),\tag{13}$$

максимизирующий функцию

$$\mu(x)=\min_{j\in N_3}\frac{\sum\limits_{i\in M_1\cup M_2}a_{ij}x_i}{\sum\limits_{i\in M_3}a_{ij}x_i}\tag{14}$$

*) Этот параграф представляет изложение части доклада, прочитанного автором в октябре 1959 года на Первой межвузовской конференции по конструктивной теории функций (см. [53]).

при ограничениях:

$$x_i \geqslant 0,\ i \in M_2 \cup M_3,\ \sum_{i\in M_3} x_i = 1, \tag{15}$$

$$\sum_{i\in M} a_{ij} x_i \begin{cases} = 0 & \text{для } j \in N_1, \\ \geqslant 0 & \text{для } j \in N_2. \end{cases} \tag{16}$$

Эта задача при $m_3 = 1$ (или $n_3 = 1$) представляет одну из форм основной задачи линейного программирования, которая возникает в математической экономике при планировании комплексного выпуска продукции (см., напр., [28]). Однако <u>в общем случае задача II к линейному программированию не сводится</u>.

Исследование поставленной задачи проводится по общей схеме. Для перевода задачи на геометрический язык в R^n выделим элементы

$$a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ i \in M_1 \cup M_2,$$

$$e^j = (\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{j}, 0, \ldots, 0),\ j \in N_2 \cup N_3,$$

$$b^{it} = (b^t_{i1}, b^t_{i2}, \ldots, b^t_{in}),\ i \in M_3,\ t \in R = (-\infty, +\infty),$$

где

$$b^t_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{для } j \in N_1 \cup N_2, \\ t a_{ij} & \text{для } j \in N_3, \end{cases}$$

и рассмотрим множества:

$$A = \{a \in R^n : a = \sum_{i\in M_1 \cup M_2} x_i a^i,\ x_i \in R \text{ при } i \in M_1,\ x_i \geqslant 0 \text{ при } i \in M_2\},$$

$$B_t = \{b \in R^n : b = \sum_{i \in M_3} x_i b^{it} + \sum_{j\in N_2 \cup N_3} x_{m+j} e^j,\ x_i \geqslant 0,\ x_{m+j} \geqslant 0,\ \sum_{i\in M_3} x_i = 1\},$$

$$B = \bigcup_{t\in R} B_t.$$

Если точка $a \in A \cap B$, т.е. представима в виде:

$$a = \sum_{i\in M_1 \cup M_2} x_i a^i = \sum_{i\in M_3} x_i b^{it} + \sum_{j\in N_2 \cup N_3} x_{m+j} e^j, \tag{17}$$

$x_i \geqslant 0$ при $i \in M_2 \cup M_3$ и при $i > m$, $\sum_{i\in M_3} x_i = 1$, то соответствующий вектор (13) удовлетворяет условиям (15,16) и функция (14) на этом векторе принимает значение $\mu(x) \geq t$. Наоборот, если вектор (13) удовлетворяет (15,16), то, принимая

$$t = \mu(x),\ x_{m+j} = \sum_{i \in M} a_{ij} x_i \ (j \in N_2),$$

$$x_{m+j} = \sum_{i \in M_1 \cup M_2} a_{ij} x_i - t \sum_{i \in M_3} a_{ij} x_i \ (j \in N_3),$$

приходим к соотношению типа (17), т.е. к некоторой точке $a \in A \cap B$.

Отсюда ясно, что геометрическая формулировка задачи II совпадает с приведенной в предыдущем параграфе для задачи I.

По общей схеме строится двойственная задача II$'$. Геометрическая формулировка ее опять-таки совпадает с приведенной выше для задачи I$'$. При этом множества E^*, A^*, B_t^*, B^* формально определяются так же. Только иной смысл здесь имеют исходные множества A, B_t и B.

Учитывая (6) и определение множеств B_t, нетрудно проверить, что неравенство $(z, a) \leq 0$, где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ - фиксированный вектор, тогда и только тогда задает полупространство $F \in B^*$, когда

$$z_j \geq 0,\ j \in N_2 \cup N_3,\ \sum_{j \in N_3} z_j > 0.$$

Это означает, что соответствующие неравенства могут быть приведены к виду:

$$(y, a) \leq 0,$$

где вектор

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{18}$$

удовлетворяет условию:

$$y_j \geq 0,\ j \in N_2 \cup N_3,\ \sum_{j \in N_3} y_j = 1. \tag{19}$$

Далее, по определению в A^* входят полупространства $F \supset A$, т.е. содержащие точки $a^i (i \in M_1 \cup M_2)$ и $-a^i (i \in M_1)$. Поэтому отвечающие им векторы (18) удовлетворяют также условию:

$$\sum_{j\in N} a_{ij} y_j \quad \begin{cases} = 0 & \text{для } i \in M_1, \\ \le 0 & \text{для } i \in M_2. \end{cases} \tag{20}$$

При этом величина $\nu(F)$, определяемая по формуле (7), совпадает со значением функции

$$\nu(y) = \max_{i\in M_3} \frac{\sum_{j\in N_1\cup N_2} a_{ij} y_j}{\sum_{j\in N_3} a_{ij} y_j}. \tag{21}$$

Таким образом, задача П$'$ допускает следующую аналитическую формулировку.

ЗАДАЧА П$'$. При числовых данных задачи П определить вектор (18), минимизирующий функцию (21) при ограничениях (19, 20).

ЛЕММА 2. Каковы бы ни были исходные данные, для задач П и П$'$ справедливы утверждения 1^0, 2^0 и 3^0 леммы 1 предыдущего параграфа.

Доказательство, в принципе, не отличается от проведенного выше для случая задач I и I$'$. Если $A \cap B_t = \emptyset$, то с помощью теоремы 13 главы I строится полупространство F, задаваемое неравенством

$$(z, a) \le 0,$$

где вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ удовлетворяет условию:

$$(z, a) \le 0 \text{ для } a \in A, \quad (z, b) > 0 \quad \text{для } b \in B_t.$$

При этом, в силу определения множества B_t, имеем:

$$z_j \ge 0, \quad j \in N_3.$$

Если $\sum_{j\in N_3} z_j > 0$, что всегда имеет место, когда в задаче П существует допустимый вектор, то построенное полупространство $F \in A^* \cap B_t^*$. В противном случае с помощью элемента $F_0 \in A^* \cap B^*$ точно так же, как в доказательстве леммы 1, строится полупространство $F_1 \in A^* \cap B_t^*$.

Для проверки утверждения 2^0 рассмотрим последовательность чисел t_κ, сходящуюся к t. Если множества

$$A \cap B_{t_\kappa} \neq \phi,$$

то найдутся $x_i^\kappa \geq 0$ такие, что $\sum_{i\in M_3} x_i^\kappa = 1$ и точки

$$b^\kappa = \sum_{i\in M_3} x_i^\kappa b^{it_\kappa}$$

содержатся в конусе

$$K = \{a \in R^n : a = \sum_{i\in M_1 \cup M_2} x_i a^i - \sum_{j\in N_2 \cup N_3} x_{m+j} e^j, x_i \geq 0 (i \in M_2), x_{m+j} \geq 0$$
$$(j \in N_2 \cup N_3)\}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что при каждом $i \in M_3$, последовательность x_i^κ сходится к некоторому x_i. Тогда

$$x_i \geq 0 \ (i \in M_3), \ \sum_{i\in M_3} x_i = 1$$

и конус K, ввиду замкнутости, содержит точку

$$b = \sum_{i\in M_3} x_i b^{it} = \lim_{\kappa\to\infty} b^\kappa.$$

А это означает, что $A \cap B_t \neq \phi$.

Последнее утверждение 3^0, как и в лемме I, сводится к предыдущему. Достаточно заметить, что задачи типа П и П$'$, возникающие при

$$M' = N, \ N' = N, \ M'_\kappa = N_\kappa, \ N'_\kappa = M_\kappa \ (\kappa = 1,2,3),$$

$$a'_{ij} \begin{cases} a_{ji} & \text{при } i \in M'_3, \ j \in N'_3, \\ -a_{ji} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

эквивалентны старым задачам П$'$ и П.

На основании леммы 2 можно утверждать, что для задач П и П$'$ справедливы теорема двойственности, теорема существования и признак оптимальности, приведенные во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ. При использовании признака оптимальности полезно иметь в виду, что для векторов (I3) и (I8), удовлетворяющих соответственно ограничениям (I5,I6) и (I9,20), тогда и только тогда имеет место равенство $\mu(x)=\nu(y)$, когда в каждой из следующих пар неравенств, по крайней мере, в одном достигается равенство:

$$x_i \geq 0,\ \sum_{j\in N} a_{ij} y_j \leq 0,\ i\in M_2,$$

$$x_i \geq 0,\ \sum_{j\in N_1\cup N_2} a_{ij} y_j \leq \nu(y)\sum_{j\in N_3} a_{ij} y_j,\ i\in M_3,$$

$$y_j \geq 0,\ \sum_{i\in M} a_{ij} x_i \geq 0,\ j\in N_2,$$

$$y_j \geq 0,\ \sum_{i\in M_1\cup M_2} a_{ij} x_i \geq \mu(x)\sum_{i\in M_3} a_{ij} x_i,\ j\in N_3.$$

Это утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\mu(x)\cdot\sum_{i\in M_3, j\in N_3} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j\in N_3}\Big(\mu(x)\sum_{i\in M_3} a_{ij} x_i\Big) y_j \leq$$

$$\leq \sum_{j\in N_3}\Big(\sum_{i\in M_1\cup M_2} a_{ij} x_i\Big) y_j = \sum_{i\in M_1\cup M_2} x_i \sum_{j\in N_3} a_{ij} y_j \leq$$

$$\leq \sum_{i\in M_1\cup M_2} x_i\Big(-\sum_{j\in N_1\cup N_2} a_{ij} y_j\Big) = \sum_{j\in N_1\cup N_2}\Big(-\sum_{i\in M_1\cup M_2} a_{ij} x_i\Big) y_j \leq$$

$$\leq \sum_{j\in N_1\cup N_2}\Big(\sum_{i\in M_3} a_{ij} x_i\Big) y_j = \sum_{i\in M_3} x_i \sum_{j\in N_1\cup N_2} a_{ij} y_j \leq$$

$$\leq \sum_{i\in M} x_i\Big(\nu(y)\sum_{j\in N_3} a_{ij} y_j\Big) = \nu(y)\cdot\sum_{i\in M_3, j\in N_3} a_{ij} x_i y_j .$$

§ 3. Задача максимизации произведения линейных функций

Здесь изучается следующая экстремальная задача.

ЗАДАЧА III. При заданных вещественных числах

$$a_{ij}\ (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n+p),\ b_j\ (j=1,2,\ldots,n) \tag{22}$$

определить вектор

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{23}$$

максимизирующий функцию

$$\mu(x)=\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+k}x_i\right) \qquad (24)$$

при ограничениях:

$$x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\ldots,m, \qquad (25)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i=b_j,\ j=1,2,\ldots,n, \qquad (26)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+k}x_i>0,\ k=1,2,\ldots,p. \qquad (27)$$

В R^{n+p} выделим точки

$$a^i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{i,n+p}),\ i=1,2,\ldots,m, \qquad (28)$$

$$e^j=(\overbrace{0,\ldots,0,1}^{j},0,\ldots,0),\ j=n+1,n+2,\ldots,n+p, \qquad (29)$$

$$b^0=(b_1,b_2,\ldots,b_n,0,\ldots,0) \qquad (30)$$

и рассмотрим множества:

$$A=\left\{a\in R^{n+p}: a=\sum_{i=1}^{m}x_i a^i,\ x_i\geqslant 0\right\},$$

$$B_t=\left\{b\in R^{n+p}: b=b^0+\sum_{k=1}^{p}u_k e^{n+k},\ u_k>0,\ \prod_{k=1}^{p}u_k\geqslant t\right\},$$

$$B=\bigcup_{t\in(0,+\infty)} B_t.$$

Нетрудно видеть, что при таком определении множеств A, B_t и B геометрическая формулировка задачи III совпадает с приведенной выше для задач I и II (см. § I).

Геометрическая формулировка двойственной задачи также совпадает с соответствующей задачам I и II (задача I', § I). При этом множества E^*, A^*, B_t^* формально определяются так же, а множество

$$B^*=\bigcup_{t\in(0,+\infty)} B_t^*.$$

Учитывая (6), а также определение множеств A и B_t, легко проверить, что неравенство $(y,a)\leqslant 0$, где

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_{n+p}) \qquad (31)$$

– фиксированный вектор, тогда и только тогда определяет полупространство $F \in A^* \cap B^*$, когда

$$y_{n+k} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j < 0, \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{n+p} a_{ij} y_j \le 0, \; i = 1, 2, \dots, m. \tag{34}$$

При этом величина $\nu(F)$, определяемая по формуле (7), совпадает со значением функции

$$\nu(y) = \frac{\left(-\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)^p}{p^p \cdot \prod_{k=1}^{p} y_{n+k}}. \tag{35}$$

Таким образом, задача Ш′ допускает следующую аналитическую формулировку

ЗАДАЧА Ш′. При числовых данных задачи Ш определить вектор (31), максимизирующий функцию (35) при ограничениях (32–34).

ЛЕММА 3. Каковы бы ни были исходные данные (22), для задач Ш и Ш′ имеем:

I^0. Если, по крайней мере, в одной из задач существует допустимый элемент и при некотором $t \in (0, +\infty)$

$$A \cap B_{t+0} = \phi, \; B_{t+0} = \bigcup_{t' > t} B_{t'}, \tag{36}$$

то $A^* \cap B_t^* \neq \phi$.

2^0. Если при некотором $t \in (0, +\infty)$

$$A \cap B_{t'} \neq \phi \quad \text{для всех } t' < t, \tag{37}$$

то $A \cap B_t \neq \phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что из теорем 4, 13 и 15 главы I вытекает возможность строгого отделения непустого выпуклого множества M, (*)-открытого в своей аффинной оболочке L, от непустого многогранника N, не пересекающегося с M. Действительно, при $M = L$ утверждение вытекает из теоремы 13. В противном случае по теореме 4 в L

найдется гиперплоскость H', разделяющая M и $N'=N\cap L$. Соответствующее замкнутое полупространство в L, содержащее M, обозначим через F'. По теореме 15 существует гиперплоскость H, разделяющая многогранники N и F', причем такая, что $H\cap F'\subset H'$. Эта гиперплоскость, очевидно, строго отделяет M от N.

В силу указанного при выполнении (36) найдется однородное замкнутое полупространство F такое, что

$$A\subset F, \quad B_{t+0}\cap F=\phi.$$

Если при этом $F\cap B\neq\phi$, что автоматически выполняется при $A\cap B\neq\phi$ (когда в задаче Ш существует допустимый элемент), то $F\in A^*\cap B_t^*$. В противном случае найдется полупространство $F_0\in A^*\cap B^*$, так как по условию в одной из рассматриваемых задач допустимый элемент существует. С его помощью, как и при доказательстве леммы I (см. § I), строится полупространство $F_1\in A^*\cap B_t$.

Второе утверждение леммы почти очевидно. Действительно, если при выполнении (37) одно из множеств $A\cap B_{t'}$ неограниченное, то A содержит точки множеств B_t при всех $t\in(0,+\infty)$. Если же множества $A\cap B_{t'}$ ограниченные, то, ввиду их упорядоченности (по включению) и замкнутости, $\bigcap_{t'<t}(A\cap B_t)\neq\phi$. А интересующее нас множество

$$A\cap B_t=A\cap\left(\bigcap_{t'<t}B_{t'}\right)=\bigcap_{t'<t}(A\cap B_{t'}).$$

На основании леммы 3 можно утверждать, что для задач Ш и Ш' справедливы теорема двойственности, теорема существования и признак оптимальности, приведенные во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ. При использовании признака оптимальности полезно иметь в виду, что для векторов (23) и (31), удовлетворяющих ограничениям (25-27) и (32-34), тогда и только тогда имеет место равенство $\mu(x)=\nu(y)$, когда

а) для каждого $i=1,2,\dots,m$ достигается равенство, по крайней мере, в одном из неравенств

$$x_i\geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n+p}a_{ij}y_j\leqslant 0;$$

б) следующие произведения, отвечающие различным

$$K=1,2,\ldots,p,$$

между собой совпадают:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+K}\, x_i\right)\cdot y_{n+K} = const.$$

Приведенное утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств, являющейся следствием условий (25-27), (32-34) и известного неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел:

$$\mu(x)\prod_{K=1}^{p} y_{n+K} = \prod_{K=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+K}\, x_i\, y_{n+K} \leq \left(\frac{1}{p}\sum_{K=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+K}\, x_i\, y_{n+K}\right)^{p} =$$

$$=\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{K=1}^{p} a_{i,n+K}\, y_{n+K}\right)^{p} \leq \left(-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j\right)^{p} =$$

$$=\left(-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i\right)^{p} = \frac{1}{p^{p}}\left(-\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)^{p} = \nu(y)\cdot\prod_{K=1}^{p} y_{n+K}.$$

Полученные результаты позволяют построить эффективные численные методы решения задач рассматриваемого типа. Для примера опишем конечный алгорифм решения задач Ш и Ш$'$ при $p=2$.

На каждом шаге предлагаемого процесса имеются вектор x и вектор y , удовлетворяющие ограничениям (25-27), (32-34) и условию а) замечания. Если условие б) при этом нарушается, то строятся новые векторы x' и y' , удовлетворяющие перечисленным условиям, причем значения функций (24) и (35) на этих векторах удовлетворяют соотношениям:

$$\mu(x)\leq\mu(x')\leq\nu(y')\leq\nu(y),\quad \nu(y')-\mu(x')<\nu(y)-\mu(x).$$

Через конечное число шагов приходим к векторам (23) и (31), для которых помимо указанных выполняется также условие б) замечания. В силу доказанных предложений эти векторы представляют решение рассматриваемых задач Ш и Ш$'$.

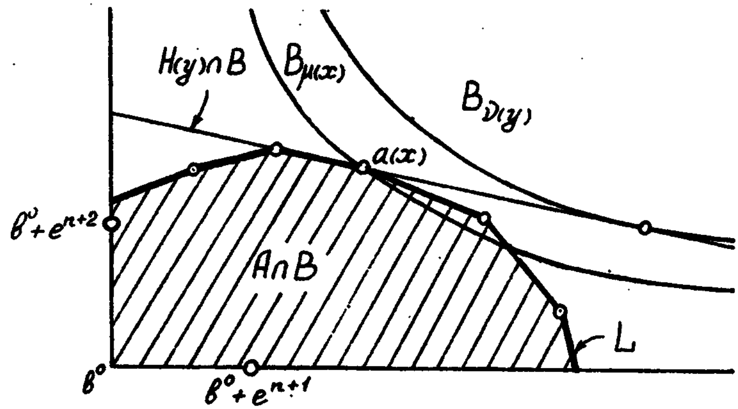
Исходные векторы x и y получаются путем решения некоторой вспомогательной задачи линейного программирования.

Каждому встречающемуся в процессе вектору (23) отвечает точка

$$a(x)=\sum_{i=1}^{m} x_i\, a^{i},$$

расположенные на ломаной L, ограничивающей в B множество $A \cap B$. При этом за исключением, быть может, первого и последнего шага эти точки совпадают с вершинами ломаной L (см. чертеж).

Аналогично каждому вектору (27) отвечает линейное уравнение $(y, a) = 0$, которое определяет некоторую гиперплоскость $H(y)$, выделяющую множество A. Эта гиперплоскость проходит через соответствующую точку $a(x)$ и за исключением, быть может, последнего шага, содержит одно из звеньев ломаной L (см. рисунок).



Из сказанного ясно, что число шагов в предлагаемом процессе не превосходит удвоенного числа звеньев ломаной L.

Перейдем к более детальному аналитическому описанию алгорифма.

I. Пусть имеются векторы (23) и (31), удовлетворяющие ограничениям (25-27), (32-34) и условию:

$$(a^i, y) = 0, \quad i \in \mathcal{J} \supset \{i : x_i > 0\}, \tag{38}$$

где $\mathcal{J}$ содержит $n+1$ индексов и векторы $a^i\ (i \in \mathcal{J})$, определяемые согласно (28), линейно независимые, т.е. образуют базис в гиперплоскости $(y, a) = 0$. Из (38) вытекает, что рассматриваемые векторы (23) и (31) удовлетворяют условию а) замечания. Нетрудно проверить, что эти векторы удовлетворяют также условию б) тогда и только тогда, когда в соответствующем соотношении между векторами (28-30).

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} x_i a^i = b^0 + \sum_{k=1}^{2} u_k e^{n+k} \qquad (39)$$

коэффициенты

$$u_k = \sum_{i\in\mathcal{J}} a_{i,n+k} x_i \qquad (40)$$

совпадают с величинами

$$\bar{u}_k = -\frac{(b^0, y)}{2y_{n+k}}, \; k=1,2. \qquad (41)$$

Допустим, что указанные условия нарушаются. Тогда в разложении

$$\sum_{k=1}^{2} (\bar{u}_k - u_k) e^{n+k} = \sum_{i\in\mathcal{J}} \bar{x}_i a^i \qquad (42)$$

определяем коэффициенты $\bar{x}_i$ и рассматриваем тождество:

$$\sum_{i\in\mathcal{J}} (x_i + \varepsilon \bar{x}_i) a^i = b^0 + \sum_{k=1}^{2} ((1-\varepsilon) u_k + \varepsilon \bar{u}_k) e^{n+k},$$

вытекающее из (39) и (42). При каждом ε это тождество определяет некоторый вектор $x(\varepsilon)$ с компонентами

$$x_i' = x_i + \varepsilon \bar{x}_i (i\in\mathcal{J}), x_i' = 0 \; (i \bar{\in} \mathcal{J}).$$

Если $1 \in E_x = \{\varepsilon : x_i + \varepsilon \bar{x}_i \geqslant 0, i\in\mathcal{J}\}$, то векторы $x(1)$ и y представляют решение задач III и III$'$ (процесс окончен). В противном случае, найдя $\varepsilon_0 = \max_{\varepsilon\in E_x} \varepsilon$ и индекс $i_0 \in \mathcal{J}$ такой, что

$$\bar{x}_{i_0} < 0, \; x_{i_0} + \varepsilon_0 \bar{x}_{i_0} = 0,$$

переходим к следующей части алгорифма, принимая в качестве исходных векторы $x' = x(\varepsilon_0)$, $y' = y$ и множество $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \setminus \{i_0\}$.

II. Пусть имеются векторы (23) и (31), удовлетворяющие (25-27), (33, 34), (38) и условию:

$$y_{n+k} \geqslant 0, \; k=1,2, \; y_{n+1} + y_{n+2} > 0, \qquad (32')$$

причем множество $\mathcal{J}$ содержит n индексов и векторы

$$a^i (i\in\mathcal{J}), e^{n+k} (k=1,2)$$

образуют базис в R^{n+2}. Нетрудно проверить, что рассматриваемые векторы (23) и (31) тогда и только тогда удовлетворяют всем условиям замечания, когда компоненты y_{n+k} ($k = 1,2$) совпадают с величинами

$$\bar{y}_{n+k} = -\frac{(b^0, y)}{2u_k}, \quad k = 1,2, \tag{43}$$

где u_k определяются по формуле (40).

Допустим, что указанные условия нарушаются. Тогда находим вектор $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{n+2})$ из условий (43) и уравнений:

$$(a^i, \bar{y}) = 0, \quad i \in J.$$

Каждому ε отнесем вектор $y(\varepsilon) = (1-\varepsilon)y + \varepsilon\bar{y}$. Если

$$1 \in E_y = \{\varepsilon : (a^i, y(\varepsilon)) \leq 0, \ i = 1,2,\dots,m\},$$

то векторы x и $y(1) = \bar{y}$ представляют решение задач III и III' (процесс окончен). В противном случае, найдя $\varepsilon_0 = \max\limits_{\varepsilon \in E_y} \varepsilon$ и индекс $i_0 \bar{\in} J$ такой, что

$$(a^i, \bar{y}) > 0, \quad (a^{i_0}, y(\varepsilon_0)) = 0,$$

переходим к предыдущей части алгорифма, принимая в качестве исходных векторы $x' = x$, $y' = y(\varepsilon_0)$ и множество $J' = J \cup \{i_0\}$. При этом, правда, следует особо рассмотреть случай, когда

$$y_{n+1}\, y_{n+2} = 0, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Тогда при проведении части I, ввиду нарушения условия (32), формулы (41) теряют смысл. Величины $\bar{u}_k$ в этом случае определяются по формуле:

$$\bar{u}_k = \begin{cases} u_k & \text{при } y_{n+k} \neq 0, \\ u_k + N & \text{при } y_{n+k} = 0, \end{cases}$$

где N - достаточное большое положительное число. Далее, если $1 \in E_x$ (при сколь угодно больших N), то функция (24) в задаче III не ограничена сверху и, следовательно, в этой задаче решения не существует (процесс окончен).

III. Для построения исходных векторов x и y рассматривается вспомогательная пара двойственных задач линейного программирования.

ЗАДАЧА IV. При числовых данных задачи III определить вектор (23), максимизирующий величину x_0 при ограничениях (25), (26) и

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,n+k} x_i \geq x_0, \quad k=1,2.$$

ЗАДАЧА IУ$'$. При тех же числовых данных определить вектор (3I), минимизирующий функцию $-\sum_{j=1}^{n} b_j y_j$ при ограничениях

$$y_{n+k} \geq 0, \quad k=1,2, \quad \sum_{k=1}^{2} y_{n+k} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n+2} a_{ij} y_j \leq 0, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Эти задачи могут решаться любым из известных алгорифмов линейного программирования, например, методом последовательного улучшения допустимого вектора (см. Приложение, § 2). Если при этом окажется, что в задаче IУ нет допустимого вектора или $\sup x_0 \leq 0$, то в интересующей нас задаче Ш, очевидно, нет допустимого вектора (процесс окончен). Если в задаче IУ $\sup x_0 = +\infty$ (в задаче IУ$'$ нет допустимого вектора), то и в задаче Ш функция (24) не ограничена сверху, т.е. решения в этой задаче не существует (процесс окончен).

Основным является случай, когда в задачах IУ и IУ$'$ существуют допустимые векторы и общее экстремальное значение для этих задач - положительное. Тогда используемый алгорифм линейного программирования приводит к величине $x_0 > 0$ и векторам (23), (3I), представляющим решение задач IУ и IУ$'$. Если отвлечься от случаев вырождения, которые преодолеваются с помощью известных приемов, разработанных в линейном программировании (см. Приложение, § 2, стр. I34), отвечающее вектору (23) соотношение

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a^i = b^0 + \sum_{k=1}^{2} x_{m+k} e^{n+k} + x_0 (e^{n+1} + e^{n+2}),$$

где

$$x_{m+k} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,n+k} x_i - x_0, \quad k=1,2,$$

при исключении нулевых слагаемых может быть переписано в виде:

$$\sum_{i \in J} x_i a^i = b^0 + \sum_{k \in K} x_{m+k} e^{n+k} + x_0 (e^{n+1} + e^{n+2}),$$

где множества $\mathcal{J}$ и K содержат в совокупности $n+1$ индексов и векторы

$$a^i (i \in \mathcal{J}),\ e^{n+k} (k \in K),\ e^{n+1}+e^{n+2}$$

образуют базис в R^{n+2}. При этом

$$(a^i, y) = 0,\ i \in \mathcal{J},\ (e^{n+k}, y) = 0,\ k \in K, (e^{n+1}+e^{n+2}, y) = 1.$$

Множество K, очевидно, содержит не более одного элемента. Поэтому в множество $\mathcal{J}$ входит $n+1$ или n индексов. Нетрудно проверить, что найденные векторы x, y и множество $\mathcal{J}$ в первом случае удовлетворяют условиям пункта I, а во втором – пункта П. Следовательно, можно перейти к соответствующей части алгорифма.

§ 4. Выпуклое программирование

Здесь изучаются задачи, представляющие непосредственное обобщение задач линейного программирования. Они также сводятся к разысканию крайней точки пересечения некоторой оси конечномерного векторного пространства с выпуклым множеством. Однако последнее уже не является многогранником.

Задачи этого типа были впервые рассмотрены в работах Л.В. Канторовича [23] и Куна и Таккера [33], заложивших основы теории **выпуклого программирования**. В качестве основной может быть приведена следующая

ЗАДАЧА У. Определить вектор

$$x \in X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

максимизирующий функцию $\mu(x)$ при ограничениях:

$$f_j(x) \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{44}$$

где μ и f_j – заданные вогнутые функции*).

---

*) Функция f, определенная в векторном пространстве E, называется <u>вогнутой</u>, если при любых x', $x'' \in E$ и $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство:

$$f(\lambda x' + (1-\lambda) x'') \geq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'').$$

Если имеет место неравенство противоположного смысла, то функция называется выпуклой. Наконец, если в указанных соотношениях имеет место строгое неравенство, то функция называется, соответственно, строго вогнутой или строго выпуклой.

Эта задача укладывается в рассматриваемую в работе общую схему. В R^{n+1} выделим точки

$$a(x)=(\mu(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

отвечающие различным векторам $x \in X$, и рассмотрим множества:

$$A=\{a \in R^{n+1}: a \leqslant a(x) \text{ при некоторых } x \in X\} \text{ ж)}$$

$$B_t=\{b \in R^{n+1}: b=t'e^0=(t', 0, \ldots, 0), t' \geqslant t\},$$

$$B=\bigcup_{t \in(-\infty,+\infty)} B_t=\{b \in R^{n+1}: b=te^0, t \in(-\infty,+\infty)\}.$$

Множество A является выпуклым, так как при

$$a' \leqslant a(x'), a'' \leqslant a(x''), \lambda \in(0,1),$$

где x', $x'' \in X$, на основании определения вогнутых функций имеем:

$$\lambda a'+(1-\lambda) a'' \leqslant a(\lambda x'+(1-\lambda) x'').$$

Нетрудно видеть, что при данных здесь определениях множеств A, B_t и B геометрическая формулировка исследуемой задачи совпадает с приведенной выше для задач предыдущих параграфов (см. § I).

Геометрическая формулировка двойственной задачи также совпадает с соответствующей предыдущим задачам (задача I$'$, § I). При этом множества A^*, B_t^* и B^* формально определяются так же, однако в качестве E^* здесь следует принять совокупность всех замкнутых полупространств F, удовлетворяющих условию (6), так как множество A в данном случае уже не является коническим.

Из определения множеств B_t, B, B_t^*, B^* и условия (6) (см. § I) вытекает, что полупространства из B^* (и только они) представимы в виде:

$$F=\{a=(a_0, a_1, \ldots, a_n): a_0+\sum_{j=1}^{n} y_j a_j \leqslant z\}, \quad (45)$$

ж) Неравенство $a \leqslant a(x)$ означает, что координаты точки не превосходят соответствующих координат точки $a(x)$.

где y_j и z – фиксированные числа. При этом $F \in A^*$ тогда и только тогда, когда

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{46}$$

$$\mu(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x) \leq z, \quad x \in X. \tag{47}$$

Наоборот, если числа y_j и z удовлетворяют условиям (46, 47), то соответствующее полупространство (45) принадлежит множеству $A^* \cap B^*$, т.е. является допустимым элементом двойственной задачи (см. § I), причем величина $\nu(F)$, определяемая согласно (7), совпадает с z.

Отсюда ясно, что двойственная задача эквивалентна следующей:

ЗАДАЧА У$'$. Определить вектор

$$y \in Y = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : y_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n\},$$

при котором функция

$$\varphi(x, y) = \mu(x) + \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x) \tag{48}$$

ограничена сверху на X и величина

$$\nu(y) = \sup_{x \in X} \varphi(x, y) \tag{49}$$

достигает минимума.

Значительная часть результатов общей теории выпуклого программирования относится к выяснению условий, при которых справедлива следующая

ТЕОРЕМА КУНА-ТАККЕРА. Вектор $x \in X$, удовлетворяющий неравенствам (44), тогда и только тогда является решением задачи У, когда существует вектор $y \in Y$ такой, что $\mu(x)$ совпадает с величиной $\nu(y)$, определяемой по формулам (48, 49).

Каковы бы ни были основная и двойственная задачи, рассмотренные во введении (стр.15), теорема типа приведенной, как легко видеть, всегда справедлива в сторону достаточности, а утверждение ее в сторону необходимости равносильно условию:

(*) Если $A \cap B_{t-0} \neq \emptyset$ и $A \cap B_{t+0} = \emptyset$, то $A^* \cap B_t^* \neq \emptyset$.

Для задач У и У$'$ это условие означает, что если

$$te^\circ \in A,\ t'e^\circ \bar{\in} A \quad \text{при всех} \quad t' > t\ , \tag{50}$$

должна существовать гиперплоскость, строго отделяющая от множества A луч

$$B_{t+0} = \{b \in R^{n+1} : b = t'e^\circ;\ t' \in (t, +\infty)\}.$$

Накладываемые ограничения в многочисленных доказательствах теоремы Куна-Таккера обеспечивают существование указанной гиперплоскости. При этом обычно накладываются такие ограничения, что л ю б а я гиперплоскость, разделяющая множества A и B_{t+0}, строго выделяет последнее.

В ряде работ (см., напр., [68]) теорема доказывается в предположении

I^0 Существует вектор $x_0 \in X$ такой, что

$$f_j(x^0) > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

В этом случае ось B содержит внутренние точки множества A (таковой является, например, точка $(\mu(x^0)-1)e^\circ$). Поэтому л ю б а я гиперплоскость, разделяющая множества и B_{t+0}, строго выделяет последнее. Таким образом, условие (ж) здесь является следствием простейшей теоремы отделимости.

Предположение I^0 весьма жесткое. Выполнение его нельзя гарантировать даже в линейном программировании. В связи с этим делаются попытки ослабить указанное условие для случая, когда среди ограничений (44) имеются линейные (см. [68]).

Допустим, что среди ограничений (44) первые $n_1\ (n_1 \le n)$ имеют вид:

$$f_j(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + b_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_1, \tag{51}$$

где a_{ij}, b_j – заданные вещественные числа. В этом случае для справедливости теоремы Куна-Таккера достаточно потребовать выполнения следующего условия[ж]:

2^0 Существует вектор $x^\circ \in X$ такой, что

$$f_j(x^0) \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n_1,\ f_j(x^0) > 0,\ j = n_1+1, n_1+2, \ldots, n.$$

ЛЕММА. Из 2^0 следует выполнение условия (ж).

ж) В [68] накладываются более жесткие ограничения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при $t = t^*$ имеет место (50). Если для всех $x \in X$ величина $\mu(x) \le t^*$, то в качестве искомой может быть принята гиперплоскость

$$H = \{a = (a_0, a_1, \dots, a_n) : a_0 = t^*\}.$$

Поэтому достаточно исследовать случай, когда открытое выпуклое множество

$$M_0 = \{x \in R^m : \mu(x) > t^*\}$$

имеет общие точки с множеством X.

Рассмотрим многогранник

$$M_1 = \{x \in X : f_j(x) \ge 0,\ j = 1, 2, \dots, n_1\}$$

и выпуклые множества

$$M_2 = \{x \in R^m : f_j(x) \ge 0,\ j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n\},$$

$$\bar{M}_0 = \{x \in R^m : \mu(x) \ge t^*\}.$$

Из выполнения соотношений (50) для $t = t^*$ следует, что

$$\bar{M}_0 \cap M_1 \cap M_2 \ne \phi, \quad M_0 \cap M_1 \cap M_2 = \phi.$$

Поэтому выпуклое множество $W \subset R^{3m}$, состоящее из точек

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{3m}),$$

для которых $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in M_0$, $x' = (x_{m+1}, \dots, x_{2m}) \in M_1$, $x'' = (x_{2m+1}, \dots, x_{3m}) \in M_2$ не пересекается с диагональным множеством

$$L = \{\bar{x} \in R^{3m} : x = x' = x''\}.$$

В силу теоремы Минковского в R^{3m} существует гиперплоскость, содержащая L и выделяющая W. Другими словами, найдутся векторы c, d, $e \in R^m$ такие, что

$$(c, x) + (d, x) + (e, x) = 0 \qquad \text{при всех } x \in R^m, \tag{52}$$

$$(c, x) + (d, x') + (e, x'') \le 0 \qquad x \in M_0,\ x' \in M_1,\ x'' \in M_2, \tag{53}$$

причем среди этих векторов имеется ненулевой.[ж)]

Из (52) следует, что $c + d + e = 0$. Покажем, что c – ненулевой вектор. На основании условия 2^0 существует точка

ж) Существование таких векторов следует также из теоремы Дубовицкого и Милютина [19].

$x^0 \in M_1 \cap M_2$, являющаяся внутренней для множества M_2. Если бы $c = \theta$, то для любого $x \in R^m$ при достаточно малых $\lambda > 0$ (таких, что точка $x^0 + \lambda x \in M_2$) имели:

$$(d, x^0) + (e, x^0) = 0, (d, x^0) + (e, x^0 + \lambda x) \leq 0, (e, x) \leq 0,$$

откуда следовало бы, что $e = \theta$. А тогда, ввиду (52), нулевым оказался бы и третий вектор d, что невозможно.

Соотношения (52) и (53) показывают, что на элементе $x^* \in \bar{M}_0 \cap M_1 \cap M_2$ достигается три экстремума:

$$\max_{x \in \bar{M}_0} (c, x) = (c, x^*), \tag{54}$$

$$\max_{x \in M_1} (d, x) = (d, x^*), \tag{55}$$

$$\max_{x \in M_2} (e, x) = (e, x^*). \tag{56}$$

Соотношение (54) означает, что x^* является решением задачи максимизации функции (c, x) на элементах множества X при ограничении

$$\mu(x) - t^* \geq 0.$$

Эта задача выпуклого программирования удовлетворяет условию 1^0. Поэтому на основании ранее доказанного существует неотрицательное число y_0 такое, что

$$(c, x) + y_0(\mu(x) - t^*) \leq (c, x^*) \quad \text{для всех } x \in X. \tag{57}$$

Аналогично соотношение (56) показывает, что x^* является решением задачи максимизации функции (e, x) на элементах множества X при ограничениях:

$$f_j(x) \geq 0, \quad j = n_1+1, n_1+2, \ldots, n.$$

Эта задача выпуклого программирования также удовлетворяет условию 1^0 (см. 2^0). Поэтому существуют неотрицательные числа $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_n$ такие, что

$$(e, x) + \sum_{j=n_1+1}^{n} y_j f_j(x) \leq (e, x^*) \quad \text{для всех } x \in X. \tag{58}$$

Соотношение (55) показывает, что x^* является решением задачи линейного программирования, состоящей в максимизации функции $(d, x) = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i$ на элементах множества X при ограничениях (51). На основании общей теории (см. § 1) можно утверждать существование неотрицательных чисел y_1, y_2, ..., y_{n_1} таких, что

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} y_j + d_i \leq 0,\ i=1,2,\dots,m,\ \sum_{j=1}^{n_1} b_j y_j = (d, x^*).$$

Отсюда для любого $x=(x_1, x_2, \dots, x_m) \in X$ имеем:

$$(d,x) + \sum_{j=1}^{n_1} y_j f_j(x) = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i + \sum_{j=1}^{n_1} y_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i + b_j\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n_1} a_{ij} y_j + d_i\Big) + \sum_{j=1}^{n_1} b_j y_j \leq \sum_{j=1}^{n_1} b_j y_j = (d, x^*),$$

т.е.

$$(d,x) + \sum_{j=1}^{n_1} y_j f_j(x) \leq (d, x^*) \text{ для всех } x \in X. \qquad (59)$$

После сложения неравенств (57-59) и использования соотношения (52) получаем:

$$y_0(\mu(x) - t^*) + \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x) \leq 0 \text{ для всех } x \in X.$$

Отсюда следует, что при $y_0 \neq 0$ в качестве искомой может быть взята гиперплоскость

$$H = \{a = (a_0, a_1, \dots, a_n) : \sum_{j=0}^{n} y_j a_j = y_0 t^*\}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $y_0 = 0$. Из соотношения (57) в этом случае следует, что $c \leq 0$, $(c, x^*) = 0$. Если для некоторого $x \in M_1$ в указанном соотношении имело бы место строгое неравенство, то для элемента $x' = x^0 + \lambda(x - x^0)$, где x^0 – вектор из условия 2^0, при достаточно малых $\lambda > 0$ должны были бы выполняться неравенства:

$$(c, x') < 0 = (c, x^*),\ (d, x') \leq (d, x^*),\ (e, x') \leq (e, x^*),$$

противоречащие соотношению (52). Следовательно, $(c, x) = 0$ для всех $x \in M_1$. Поэтому x^* представляет решение задачи максимизации функции $(-c, x)$ на множестве X при ограничениях (51). Как уже отмечалось, в этом случае существуют неотрицательные числа y'_1, y'_2, ..., y'_{n_1} такие, что

$$(c,x)+\sum_{j=1}^{n_1} y_j' f_j(x) \le 0 \qquad \text{для всех } x \in X.$$

Покажем, что в качестве искомой может быть принята гиперплоскость

$$H=\{a=(a_0,a_1,\dots,a_n): a_0+\lambda\sum_{j=1}^{n_1} y_j' a_j = t^*\},$$

где $\lambda = t^* - \mu(x')$, x' - произвольная точка R^m, в которой $(c,x')=1$. Очевидно, достаточно проверить, что для элементов $x \in X$ выполняется неравенство

$$\mu(x)+\lambda(c,x) \le t^*. \qquad (60)$$

При $(c,x)=(c,x^*)=0$ это неравенство следует из (54). Если $(c,x)<0$, то для точки

$$x''=\frac{(-c,x)}{(-c,x)+1}x' + \frac{1}{(c,x)+1}x$$

имеем:

$$(c,x'')=0, \quad \mu(x'')\le t^*.$$

С другой стороны, на основании определения вогнутой функции

$$\frac{(-c,x)}{(-c,x)+1}\mu(x')+\frac{1}{(-c,x)+1}\mu(x) \le \mu(x'') \le t^*,$$

откуда следует (60). Это завершает доказательство леммы.

В заключение заметим, что для решения задач выпуклого программирования в основном используются итеративные методы, в которых ищется седловая точка функции (48), т.е. такие векторы $x^* \in X$ и $y^* \in Y$, что

$$\varphi(x^*,y^*)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}\varphi(x,y).$$

В совместной работе [2] автора с В.А.Булавским для задач выпуклого программирования с линейными ограничениями строится алгорифм на основе общего метода последовательного улучшения допустимого вектора (см. Приложение, § 2). В отличие от итеративных методов решение задачи здесь формально получается за конечное число шагов. При этом, правда, на каждом шаге решается нелинейное неравенство относительно одного параметра. В случае квадратичного программирования указанное неравенство - линейное, и потому предложенный процесс – конечный уже в буквальном понимании этого слова.

Другой конечный алгорифм для решения частного типа задач нелинейного (квазивыпуклого) программирования рассмотрен нами в предыдущем параграфе.

ГЛАВА II

ПРИМЕРЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

§ I. Об одном пространстве вполне аддитивных функций*)

В различных разделах математики (функциональный анализ, теория функций вещественной переменной, геометрия, теория вероятностей, эконометрика) встречается необходимость изучения семейства $\Phi(B)$ вполне аддитивных функций, определенных на системе B борелевских множеств некоторого метрического компакта R. Для каждой такой функции φ, как известно (см., например, [72], § 29), существует разложение R на два непересекающихся борелевских множества R^+ и R^-, такие, что функции

$$\varphi^+(e) = \varphi(e \cap R^+), \quad \varphi^-(e) = -\varphi(e \cap R^-), \, e \in B,$$

являются неотрицательными. Хотя множества R^+ и R^- по данной функции φ определяются неоднозначно, функции φ^+ и φ^- вполне определяются заданием φ, именно:

$$\varphi^+(e) = \sup_{e' \in B} \varphi(e' \cap e), \quad \varphi^-(e) = -\inf_{e' \in B} \varphi(e' \cap e).$$

При этом $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$. Полагая, как это обычно делается, для каждой $\varphi \in \Phi(B)$

$$\|\varphi\|_{\sigma} = \varphi^+(R) + \varphi^-(R),$$

получаем линейное нормированное пространство $\Phi^{\sigma}(B)$, являющееся сопряженным к пространству $C(R)$ непрерывных функций, определенных на R и нормированных обычным образом:

$$\|f\| = \max_{x \in R} |f(x)|.$$

Норма пространства $\Phi^{\sigma}(B)$ мало отражает метрику в R. Например, расстояние между "элементарными зарядами" $\varphi_x, \varphi_y \in \Phi^{\sigma}(B)$,

---

*) В качестве этого параграфа помещена работа [30], написанная автором совместно с Л.В.Канторовичем.

$$\varphi_x(e) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in e, \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} e, \end{cases}$$

при $x \neq y$ равно 2, вне зависимости от расстояния $r(x,y)$ между точками x и y в R; действительно, для "пары" $\varphi_{xy} = \varphi_x - \varphi_y$ имеем: $\|\varphi_{xy}\|_v = 2$. Во многих же вопросах (см., например,[31], стр. 239) естественно считать, что при $x_n \to x_0$ последовательность $\varphi_{x_n} \to \varphi_{x_0}$. Этим, пожалуй, объясняется то обстоятельство, что многими авторами (Ф.Рисс, Г.М.Фихтенгольц, В.И.Гливенко, А.А.Марков, А.Д.Александров, Ю.В.Прохоров и др.) изучалась слабая топология в $\Phi^v(B)$. (Последовательность φ_n называется слабо сходящейся в $\Phi^v(B)$ к функции φ_0, если для каждой функции $f \in C(R)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f(x)\, \varphi_n(de) = \int_R f(x)\, \varphi_0(de) \text{).}$$

В настоящей работе в $\Phi(B)$ вводится норма, существенно использующая метрику в R. Сходимость по этой норме при условии ограниченности в $\Phi^v(B)$ оказывается эквивалентной слабой сходимости в $\Phi^v(B)$. Сопряженным к $\Phi(B)$ при этом является пространство функций, определенных на R и удовлетворяющих условию Липшица. Это пространство оказывается полезным при изучении многих вопросов. Некоторые примеры такого рода имеются в[29]; там же приведено (в основном без доказательств) большинство предложений данной работы. Рассматриваемая норма была введена еще в работе[24], где имеется также и теорема 3 (с другим доказательством).

1. ПРОСТРАНСТВО $\Phi_0(B)$. Рассмотрим семейство $\Phi_0(B)$ функций $\varphi \in \Phi(B)$, для которых $\varphi(R) = 0$, т.е. $\varphi^+(R) = \varphi^-(R)$. Для каждой такой функции φ множество Ψ_φ неотрицательных вполне аддитивных по каждому аргументу функций $\psi(e,e')$, определенных на $B \times B$ и удовлетворяющих условию

$$\psi(e,R) - \psi(R,e) = \varphi(e), \quad e \in B,$$

не пусто (этому множеству принадлежит, например, функция $\psi(e,e') = \dfrac{\varphi^+(e)\cdot\varphi^-(e')}{\varphi^+(R)}$). Для $\varphi \in \Phi_0(B)$ положим

$$\|\varphi\| = \inf_{\psi\in\Psi_\varphi} \int_R\int_R r(x,y)\, \psi(de,de'). \tag{1}$$

При этом выполнены условия: а) $\|\psi\| \geqslant 0$, б) $\|\lambda\psi\| = |\lambda|\cdot\|\psi\|$, в) $\|\psi_1+\psi_2\| \leq \|\psi_1\| + \|\psi_2\|$. Действительно, неравенство а) очевидно; условие б) при $\lambda = 0$ также очевидно, а при $\lambda \neq 0$ оно вытекает из того, что множества $\Psi_{|\lambda|\cdot\varphi}$ и $\Psi_{-\varphi}$ состоят, соответственно, из функций $|\lambda|\cdot\psi(e,e')$ и $\psi(e',e)$, где $\psi(e,e') \in \Psi_\varphi$; неравенство в) следует из того, что при $\psi_1 \in \Psi_{\varphi_1}$ и $\psi_2 \in \Psi_{\varphi_2}$ функция $\psi_1+\psi_2 \in \Psi_{\varphi_1+\varphi_2}$. Ниже будет показано, что $\|\varphi\| = 0$ лишь при $\varphi = 0$ (т.е. когда $\varphi(e) = 0$ при всех $e \in B$). Таким образом, (1) удовлетворяет всем аксиомам нормы, и, следовательно, $\Phi_0(B)$ – линейное нормированное пространство.

Следующая теорема устанавливает общую форму линейных функционалов в $\Phi_0(B)$.

ТЕОРЕМА 1. Сопряженным с $\Phi_0(B)$ является пространство $Lip^1(R)$ функций $u(x)$, определенных на R и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$$\|u\| = \sup_{x,y\in R,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{r(x,y)}$$

(функции, отличающиеся постоянным слагаемым, отождествляются).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждой функции $u \in Lip^1(R)$ отвечает функционал

$$L(\varphi) = \int_R u(x)\,\varphi(de). \tag{2}$$

Для любой $\psi \in \Psi_\varphi$ имеем:

$$L(\varphi) = \int_R u(x)\,[\psi(de,R) - \psi(R,de)] =$$

$$= \iint_{RR} u(x)\,\psi(de,de') - \iint_{RR} u(y)\,\psi(de,de'),$$

поэтому

$$|L(\varphi)| = \left|\iint_{RR} [u(x)-u(y)]\,\psi(de,de')\right| \leq$$

$$\leq \|u\|\cdot \inf_{\psi\in\Psi_\varphi} \iint_{RR} r(x,y)\,\psi(de,de') = \|u\|\cdot\|\varphi\|.$$

Рассмотрение пар φ_{xy} убеждает, что норма функционала L равна $\|u\|$.

Если L' – произвольный линейный функционал в $\Phi_0(B)$, то при любой точке $y_0 \in R$ функция $u(x) = L'(\varphi_{xy_0}) \in Lip^1(B)$, так как

$$|u(x)-u(y)| = |L'(\varphi_{xy_0})-L'(\varphi_{yy_0})| = |L'(\varphi_{xy})| \leq \|L'\|\cdot\|\varphi_{xy}\| \leq \|L'\|\cdot r(x,y).$$

Определяемый этой функцией функционал (2) совпадает с L' на парах: $L(\varphi_{xy}) = L'(\varphi_{xy}) = u(x)-u(y)$. Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что этот функционал совпадает с L на всем $\Phi_0(B)$, а для этого достаточно доказать следующее утверждение, представляющее также и самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Линейные комбинации пар образуют в $\Phi_0(B)$ всюду плотное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что если функция $\varphi \in \Phi_0(B)$ обращается тождественно в нуль на дополнении некоторого множества $E \subset R$, т.е. $\varphi^+(R\setminus E) = \varphi^-(R\setminus E) = 0$, то

$$\|\varphi\| = \inf_{\psi\in\Psi_\varphi} \iint_{RR} r(x,y)\psi(de,de') \leq \iint_{RR} r(x,y) \frac{\varphi^+(de)\cdot\varphi^-(de')}{\varphi^+(R)} =$$

$$= \iint_{EE} r(x,y)\frac{\varphi^+(de)\cdot\varphi^-(de')}{\varphi^+(E)} \leq diam\, E\cdot\varphi^-(E) = \frac{1}{2} diam\, E\, \|\varphi\|_0. \quad (3)$$

Пусть теперь $\varphi \in \Phi_0(B)$ ($\varphi \neq 0$) и $\varepsilon > 0$. Компакт R представим в виде конечной суммы $R = \bigcup_{i=1}^{N} e_i$, где

$$e_i \cap e_j = \phi,\ i\neq j,\ diam\, e_i \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_0},\ i = 1,2,\dots,N.$$

Из каждого e_i выберем произвольную точку x_0 и рассмотрим функцию

$$\bar\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi(e_i)\cdot\varphi_{x_i},$$

где φ_{x_i} - элементарные заряды. Эта функция представляет линейную комбинацию пар $\left(\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi(e_i)\,\varphi_{x_i y}\right.$, где y - произвольная точка $\left.R\right)$. Покажем, что $\|\varphi-\bar\varphi\| \leq \varepsilon$. Для этого рассмотрим функции

$$\varphi_i(e) = \varphi(e\cap e_i) - \varphi(e_i)\cdot\varphi_{x_i}(e) \in \Phi_0(B),\ i = 1,2,\dots,N.$$

На основании (3) заключаем, что

$$\|\varphi_i\| < \frac{1}{2}\, diam\, e_i \cdot \|\varphi_i\|_v \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_v} [2\varphi^+(e_i) + 2\varphi^-(e_i)].$$

А тогда

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\| = \|\sum_{i=1}^{N} \varphi_i\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|\varphi_i\| \leq \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_v} \sum_{i=1}^{n} [\varphi^+(e_i) + \varphi^-(e_i)] = \varepsilon ,$$

что, ввиду произвольности $\varphi \in \Phi_0(B)$ и $\varepsilon > 0$, доказывает лемму, а вместе с тем и теорему I.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанной теоремы вытекает, что, каковы бы ни были метрический компакт E с метрикой $\rho(x,y)$ и число $\alpha \in (0, 1]$, пространство $Lip^{\alpha}(E)$ функций $u(x)$, определенных на E, с нормой

$$\|u\|_{\alpha} = \sup_{x,y \in E,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{[\rho(x,y)]^{\alpha}}$$

является сопряженным к некоторому линейному нормированному пространству. Действительно, пространство $Lip^{\alpha}(E)$, как нетрудно видеть, эквивалентно пространству $Lip^1(R)$, где R совпадает с E по составу элементов, но имеет другую метрику: $r(x,y) = [\rho(x,y)]^{\alpha}$, а последнее по теореме I является сопряженным к $\Phi_0(B)$.

Сравним пространство $\Phi_0(B)$ с пространством $\Phi_0^v(B)$, состоящим из тех же элементов, но рассматриваемом как подпространство $\Phi^v(B)$. Из (3) вытекает, что первая норма не сильнее второй. С другой стороны, если в R имеется, по крайней мере, одна предельная точка, то рассматриваемые нормы неэквивалентны (при $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ последовательность пар $\varphi_{x_n x_0}$ сходится к 0 в $\Phi_0(B)$ и расходится в $\Phi_0^v(B)$). Поэтому $\Phi_0(B)$ - неполное пространство. Однако следующая теорема показывает, что во многих вопросах можно обойтись без его пополнения.

ТЕОРЕМА 2. Если $\{\varphi_n\}$ - последовательность Коши в $\Phi_0(B)$ и при этом $\|\varphi_n\|_v$ ограничены, то эта последовательность сходится по норме $\Phi_0(B)$ к некоторому элементу $\varphi_0 \in \Phi_0(B)$. Вообще сходимость в $\Phi_0(B)$ при условии ограниченности в $\Phi_0^v(B)$

эквивалентна слабой сходимости в $\Phi_0^{\varphi}(B)$. *)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что $\|\varphi\| = 0$ лишь при $\varphi = \theta$. Пусть $\varphi \neq \theta$, т.е. $\|\varphi\|_v \neq 0$. Рассмотрим замкнутое множество $F \subset R^+$ (по поводу множества R^+ см. введение) такое, что $\varphi(F) = c > 0$. Через S обозначим ε - окрестность F, для которой $\varphi^-(S \setminus F) < c$. Тогда для функции $u \in Lip'(R)$, определяемой равенством

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \bar{\in} S, \\ 1 - \dfrac{r(x,F)}{\varepsilon} & \text{при } x \in S \end{cases}$$

имеем

$$\int_R u(x)\varphi(de) = \int_F u(x)\varphi(de) + \int_{S \setminus F} u(x)\varphi(de) \geq c - \varphi^-(S \setminus F) > 0.$$

Поэтому $\|\varphi\| \neq 0$, и утверждение доказано.

Пусть теперь $\{\varphi_n\}$ - последовательность Коши в $\Phi_0(B)$, причем $\|\varphi_n\|_v$ ограничены. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$, которая слабо сходится в $\Phi_0^v(B)$ к некоторой функции φ_0. Если бы $\{\varphi_{n_k}\}$ не сходилась к φ_0 в $\Phi_0(B)$, то в $\Phi_0(B)$ имелась бы такая последовательность Коши $\varphi'_\ell = \varphi_{n_{k_\ell}} - \varphi_0$, что нормы ее элементов ограничены снизу некоторым числом $\varepsilon > 0$, и как последовательность в $\Phi_0^v(B)$ она слабо сходится к θ. Тогда при некотором n

$$\|\varphi'_{n+p} - \varphi'_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (p = 1, 2, \dots),$$

и для функции $u \in Lip^1(R)$ такой, что $\|u\| = 1$ и

$$L(\varphi'_n) = \int_R u(x)\varphi'_n(de) = \|\varphi'_n\| \geq \varepsilon,$$

имеем:

$$L(\varphi'_{n+p}) = L(\varphi'_n) + L(\varphi'_{n+p} - \varphi'_n) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

*) Для одномерного случая, если перейти от функций множества к функциям точки, введенная нами норма совпадает с нормой в L и соответствующий факт известен (см. Г.М.Фихтенгольц [69], В.И.Гливенко [10], стр. 153).

Последнее противоречит слабой сходимости $\{\varphi_l'\}$ к 0. Поэтому $\{\varphi_{n_k}\}$, а тогда и $\{\varphi_n\}$ сходится к φ_0 в $\Phi_0(B)$, и первое утверждение теоремы доказано.

Если учесть, что $\|\varphi\|=0$ лишь при $\varphi=0$, то из приведенного рассуждения легко следует, что из сходимости в $\Phi_0(B)$ при ограниченности в $\Phi_0^{\sigma}(B)$ вытекает слабая сходимость в последнем пространстве. Обратное утверждение вытекает из компактности в $\Phi_0(B)$ единичной сферы из $\Phi_0^{\sigma}(B)$. Для доказательства этого факта зададимся произвольным $\varepsilon>0$; по нему построим для R $\frac{\varepsilon}{4}$ - сеть: $x_1, x_2, \dots, x_N$, и рассмотрим всевозможные функции

$$\varphi=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} c_i\,\varphi_{x_i y}, \tag{4}$$

где M - натуральное число, такое, что $\frac{1}{M}\leq\frac{\varepsilon}{2N\cdot \operatorname{diam} R}$; c_i - - целые числа из интервала $[-M, M]$; $y\in R$ - некоторая фиксированная точка. Функции (4), как нетрудно проверить, представляют в $\Phi_0(B)$ конечную ε-сеть для единичной сферы из $\Phi_0^{\sigma}(B)$. Отсюда следует последнее утверждение, и теорема доказана.

Следующие теоремы характеризуют те $\psi\in\Psi_\varphi$, для которых достигается равенство

$$\iint_{RR} r(x,y)\,\psi(de,de')=\|\psi\|. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы функция $\psi\in\Psi_\varphi$ удовлетворяла условию (5), необходимо и достаточно, чтобы при некоторой $u\in Lip^1(R)$ с $\|u\|=1$ условие $u(x)-u(y)=r(x,y)$ выполнялось, если $\psi(e,e')\neq 0$, каковы бы ни были окрестности e, e' точек x, y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\psi\in\Psi_\varphi$ и $u\in Lip^1(R)$ с $\|u\|=1$ имеем:

$$\begin{aligned}\|\psi\| &\geq \int_R u(x)\,\varphi(de) = \iint_{RR}[u(x)-u(y)]\,\psi(de,de')\leq \\ &\leq \iint_{RR} r(x,y)\,\psi(de,de')\geq\|\psi\|.\end{aligned} \tag{6}$$

По теореме Хана при некотором u в первом неравенстве имеет место знак равенства; если ψ удовлетворяет (5), то и последнее неравенство заменяется равенством, а тогда двойные интегралы равны и условие теоремы выполняется. Достаточность также следует из (6).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Ψ_φ^E, где $E \subset R$ - некоторое фиксированное множество, есть совокупность тех $\psi \in \Psi_\varphi'$, для которых $\psi(E,E) = \psi(R,R)$. Тогда функции $\psi \in \Psi_\varphi^E$, на которых достигается $\inf_{\psi \in \Psi_\varphi^E} \iint\limits_{RR} r(x,y)\psi(de,de')$ удовлетворяют также условию (5).

ТЕОРЕМА 4. Для $\varphi \in \Phi_0(B)$ всегда существует $\psi \in \Psi_\varphi$, удовлетворяющая условию (5) и притом такая, что $\psi(R,R) = \varphi^+(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы для каждого натурального n существует такая линейная комбинация пар φ_n, что $\|\varphi - \varphi_n\| < \frac{1}{n}$. Для каждой φ_n имеется функция $\psi \in \Psi_{\varphi_n}$, удовлетворяющая условиям

$$\iint\limits_{RR} r(x,y)\psi_n(de,de') = \|\varphi_n\|, \quad \psi_n(R,R) = \varphi_n^+(R) \leqslant \varphi^+(R)$$

(на основании следствия из предыдущей теоремы эта функция ищется в конечномерном пространстве). Выбирая из $\{\psi_n\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность и переходя к пределу, получаем искомую функцию $\psi \in \Psi_\varphi$.

2. ПРОСТРАНСТВО $\Phi(B)$. Определенная в $\Phi_0(B)$ норма может быть различными способами распространена на все $\Phi(B)$. Остановимся на одном из них.

Пусть $p(x)$ - некоторая функция, определенная на R и удовлетворяющая условиям

$$p(x) > \sup_{y \in R} r(x,y), \quad |p(x) - p(y)| \leqslant r(x,y)$$

(в частности, $p(x)$ может быть равной постоянной $c > \operatorname{diam} R$). Для $\varphi \in \Phi(B)$ положим

$$\|\varphi\| = \inf_{\varphi_0 \in \Phi_0(B)} \left[\|\varphi_0\| + \int\limits_R p(x)\,|\varphi(de) - \varphi_0(de)|\right],$$

где $\|\varphi_0\|$ - норма φ_0 в $\Phi_0(B)$. Легко проверить, что при этом выполнены все аксиомы нормы и рассмотренное выше пространство

$\Phi_0(B)$ является подпространством $\Phi(B)$.

ТЕОРЕМА I$'$. Сопряженным с $\Phi(B)$ является пространство $Lip^1(R,p)$, состоящее из функций $u(x)$, определенных на R и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$$\|u\|_p = \max\left\{\|u\|, \left\|\frac{u(\cdot)}{p(\cdot)}\right\|_{C(R)}\right\},$$

где $\|u\|$ - норма u в $Lip^1(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in Lip^1(R,p)$. Рассмотрим функционал, определяемый формулой (2). Для любых $\varphi \in \Phi(B)$ и $\varphi_0 \in \Phi_0(B)$ имеем:

$$|L(\varphi)| \leq |L(\varphi_0)| + |L(\varphi - \varphi_0)| \leq \|u\| \cdot \|\varphi_0\| + \left\|\frac{u(\cdot)}{p(\cdot)}\right\|_{C(R)} \cdot \int_R p(x) \,|\, \varphi(de) -$$

$$- \varphi_0(de)| \leq \|u\|_p \cdot [\|\varphi_0\| + \int_R p(x) \cdot |\varphi(de) - \varphi_0(de)|],$$

откуда ввиду произвольности $\varphi_0 \in \Phi_0(B)$ получаем, что $\|L\| \leq \|u\|_p$. С другой стороны, в подпространстве $\Phi_0(B)$ норма этого функционала равна $\|u\|$ и для каждого элементарного заряда

$$|L(\varphi_x)| = |u(x)| = \left|\frac{u(x)}{p(x)}\right| \cdot |p(x)| \geq \left|\frac{u(x)}{p(x)}\right| \cdot \|\varphi_x\|.$$

Поэтому $\|L\| = \|u\|_p$.

Для произвольного линейного функционала в $\Phi(B)$ при фиксированной функции $\bar\varphi$, такой, что $\bar\varphi(R) = 1$, имеем:

$$L(\varphi) = L[\varphi - \varphi(R) \cdot \bar\varphi] + \varphi(R) L(\bar\varphi) = \int_R [\bar u + c] \cdot [\varphi(de) - \varphi(R) \cdot \bar\varphi(de)] +$$

$$+ L(\bar\varphi) \cdot \int_R \varphi(de) = \int_R [\bar u(x) + c]\, \varphi(de) - \varphi(R) \cdot [\int_R \bar u(x)\, \bar\varphi(de) + c],$$

где $\bar u$ - функция Липшица, а c - произвольное вещественное число (функционал в $\Phi_0(B)$ определяет соответствующую функцию Липшица лишь с точностью до постоянного слагаемого). Принимая $c = -\int_R \bar u(x) \cdot \varphi(de)$, получаем

$$L(\varphi) = \int_R u(x)\, \varphi(de),$$

где $u = \bar u - \int_R \bar u(x)\, \bar\varphi(de) + L(\bar\varphi) \in Lip^1(R,p)$, и теорема доказана.

Из того факта, что $\Phi_0(B)$ есть гиперплоскость в $\Phi(B)$, легко вытекают следующие утверждения:

Линейные комбинации элементарных зарядов образуют в $\Phi(B)$ всюду плотное множество.

Сходимость последовательности $\{\varphi_n\}$ в $\Phi(B)$ при условии ограниченности $\{\|\varphi_n\|_\upsilon\}$ эквивалентна слабой сходимости этой последовательности в $\Phi^\upsilon(B)$.

Имеют место также теоремы:

ТЕОРЕМА $3'$. Для того чтобы для функций $\varphi_0 \in \Phi_0(B)$ и $\psi \in \Psi_{\varphi_0}$ достигалось равенство

$$\iint_{RR} r(x,y)\,\psi(de,de') + \int_R p(x)\,|\psi(de) - \varphi_0(de)| = \|\varphi\|, \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы при некоторой функции $u \in Lip^1(R,p)$ с $\|u\|_p = 1$ условия

$$u(x) - u(y) = r(x,y),\ u(z) = p(z),\ u(z) = -p(z)$$

выполнялись, первое - если $\psi(e,e') > 0$, каковы бы ни были окрестности e, e' точек x, y; второе - если $(\psi - \varphi_0)^+(e'') > 0$ для любой окрестности e'' точки z; наконец, третье - если для любой такой окрестности $(\psi - \varphi_0)^-(e'') > 0$.

ТЕОРЕМА $4'$. Для $\varphi \in \Phi(B)$ всегда существуют функции $\varphi_0 \in \Phi_0(B)$ и $\psi \in \Psi_{\varphi_0}$, удовлетворяющие (7) и притом такие, что

$$|\varphi^+(R) - \varphi^-(R)| = \|\varphi - \varphi_0\|_\upsilon,\ \psi(R,R) = \varphi_0^+(R).$$

Закончим некоторыми соображениями о возможных применениях и обобщениях.

Сама постановка вопроса возникла в связи с задачей о перемещении масс, восходящей еще к Монжу (см. [6],[25]). Помимо этой области применения, нам представляется целесообразным использование данной метрики для определения меры близости некоторых геометрических объектов. Пространство распределений вероятностей, по-видимому, также естественно строить по типу $\Phi_0(B)$.

Введенная метрика не связана ни с какой фиксированной мерой в R. Однако она может рассматриваться как известный аналог метрики L (в случае интервала, как отмечалось, эти метрики совпадают). Это согласуется также с тем, что сопряженным к рассмотренному пространству является пространство функций Липшица.

Возможны обобщения полученных результатов, связанные с рассмотрением множеств R более общей природы, а также в направлении обобщенных функций.

§ 2. Бесконечномерные аналоги некоторых конкретных задач линейного программирования и теории игр

Изученное в предыдущем параграфе линейное нормированное пространство может найти широкое применение при постановке и анализе экстремальных проблем, представляющих бесконечномерные аналоги различных конкретных задач линейного программирования и теории игр. В настоящей работе не ставилось целью всестороннее исследование бесконечномерных задач. Мы не касаемся многих вопросов, идейно близких к рассматриваемым (в частности, задач оптимального регулирования, изученных в работах Л.С.Понтрягина и его учеников), а ограничиваемся иллюстрацией применимости развиваемого подхода к анализу экстремальных задач также и в бесконечномерном случае. В этом параграфе рассматриваются следующие задачи.

ЗАДАЧА I (см. [24, 25, 29]). На метрическом компакте R заданы два распределения массы - исходное и требуемое. Они характеризуются неотрицательными вполне аддитивными функциями φ_1 и φ_2, определенными на системе B борелевских множеств $e \subset R$. При этом предполагается, что общее количество массы не меняется:

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R). \tag{8}$$

Для перехода от одного распределения к другому необходимо совершить перемещение массы. Последнее можно характеризовать функцией $\psi(e, e')$, показывающей количество массы, перемещаемое с множества e на e'. Следовательно, план перемещения определяется выбором функции ψ, заданной на $B \times B$, неотрицательной и вполне аддитивной по каждому аргументу. Затраты по перемещению массы при каждом плане естественно характеризовать величиной

$$f(\psi) = \iint\limits_{RR} r(x, y)\, \psi(de, de'), \tag{9}$$

где $r(x, y)$ - метрика рассматриваемого компакта R.

Проблема состоит в разыскании наиболее экономного плана перемещения, при котором соблюдены балансовые соотношения:

$$\psi(e,R)=\varphi_1(e),\ \psi(R,e)=\varphi_2(e)$$

и затраты $f(\psi)$, определяемые по формуле (9), достигают минимума:

ЗАДАЧА II (см. [29]). На метрическом компакте R, как и в предыдущей задаче, заданы исходное и требуемое распределения массы, которые характеризуются неотрицательными вполне аддитивными функциями φ_1 и φ_2, определенными на системе борелевских множеств $e\subset R$. Однако соотношение (8) здесь заменяется неравенством:

$$\varphi_1(R)<\varphi_2(R).$$

В связи с этим для перехода от одного распределения к другому помимо перемещения имеющейся массы необходимо еще произвести недостающее количество. Предполагается известной функция $p(x)$, выражающая затраты, связанные с производством единицы массы в точке $x\in R$, причем

$$p(x)>\sup_{y\in R} r(x,y),\ |p(x)-p(y)|\le r(x,y),$$

где $r(x,y)$ - метрика в R. План производства характеризуется неотрицательной вполне аддитивной функцией χ, указывающей объем производства на каждом множестве $e\in B$. При этом производственные затраты составляют $\int\limits_R p(x)\chi(de)$.

Задача состоит в разыскании плана производства и перемещения массы, при котором соблюдены балансовые соотношения:

$$\psi(e,R)=\varphi_1(e),\ \psi(R,e)+\chi(e)=\varphi_2(e)$$

и суммарные затраты по производству и перемещению

$$f(\chi,\psi)=\int\limits_R p(x)\chi(de)+\iint\limits_{RR} r(x,y)\psi(de,de')$$

достигают минимума.

ЗАДАЧА III. Прежде всего заметим, что в изученном выше (см. § I, п. 2) линейном нормированном пространстве $\Phi(B)$ (элементами которого служат вполне аддитивные функции, определенные на системе B борелевских множеств фиксированного метрического компакта R с метрикой $r(x,y)$) множество нормированных мер

$$M = \{\varphi \in \Phi(B) : \varphi(R) = 1,\ \varphi(e) \geq 0,\ e \in B\} \qquad (10)$$

является компактным. При этом метрика в M

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \|\varphi_1 - \varphi_2\| \qquad (11)$$

не зависит от выбора функции $\rho(x)$, так как, ввиду (10), при любых φ_1, $\varphi_2 \in M$ вполне аддитивная функция $\varphi_1 - \varphi_2 \in \Phi_0(B)$.

В рассматриваемой задаче в M выделены замкнутое подмножество U и элемент φ_0, не принадлежащий выпуклой замкнутой оболочке V множества U. Необходимо определить элемент $\varphi \in V$, для которого достигает минимума величина

$$f(\varphi) = \|\varphi_0 - \varphi\|. \qquad (12)$$

Поставленная задача наилучшего приближения в пространстве $\Phi(B)$ представляет интерес при изучении различных законов распределения вероятностей на метрическом компакте R.

Этой задаче можно дать также экономическую интерпретацию. Элементы множества R отвечают различным видам продукции. Метрика $r(x,y)$ характеризует затраты, связанные с заменой единицы продукции вида x единицей продукции вида y. Заданная вполне аддитивная функция $\varphi_0 \in M$ определяет требуемый ассортимент: $\varphi_0(e)$ - суммарная потребность в продукции, отвечающей элементам множества $e \in B$. Интересующие нас виды продукции производятся комплексно из некоторого сырья. Имеющиеся технологические способы обработки сырья характеризуются вполне аддитивными функциями $\varphi \in U$. Комбинируя эти способы, мы можем получить из имеющегося сырья различные виды продукции в количествах, определяемых любой из функций $\varphi \in V$. В задаче ищется такая комбинация указанных технологических способов, при которой выход продукции наиболее точно соответствует требуемому. Точность соответствия определяется величиной (12), характеризующей дополнительные затраты, возникающие в связи с необходимостью замены одних видов продукции другими.

ЗАДАЧА IV*). В пространстве $\Phi(B)$ (элементами которого

---

*) Эта задача, представляющая обобщение основной задачи теории матричных игр, была изучена автором в работе [63]. Близкая по постановке задача для частного случая, когда $R = [0,1]$, а V совпадает с множеством (10), рассматривается в монографии Карлина [82] (стр. 433-434, 632-636).

служат вполне аддитивные функции, определенные на системе B борелевских множеств фиксированного метрического компакта R с метрикой $r(x,y)$) выделено замкнутое множество U неотрицательных функций, причем

$$\sup_{\varphi\in U} \|\varphi\|_v < +\infty,$$

где $\|\varphi\|_v = \varphi^+(R)+\varphi^-(R)$ – полная вариация φ на R. Кроме того, на R задана некоторая мера $\varphi_0 \in \Phi(B)$, не совпадающая с нулевой.

Рассматривается игра двух лиц с нулевой суммой, в которой первый игрок выбирает вполне аддитивную функцию $\varphi\in U$, а второй, независимо от него, – некоторое множество $e\in B$ такое, что $\varphi_0(e)>0$. При этом выигрыш первого игрока (проигрыш второго) определяется величиной

$$G(\varphi, e) = \frac{\varphi(e)}{\varphi_0(e)}.$$

Задача состоит в определении способов поведения игроков, которые в среднем обеспечивают им наилучший результат при наименее благоприятном поведении противника.

Первые две задачи приведены здесь для полноты картины. По существу, они были полностью изучены в предыдущем параграфе. Действительно, принимая $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$, на основании теорем 3,4, $3'$ и $4'$ получаем существование искомых функций в задачах I и II, а также исчерпывающую характеристику таких функций.

Задача III исследуется по общей схеме, намеченной во введении. Для сведения этой задачи к виду основной задачи введения рассмотрим множества:

$$S_t=\{\varphi\in \Phi(B): \|\varphi_0-\varphi\| \le -t\},\ t\in(-\infty,0),$$

$$S_{t+0}=\bigcup_{t'\in(t,0)} S_{t'}=\{\varphi\in\Phi(B): \|\varphi_0-\varphi\|<-t\},\ S=\bigcup_{t(-\infty,0)} S_t=\Phi(B).$$

Нетрудно видеть, что интересующая нас задача сводится к разысканию элемента $\varphi\in V$, при котором достигает максимума величина

$$\mu(\varphi)=\sup\{t: \varphi\in V\cap S_t\}. \qquad (13)$$

Для построения двойственной задачи в $\Phi(B)$ выделяем множество E^* замкнутых полупространств F и его подмножества

$$V^*=\{F\in E^*: V<F\},$$

$$S_t^*=\{F\in E^*: F\cap S_{t+0}=\phi\},\quad S^*=\bigcup_{t\in(-\infty,0)} S_t^*.$$

ЗАДАЧА Ш$'$. Среди допустимых элементов $F\in \in V^*\cap S^*$ найти оптимальный, для которого достигает минимума величина

$$\nu(F)=\inf\{t: F\in V^*\cap S_t^*\}. \qquad (14)$$

ЛЕММА I. Задачи Ш и Ш$'$ удовлетворяют условиям:

I°. Если $V\cap S_{t+0}=\phi$, то $V^*\cap S_t^*\neq\phi$.

2°. Если при некотором $t\in(-\infty,0)$

$$V\cap S_{t'}\neq\phi \quad \text{для всех } t'<t,$$

то $V\cap S_t\neq\phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие I° следует из теоремы Эйдельгайта, а условие 2° является следствием компактности замкнутых множеств $V\cap S_{t'}$.

На основании леммы можно утверждать, что для рассматриваемых задач Ш и Ш$'$ справедлива теорема двойственности, а также вытекающие из нее теорема существования и признак оптимальности (см. введение). Так как в данном случае допустимые элементы в обеих задачах, очевидно, всегда существуют, то в них имеются и оптимальные. Последние характеризуются равенством:

$$\mu(\varphi)=\nu(F).$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА. Каковы бы ни были исходные данные, задача Ш имеет решение. Элемент $\varphi_1\in V$ тогда и только тогда является искомым, когда в пространстве $\Phi(B)$ существует линейный функционал L такой, что

$$\|L\|=1,\ L(\varphi_0-\varphi_1)=\|\varphi_0-\varphi_1\|,\ \max_{\varphi\in V} L(\varphi)=L(\varphi_1). \qquad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко показать, что элементы множества V (и только они) представимы в виде абстрактного интеграла:

$$\varphi_h=\int_U \varphi\cdot h(e), \qquad (15')$$

где h - нормированная мера в U, определенная на системе B_U борелевских множеств $e \subset U$. Отсюда, учитывая результаты предыдущего параграфа, получаем необходимые и достаточные условия существования линейного функционала L, удовлетворяющего соотношениям (I5) при фиксированной функции $\varphi_1 = \varphi_h \in V$. Среди неотрицательных вполне аддитивных по каждому аргументу функций ψ, определенных на $B \times B$, и функций u, определенных на R, должны найтись такие, что

а) $\psi(e,R) - \psi(R,e) = \varphi_0(e) - \varphi_h(e)$ для всех $e \in B$;

б) $u(x) - u(y) \leq r(x,y)$ для любых точек $x, y \in R$;

в) если $\psi(e,e') > 0$, каковы бы ни были окрестности e и e' точек x и y, то для этих точек в предыдущем условии достигается равенство;

г) если $h(e) > 0$ для любой окрестности e элемента $\bar{\varphi} \in U$, то $\int\limits_R u(x)\,\bar{\varphi}(de) = \max\limits_{\varphi \in U} \int\limits_R u(x)\,\varphi(de)$.

Перейдем к анализу задачи IУ. Поведение первого игрока - его стратегию можно характеризовать вероятностной мерой, определенной на системе B_U борелевских множеств компакта $U \subset \Phi(B)$ с метрикой $\rho(\varphi', \varphi'') = \|\varphi' - \varphi''\|$. Каждой такой мере h отнесем вполне аддитивную функцию $\varphi_h \in \Phi(B)$, определяемую абстрактным интегралом (I5$'$). Эти функции, как уже отмечалось, заполняют выпуклую замкнутую оболочку V множества $U \subset \Phi(B)$. Рассмотрим еще множества

$$S_t = \{\varphi \in \Phi(B) : \varphi = t\varphi_0 + \varphi';\ \varphi' \geq 0\}, \quad S = \bigcup_{t \in (0,+\infty)} S_t,$$

где φ_0 - мера, фигурирующая в условии задачи, а φ' - произвольные неотрицательные функции из $\Phi(B)$.

Нетрудно видеть, что оптимальные стратегии первого игрока определяются такими вероятностными мерами h, при которых достигает максимума величина (I3), где супремум пустого множества принимается равным нулю.

Двойственная задача состоит в разыскании замкнутого полупространства F, при котором достигает минимума величина (I4). При этом множества E^*, V^* и S_t^* формально определяются, как и выше, а $S^* = \bigcup\limits_{t \in (0,+\infty)} S_t$.

ЛЕММА 2. Для приведенной пары двойственных задач выполняются условия:

1°. Если $V \cap S_t = \emptyset$, то $V^* \cap S_t^* \neq \emptyset$.

2°. Если при некотором $t \in (0, +\infty)$

$$V \cap S_{t'} \neq \emptyset \quad \text{для всех } t' \in (0, t),$$

то $V \cap S_t \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей лемме, условие 1° следует из теоремы Эйдельгайта, а условие 2° является следствием компактности замкнутых множеств $V \cap S_{t'}$.

Учитывая определение множеств S_t и общий вид линейных функционалов в $\Phi(B)$ (см. § 1, п. 2), на основании доказанной леммы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. В рассматриваемой игре у первого игрока всегда имеется оптимальная стратегия. Вероятностная мера $h \in \Phi(B_V)$ тогда и только тогда определяет таковую, когда при некотором $t_0 \in (0, +\infty)$

$$\varphi_h(e) \geq t_0 \varphi_0(e) \quad \text{для всех } e \in B$$

и для каждого $t > t_0$ существует определенная на R неотрицательная функция u, удовлетворяющая соотношениям:

$$\sup_{x, y \in R,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{r(x,y)} < +\infty,$$

$$\int_R u(x)\, \varphi_0(de) = 1, \quad \sup_{\varphi \in U} \int_R u(x)\, \varphi(de) \leq t.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фигурирующие в теореме функции $u \in Lip'(R)$ определяют стратегии второго игрока, сколь угодно близкие к оптимальным. Достаточно представить R в виде объединения попарно непересекающихся множеств $e_i \in B$, имеющих малые диаметры, и выбирать эти множества с вероятностью

$$p_i = \int_{e_i} u(x)\, \varphi_0(de).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотренная игра допускает сколь угодно точную аппроксимацию обычными матричными играми.

§ 3. Бесконечномерный аналог основной линейной модели производственного планирования

В классической модели (см.[27]) по рассматриваемым ингредиентам (различным видам сырья, производственных факторов, конечных и промежуточных продуктов) фиксируются жесткие ограничения и допустимыми считаются лишь те производственные планы, при которых суммарный объем производства (или затрат) п о к а ж д о м у ингредиенту удовлетворяет соответствующему ограничению. Формальное перенесение этого принципа на случай, когда фигурирующие в задаче ингредиенты образуют метрическое пространство R, нам представляется неоправданным. Если метрика пространства R соответствует сущности рассматриваемой задачи, то близкие по этой метрике ингредиенты должны быть в известном смысле взаимозаменяемыми (например, трубы близких диаметров, различные марки часов, радиоприемников и т.п.). В простейшем случае можно считать, что при замене единицы одного ингредиента единицей другого показатель качества плана ухудшается на величину $r(x,y)$, совпадающую с расстоянием между соответствующими ингредиентами в R.

Другим существенным недостатком предлагавшихся в литературе бесконечномерных аналогов задач линейного программирования (см., напр., [18]) является то, что соответствующие модели не допускают хороших конечномерных аппроксимаций. Попытка освободиться от этого недостатка была сделана еще в работе [29], написанной автором совместно с Л.В.Канторовичем. Рассматриваемая здесь задача, как и задачи предыдущего параграфа, во-первых, допускает сколь угодно точную конечномерную аппроксимацию, во-вторых, в ней предусмотрена возможность замены одних ингредиентов другими с потерями, зависящими от расстояния между соответствующими ингредиентами в метрическом пространстве ингредиентов.

Предположим, что рассматриваемые ингредиенты образуют метрический компакт R с метрикой $r(x,y)$, характеризующей затраты, связанные с заменой единицы одного ингредиента единицей другого. Требуемый ассортимент продукции и имеющиеся ресурсы определяются фиксированным ненулевым элементом φ_0 пространства $\Phi(B)$, состоящего из вполне аддитивных функций, определенных на системе B борелевских множеств $e \in R$. Величина

$\varphi_0(e)$ показывает суммарную потребность в ингредиентах множества $e \in B$. Если $\varphi_0(e) < 0$, то это означает, что ресурсы соответствующих ингредиентов превосходят конечную потребность в них на $|\varphi_0(e)|$.

Планируемые замены одних ингредиентов другими можно характеризовать неотрицательной вполне аддитивной по каждому аргументу функцией $\psi(e, e')$, определенной на $B \times B$. Значение этой функции показывает, в каком количестве ингредиенты множества $e \in B$ предполагается использовать для замены ингредиентов множества $e' \in B$. Связанные с этим затраты определяются по формуле:

$$f_1(\psi) = \iint\limits_{RR} r(x, y)\, \psi(de, de'). \tag{16}$$

Недостающие ингредиенты при необходимости могут приобретаться извне по цене $p(x)$ за единицу. Относительно определенной на R функции p предполагается, что

$$p(x) \geq \sup_{y \in R} r(x, y), \quad |p(x) - p(y)| \leq r(x, y).$$

Благодаря этому условию и предположению о том, что не полностью используемые ингредиенты (непосредственно или в качестве замены других) пропадают, приобретение ингредиентов в рассматриваемой модели может оказаться целесообразным лишь в случае полного использования имеющихся ресурсов и произведенных ингредиентов. Планируемое приобретение ингредиентов извне и планируемые остатки можно характеризовать неотрицательными вполне аддитивными функциями φ_1, $\varphi_2 \in \Phi(B)$. При этом затраты на приобретение ингредиентов определяются по формуле:

$$f_2(\varphi_1) = \int\limits_R p(x)\, \varphi_1(de). \tag{17}$$

Помимо описанных вспомогательных способов (приобретение ингредиентов извне и замена одних из них другими) в модели рассматриваются еще основные производственные способы. Каждый из них характеризуется некоторым элементом $\varphi \in \Phi(B)$, показывающим объем производства и расхода различных ингредиентов при использовании данного способа (с единичной интенсивностью). Кроме того, использование способа сопряжено с затратами, определяемыми функцией $q(\varphi)$, заданной на множестве U элементов φ, отвечающих различным производственным способам. При этом предполагается, что множество $U \subset \Phi(B)$ является замкнутым и

$$\sup_{\varphi \in U} \|\varphi\|_v < +\infty, \ \inf_{\varphi \in U} q(\varphi) > 0, \ |q(\varphi') - q(\varphi'')| \leq \|\varphi' - \varphi''\|,$$

где $\|\varphi\|_v = \varphi^+(R) + \varphi^-(R)$ – полная вариация φ на R, а под $\|\varphi\|$ здесь понимается норма элемента φ в пространстве $\Phi(B)$ (см. § I, п. 2).

Как уже отмечалось, при сделанных предположениях множество U с метрикой

$$\rho(\varphi', \varphi'') = \|\varphi' - \varphi''\|$$

является компактным. Планируемые интенсивности использования различных технологических способов можно характеризовать неотрицательной вполне аддитивной функцией h, определенной на системе B_U борелевских множеств компакта U. При этом объемы производства и расхода различных ингредиентов определяются абстрактным интегралом

$$\varphi_h = \int_U \varphi \cdot h(de), \tag{18}$$

а затраты вычисляются по формуле:

$$f_3(h) = \int_U q(\varphi) \cdot h(de). \tag{19}$$

Таким образом, возникает следующая экстремальная

ЗАДАЧА У. Пусть множество $U \subset \Phi(B)$ и функции $p(x)$ и $q(\varphi)$, определенные, соответственно, на R и U, удовлетворяют перечисленным выше условиям. Кроме того, фиксирован некоторый ненулевой элемент $\varphi_0 \in \Phi(B)$. Требуется определить неотрицательные функции φ_1, $\varphi_2 \in \Phi(B)$, $h \in \Phi(B_U)$ и неотрицательную вполне аддитивную по каждому аргументу функцию $\psi(e, e')$, заданную на $B \times B$, для которых

I.° при всех $e \in B$ имеет место равенство:

$$\varphi_h(e) + \varphi_1(e) - \varphi_2(e) + \psi(R, e) - \psi(e, R) = \varphi_0(e),$$

где вполне аддитивная функция $\varphi_h \in \Phi(B)$ определяется по формуле (18);

2° достигает минимума величина

$$f(\psi, \varphi_1, h) = f_1(\psi) + f_2(\varphi_1) + f_3(h),$$

где $f_1(\psi)$, $f_2(\varphi_1)$ и $f_3(h)$ вычисляются по формулам (16), (17) и (19).

ТЕОРЕМА. При сделанных предположениях относительно исходных данных искомые функции в задаче У существуют. Для того, чтобы таковыми являлись функции φ_1, φ_2, h и ψ, удовлетворяющие условию I°, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенная в R функция u такая, что

а) $0 \leq u(x) \leq p(x)$ для всех $x \in R$;

б) $u(y) - u(x) \leq r(x,y)$ для всех x, $y \in R$;

в) $\int_R u(x)\,\varphi(de) \leq q(\varphi)$ для всех $\varphi \in U$;

г) $u(x) = p(x)$, если $\varphi_1(e) > 0$, какова бы ни была окрестность $e \in B$ точки $x \in R$;

д) $u(x) = 0$, если $\varphi_2(e) > 0$, какова бы ни была окрестность $e \in B$ точки $x \in R$;

е) $u(y) - u(x) = r(x,y)$, если $\psi(e,e') > 0$, каковы бы ни были окрестности e и e' из B точек x, $y \in R$;

ж) $\int_R u(x)\,\varphi(de) = q(\varphi)$, если $h(e) > 0$, какова бы ни была окрестность $e \in B_U$ элемента $\varphi \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство $E = \Phi(B) \times J$, представляющее прямое произведение пространства $\Phi(B)$ (см. гл.III, § I) с вещественной прямой J. В качестве нормы элемента $a = (\varphi, \lambda) \in E$ примем

$$\|a\|_E = \|(\varphi, \lambda)\|_E = \|\varphi\|_{\Phi(B)} + |\lambda|.$$

Каждой паре неотрицательных функций $h \in \Phi(B_U)$ и $\varphi_2 \in \Phi(B)$ сопоставим в E элемент

$$a(h, \varphi_2) = (\varphi_h - \varphi_2, f_3(h)), \tag{20}$$

где вполне аддитивная функция $\varphi_h \in \Phi(B)$ и вещественное число $f_3(h)$ определяются согласно (18) и (19). Совокупность элементов (20), отвечающих всевозможным парам h и φ_2, заполняет в E выпуклый замкнутый конус с вершиной в нулевой точке, который мы обозначим через A. Так как функция φ_0 по условию не является нулевой, а $f_3(h)=0$ только при $h=0$, точка $a_0=(\varphi_0, 0)\in A$.

В силу определения нормы в пространствах $\Phi(B)$ и E для любых функций φ_1, φ_2, h и ψ, удовлетворяющих условию I^0, имеем:

$$f(\psi,\varphi_1,h)=f_1(\psi)+f_2(\varphi_1)+f_3(h)\geq$$
$$\geq\|\varphi_0-\varphi_h+\varphi_2\|_{\Phi(B)}+f_3(h)=\|a_0-a(h,\varphi_2)\|_E. \qquad (21)$$

При этом по теореме 4$'$ (§ I, п. 2) при фиксированных φ_2 и h существуют такие φ_1 и φ_2, удовлетворяющие I^0, что в (21) достигается равенство. Отсюда ясно, что исследуемая задача сводится к разысканию точки $a\in A$, при которой достигает минимума величина

$$f(a)=\|a_0-a\|_E.$$

В этой задаче наилучшего приближения решение всегда существует, ввиду компактности пересечений конуса A с любой замкнутой сферой. Далее, элемент $a_1\in A$ тогда и только тогда является решением задачи, когда в E найдется линейный функционал L такой, что

$$\|L\|=1;\ L(a_0-a_1)=\|a_0-a_1\|_E;\ L(a)\leq 0,\ a\in A.$$

Последнее утверждение было проверено в предыдущем параграфе для случая, когда A – произвольное выпуклое множество. Заметим, что оно является следствием теоремы А.Л.Гаркави [8] и для более общего случая доказывается ниже (гл. IУ, § I).

Из приведенных фактов и общего вида линейных функционалов в $\Phi(B)$ вытекает справедливость доказываемой теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь рассмотрена простейшая модель. Полученные результаты можно обобщить на случай, когда на функцию $p(x)$, выражающую затраты, связанные с приобретением ингредиентов извне, наложены менее жесткие ограничения. Кроме того, не обязательно считать все ингредиенты взаимозаменяемыми. Достаточно допустить, что они разбиваются на конечное число групп, внутри которых возможны замены одних ингредиентов другими с дополнительными затратами, определяемыми расстоянием между соответствующими ингредиентами.

ГЛАВА IУ

ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

§ I. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве*)

В заметке устанавливается признак решения следующей экстремальной задачи.

ЗАДАЧА. В линейном нормированном пространстве E заданы выпуклое множество M и точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Требуется найти точку $x \in M$, в которой достигает минимума функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \|a_i - x\|,$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ - фиксированные положительные числа.

Поставленная задача в частном случае, когда $n = 1$, совпадает с классической задачей наилучшего приближения (см. [32, 38, 8, 57]). При $n > 1$ и точках $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ задача сводится к известной задаче Штейнера, которая обычно рассматривается на эвклидовой плоскости. Если $n = 2$ и отрезок, соединяющий точки a_1 и a_2, не пересекается с множеством M, можно считать, что в задаче ищется точка множества M, отражающая луч из точки a_1 в точку a_2.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы точка $x_0 \in M$ являлась решением приведенной задачи, необходимо и достаточно существование линейных функционалов $L_1, L_2, \ldots, L_n$, удовлетворяющих условиям:

1°. $\|L_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем в этих неравенствах достигается равенство для всех i, при которых $a_i \neq x_0$;

2°. $L_i(a_i - x_0) = \|a_i - x_0\|$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

3°. $\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x - x_0) \leq 0$ для всех $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 - решение рассматриваемой за-

*) В качестве этого параграфа помещена работа автора [60].

дачи. При $n=1$ и $a_1=x_0$ условиям теоремы удовлетворяет тривиальный функционал

$$L_1(x)=0 \quad \text{для всех } x\in E .$$

В противном случае рассмотрим линейное нормированное пространство

$$\mathscr{E}=\{\mathscr{v}=(x_1,x_2,\dots,x_n): x_i\in E,\ i=1,2,\dots,n\},\ \|\mathscr{v}\|=\sum_{i=1}^{n} m_i\|x_i\|,$$

представляющее прямое произведение n экземпляров исходного пространства. Так как x_0 - решение задачи, выпуклое множество

$$\mathfrak{M}=\{\mathscr{v}=(x,x,\dots,x): x\in M\}$$

из $\mathscr{E}$ не содержит внутренних точек сферы

$$\mathscr{S}_\rho(\mathfrak{a})=\{\mathfrak{y}\in\mathscr{E}: \|\mathfrak{a}-\mathfrak{y}\|\le\rho\}$$

с центром в точке $\mathfrak{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ радиуса $\rho=\|\mathfrak{a}-\mathscr{v}_0\|$, где $\mathscr{v}_0=(x_0,x_0,\dots,x_0)$. В силу теоремы Эйдельгайта существует нетривиальный линейный функционал $\mathscr{L}$ такой, что

$$\mathscr{L}(\mathscr{v})\le\mathscr{L}(\mathfrak{y}) \ \text{для всех}\ \mathscr{v}\in\mathfrak{M},\ \mathfrak{y}\in\mathscr{S}_\rho(\mathfrak{a}). \qquad (1)$$

Не уменьшая общности можно считать, что $\|\mathscr{L}\|=1$.

Каждый линейный функционал в $\mathscr{E}$ представим в виде:

$$\mathscr{L}(\mathscr{v})=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot L_i(x_i),$$

где L_i - линейный функционал в E . При этом

$$\|\mathscr{L}\|=\max_{i=1,\dots,n}\|L_i\|.$$

Для любого $\mathfrak{z}\in\mathscr{E}$ с нормой, не превосходящей

$$\rho=\|\mathfrak{a}-\mathscr{v}_0\|=\sum_{i=1}^{n} m_i\|a_i-x_0\|,$$

на основании (1) имеем:

$$\mathscr{L}(\mathscr{v}_0)\le\mathscr{L}(\mathfrak{a}-\mathfrak{z}),\ \mathscr{L}(\mathfrak{z})\le\mathscr{L}(\mathfrak{a}-\mathscr{v}_0).$$

Учитывая, что

$$\|\mathscr{L}\|=\max_{i=1,\dots,n}\|L_i\|=1, \qquad (2)$$

получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(a_i - x_o) = \mathcal{L}(\alpha - \mathcal{V}_o) = \sup_{\|\jmath\| \le \rho} \mathcal{L}(\jmath) = \rho = \sum_{i=1}^{n} m_i \|a_i - x_o\|. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что функционалы $L_1, L_2, \ldots, L_n$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы. Выполнение для них соотношения 3^0 непосредственно следует из (I), где достаточно положить $\mathcal{Y} = \mathcal{V}_o$.

В сторону достаточности теорема проверяется значительно проще. Действительно, если точка $x_o \in M$ и линейные функционалы $L_1, L_2, \ldots, L_n$ удовлетворяют условиям I^0, 2^0 и 3^0, то для любого $x \in M$ имеем:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \|a_i - x\| \ge \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(a_i - x) = f(x_o) - \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x - x_o) \ge f(x_o),$$

т.е. x_o - решение рассматриваемой задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если M - подпространство или выпуклый конус (с вершиной в нуле), условие 3^0 доказанной теоремы сводится, соответственно, к следующим условиям (4) или (5) :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x) = 0 \text{ для всех } x \in M ; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x) \le 0 \text{ для всех } x \in M, \ \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x_o) = 0. \quad (5)$$

Проверять эти соотношения, очевидно, достаточно на подмножествах $M' \subset M$, линейная или выпуклая коническая оболочка которых плотна в M.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть M - многогранник, заданный параметрически, т.е.

$$M = \{x = \sum_{j=1}^{u} \xi_j x_j + \sum_{k=1}^{v} \eta_k y_k + \sum_{\ell=1}^{w} \zeta_\ell z_\ell\}, \quad (6)$$

где x_j, y_k, z_ℓ - фиксированные элементы E, ξ_j - произвольные вещественные числа, η_k - произвольные неотрицательные числа, ζ_ℓ - неотрицательные числа, в сумме равные единице. Если

$$x_o = \sum_{j=1}^{u} \xi_j^o x_j + \sum_{k=1}^{v} \eta_k^o y_k + \sum_{\ell=1}^{w} \zeta_\ell^o z_\ell, \quad (7)$$

то условие 3^0 теоремы сводится к следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(x_j)=0,\ j=1,\dots,u;\ \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(y_\kappa)\leq 0,\ \kappa=1,\dots,v; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(y_\kappa)=0 \text{ при } \eta_\kappa^o>0; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i L_i(z_s)=\max_{\ell=1,\dots,w} \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(z_\ell) \text{ при } \zeta_s^o>0. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Учитывая предыдущее замечание, легко наметить в общих чертах процесс последовательного приближения к решению рассматриваемой задачи для случая, когда множество M - многогранник, заданный в форме (6), а пространство E таково, что для каждого ненулевого элемента $x\in E$ существует единственный линейный функционал L, удовлетворяющий условию:

$$\| L \| = 1,\ L(x) = \| x \|,$$

причем этот функционал мы умеем конструировать. В этом случае по любому элементу (7), не совпадающему ни с одной из заданных точек a_i, на основании условий I^0 и 2^0 определяются линейные функционалы L_i и для них проверяются соотношения (8), (9) и (10). Если, по крайней мере, одно из них нарушается, то рассматриваемый элемент (7) не является решением и легко находится направление его улучшения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следующая экстремальная задача, тесно связанная с исследуемой, является двойственной к ней в смысле определения статьи [57].

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА. При данных предыдущей задачи среди линейных функционалов, по норме не превосходящих 1, найти такие функционалы $L_1, L_2, \dots, L_n$, для которых достигает максимума функция

$$\varphi(L_1, L_2, \dots, L_n) = \inf_{x\in M} \sum_{i=1}^{n} m_i L_i(a_i - x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотренную задачу можно обобщить, заменив в ней конечное множество точек a_i множеством $\{a_q : q\in Q\}$ более общей природы и функцию $f(x)$ (типа нормы в L) произвольной монотонной нормой в пространстве вещественнозначных функций, определенных на Q.

§ 2. Признаки наименее уклоняющегося элемента в различных конкретных пространствах[ж)]

Рассмотренная в предыдущем параграфе задача, как отмечалось, при $n=1$ совпадает с классической задачей наилучшего приближения. Следуя терминологии теории наилучших приближений, элемент x_0, представляющий решение задачи, будем называть *наименее уклоняющимся* от заданной системы точек. Доказанная теорема и замечания I и 2 (стр. 109) позволяют сформулировать признаки наименее уклоняющихся элементов в различных конкретных линейных нормированных пространствах. При этом специфика пространства учитывается лишь при описании совокупности линейных функционалов L, которые при фиксированном ненулевом элементе $x \in E$ удовлетворяют условию:

$$\|L\|=1, \quad L(x)=\|x\|.$$

Такие функционалы обычно называют *экстремальными*.

Особенности различных нормировок достаточно полно проявляются уже в случае конечномерных пространств. Приведем характеристики совокупности экстремальных функционалов для пространств таблицы I (стр. II2). Первые три из этих пространств строятся на основе R^n. Каждый линейный функционал L в них имеет вид:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ,$$

где α_i - фиксированные числа, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$. Следующие семь пространств отвечают различным нормировкам совокупности вещественных прямоугольных матриц, размерности $m\times n$. Каждый линейный функционал L здесь имеет вид:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_{ij},$$

где α_{ij} - фиксированные числа, а $x=[x_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$.

ж) В этом и следующем параграфе излагаются результаты работы [63].

Таблица I

Наименование пространства	Норма элемента x	Норма функционала L	Сопряженное пространство
R_p^n	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert\alpha_i\rvert^{p'}\right)^{1/p'}$	$R_{p'}^n$
R_1^n	$\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert$	$\max_{i=1,\dots,n}\lvert\alpha_i\rvert$	R_∞^n
R_∞^n	$\max_{i=1,\dots,n}\lvert x_i\rvert$	$\sum_{i=1}^{n}\lvert\alpha_i\rvert$	R_1^n
$(R_p^n)_q^m$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert x_{ij}\rvert^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert\alpha_{ij}\rvert^{p'}\right)^{q'/p'}\right)^{1/q'}$	$(R_{p'}^n)_{q'}^m$
$(R_p^n)_1^m$	$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert x_{ij}\rvert^p\right)^{1/p}$	$\max_{i=1,\dots,m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert\alpha_{ij}\rvert^{p'}\right)^{1/p'}$	$(R_{p'}^n)_\infty^m$
$(R_p^n)_\infty^m$	$\max_{i=1,\dots,m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert x_{ij}\rvert^p\right)^{1/p}$	$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert\alpha_{ij}\rvert^{p'}\right)^{1/p'}$	$(R_{p'}^n)_1^m$
$(R_1^n)_q^m$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert x_{ij}\rvert\right)^q\right)^{1/q}$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\max_{j=1,\dots,n}\lvert\alpha_{ij}\rvert\right)^{q'}\right)^{1/q'}$	$(R_\infty^n)_{q'}^m$
$(R_\infty^n)_q^m$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\max_{j=1,\dots,n}\lvert x_{ij}\rvert\right)^q\right)^{1/q}$	$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lvert\alpha_{ij}\rvert\right)^{q'}\right)^{1/q'}$	$(R_1^n)_{q'}^m$
$(R_1^n)_\infty^m$	$\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_{ij}\rvert$	$\sum_{i=1}^{m}\max_{j=1,\dots,n}\lvert\alpha_{ij}\rvert$	$(R_\infty^n)_1^m$
$(R_\infty^n)_1^m$	$\sum_{i=1}^{m}\max_{j=1,\dots,n}\lvert x_{ij}\rvert$	$\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}\lvert\alpha_{ij}\rvert$	$(R_1^n)_\infty^m$

Далее, относительно чисел p, p', q, q' в таблице I предполагается:

$$1<p<+\infty,\ 1<q<+\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

I. Используя известные условия достижения равенства в неравенстве Гёльдера, получаем характеристику экстремальных функционалов в R_p^n:

$$\alpha_i=\left(\frac{|x_i|}{\|x\|}\right)^{p-1}\operatorname{sign} x_i .$$

2. В R_1^n экстремальные функционалы характеризуются условием:

$$\alpha_i=\operatorname{sign} x_i,\ i\in\mathcal{J}=\{i: x_i\neq 0\};\ |\alpha_i|\leq 1,\ i\bar{\in}\mathcal{J}.$$

3. В $R_\infty^n: \alpha_i=0,\ i\bar{\in}\mathcal{J}=\{i: |x_i|=\|x\|\};\ \alpha_i=c_i\operatorname{sign} x_i,$
$i\in\mathcal{J},\ c_i\geq 0,\ \sum_{i\in\mathcal{J}} c_i=1.$

4. В $(R_p^n)_q^m: \alpha_{ij}=|x_{ij}|^{p-1}\left(\sum_{j=1}^n|x_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}-1}\operatorname{sign} x_{ij}$.

5. В $(R_p^n)_1^m: \alpha_{ij}=|x_{ij}|^{p-1}\left(\sum_{j=1}^n|x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}-1}\operatorname{sign} x_{ij},$
$i\in\mathcal{J}=\{i: \sum_{j=1}^n|x_{ij}|>0\};\ \sum_{j=1}^n|\alpha_{ij}|^{p'}\leq 1,\ i\bar{\in}\mathcal{J}.$

6. $(R_p^n)_\infty^m: \alpha_{ij}=0,\ i\bar{\in}\mathcal{J}=\{i: \sum_{j=1}^n|x_{ij}|^p=\|x\|^p\};$

$\alpha_{ij}=c_i|x_{ij}|^{p-1}\operatorname{sign} x_{ij},\ i\in\mathcal{J},\ c_i\geq 0,\ \sum_{i\in\mathcal{J}} c_i=1.$

7. В $(R_1^n)_q^m: \alpha_{ij}=\left(\sum_{j=1}^n|x_{ij}|\right)^{q-1}\operatorname{sign} x_{ij},\ (i,j)\in M=$
$=\{(i,j): x_{ij}\neq 0\};\ |\alpha_{ij}|\leq\left(\sum_{j=1}^n|x_{ij}|\right)^{q-1},\ (i,j)\bar{\in} M.$

8. В $(R_\infty^n)_q^m: \alpha_{ij}=0,\ (i,j)\bar{\in} M=\{(i,j): |x_{ij}|=\max_{j=1,\dots,n}|x_{ij}|\};$

$\alpha_{ij}=c_{ij}\left(\max_{j=1,\dots,n}|x_{ij}|\right)^{q-1}\operatorname{sign} x_{ij},\ (i,j)\in M,\ c_{ij}\geq 0,\ \sum_j c_{ij}=1.$

9. В $(R_1^n)_\infty^m: \alpha_{ij}=0,\ i\bar{\in}\mathcal{J}=\{i: \sum_{j=1}^n|x_{ij}|=\|x\|\};\ \alpha_{ij}=$
$=c_i\operatorname{sign} x_{ij},\ i\in\mathcal{J},\ j\in\mathcal{J}_i=\{j: x_{ij}\neq 0\};\ |\alpha_{ij}|\leq c_i,\ i\in\mathcal{J},$
$j\bar{\in}\mathcal{J}_i,\ c_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^m c_i=1.$

10. В $(R^n_\infty)^m_1: \alpha_{ij} = 0, (i,j) \bar{\in} M = \{(i,j) : |x_{ij}| = \max_{j=1,\dots,n} |x_{ij}|\}$,

$$\alpha_{ij} = c_{ij}\, sign\, x_{ij},\ (i,j) \in M,\ i \in \{i : \max_{j=1,\dots,n} |x_{ij}| > 0\},$$

$$c_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 1 (i \in \mathcal{J}), \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \leq 1 (i \bar{\in} \mathcal{J}).$$

Вытекающие из приведенных характеристик экстремальных функционалов признаки наименее уклоняющихся элементов строятся по одной и той же схеме. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением одного примера.

Пусть в пространстве $(R^n_p)^m_\infty$ прямоугольных матриц при заданных элементах

$$a^\kappa = [a^\kappa_{ij}],\ \kappa = 1, 2, \dots, p,\ x^\ell = [x^\ell_{ij}],\ \ell = 1, 2, \dots, r,$$

требуется найти матрицу

$$x^\circ = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda^\circ_\ell x^\ell, \tag{11}$$

минимизирующую функцию

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{p} \| a^\kappa - x^\circ \|.$$

Из результатов предыдущего параграфа (теорема и замечание 2) и приведенной в пункте 6 характеристики экстремальных функционалов непосредственно следует

ТЕОРЕМА. Матрица (11), отличная от заданных матриц a^κ, тогда и только тогда является решением поставленной задачи, когда существуют числа

$$c^\kappa_i,\ \kappa = 1, 2, \dots, p,\ i \in \mathcal{J}_\kappa = \{i : \sum_{j=1}^{n} |a^\kappa_{ij} - x^\circ_{ij}|^p = \|a^\kappa - x^\circ\|\},$$

удовлетворяющие условиям:

$$c^\kappa_i \geq 0, \sum_{i \in \mathcal{J}_\kappa} c^\kappa_i = 1,\ \kappa = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sum_{\kappa=1}^{p} \sum_{i \in \mathcal{J}_\kappa} c^\kappa_i \sum_{j=1}^{n} |a^\kappa_{ij} - x^\circ_{ij}|^{p-1} sign.(a^\kappa_{ij} - x^\circ_{ij}) x^\ell_{ij} = 0,\ \ell = 1, \dots, r. \tag{12}$$

Поясним геометрический смысл полученного признака. Для этого в R^r рассмотрим точки

$$b_i^k, \quad k=1,2,\ldots,p, \; i\in \mathcal{J}_k,$$

с координатами b_{il}^k ($l=1,2,\ldots,r$), совпадающими с соответствующими значениями внутренних сумм в (12), и многогранники

$$M_k=\{b\in R^r: b=\sum_{i\in \mathcal{J}_k} c_i b_i^k,\ c_i\geq 0,\ \sum_{i\in\mathcal{J}_k} c_i=1\},$$
$$M=\sum_{k=1}^{p} M_k=\{b\in R^r: b=\sum_{k=1}^{p} b^k,\ b^k\in M_k\}.$$

Очевидно, условия теоремы выполняются тогда и только тогда, когда многогранник M содержит нулевую точку. Заметим, что для решения этого вопроса могут использоваться численные методы линейного программирования.

По аналогии с рассмотренными конечномерными пространствами могут быть построены и исследованы пространства последовательностей $l^p(1<p<+\infty), l, c_0$, пространства бесконечных матриц, функциональные пространства $L^p(1<p<+\infty), L, C$ и, наконец, пространства векторных функций. Например, аналогом пространства $(R_\infty^n)_1^m$ является пространство непрерывных вектор-функций

$$f(\tau)=(f_1(\tau), f_2(\tau),\ldots, f_m(\tau)),\ f_i\in C[0,1]\ (i=1,2,\ldots,m), \tag{13}$$

нормированных следующим образом:

$$\|f\|=\sum_{i=1}^{m}\max_{\tau\in[0,1]}|f_i(\tau)|. \tag{14}$$

Каждый линейный функционал здесь имеет вид:

$$L(f)=\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 f_i(\tau)\,d\alpha_i(\tau),$$

где $\alpha_i(\tau)$ – функции ограниченной вариации. При этом

$$\|L\|=\max_{i=1,\ldots,m}\ \overset{1}{\underset{0}{V}}\alpha_i(\tau),$$

где через $\overset{1}{\underset{0}{V}}\alpha_i(\tau)$ обозначена вариация функции $\alpha_i(\tau)$ в сегменте $[0,1]$.

С помощью указанных бесконечномерных пространств по описанной схеме могут быть установлены признаки наименее уклоняющихся элементов при различных реализациях задачи предыдущего параграфа. В частности, на этом пути получаются все известные результаты теории наилучших приближений (см., напр., [67]), относящиеся к характеристике наименее уклоняющихся элементов в задаче приближения заданного элемента обобщенными многочленами (элементами конечномерного подпространства).

§ 3. Приближение обобщенными многочленами в одном пространстве вектор-функций

Здесь мы остановимся особо на изучении следующей задачи наилучшего приближения.

ЗАДАЧА. В пространстве вектор-функций (I3), нормированных согласно (I4), при заданных элементах

$$f(\tau)=(f_1(\tau),\, f_2(\tau), \dots, f_m(\tau)), \tag{I5}$$

$$\varphi^K(\tau)=(\varphi_1^K(\tau),\, \varphi_2^K(\tau), \dots, \varphi_m^K(\tau)),\ K=1,2,\dots,p, \tag{I6}$$

определить вектор

$$y=(y_1, y_2, \dots, y_p), \tag{I7}$$

для которого достигает минимума величина

$$\nu(y)=\Big\|\sum_{K=1}^{p} y_K \varphi^K - f\Big\| = \sum_{i=1}^{m} \max_{\tau\in[0,1]} \Big|\sum_{K=1}^{p} y_K \varphi_i^K(\tau) - f_i(\tau)\Big|. \tag{I8}$$

При этом предполагается, что f не является линейной комбинацией элементов φ^K.

Для анализа этой задачи в R^{p+1} рассмотрим следующие множества:

$$\tilde{A}_i=\{a^{i\tau}=(\varphi_i^1(\tau),\, \varphi_i^2(\tau), \dots, \varphi_i^p(\tau), -f_i(\tau)) : \tau\in[0,1]\}, \tag{I9}$$

$$A_i=\{a\in R^{p+1} : a=\sum_{\ell=0}^{r} h_\ell a^\ell,\ \sum_{\ell=0}^{r}|h_\ell|=1,\ a^\ell\in \tilde{A}_i\}, \tag{20}$$

$$A=\sum_{i=1}^{m} A_i=\{a\in R^{p+1} : a=\sum_{i=1}^{m} a^i,\ a^i\in A_i\}. \tag{21}$$

Ввиду непрерывности функций (15,16), множества (19) - ограниченные и замкнутые. А тогда таковыми являются также построенные на их основе центрально-симметричные выпуклые множества (20) и (21). Отметим, что каждая точка множества A представима в виде:

$$a=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{z_i} h_{i\ell}\, a^{i\tau_{i\ell}},\ h_{i\ell}\neq 0,\ \sum_{\ell=0}^{z_i}|h_{i\ell}|=1,$$

$$a^{i\tau_{i\ell}}=(\varphi_i^1(\tau_{i\ell}),\dots,\varphi_i^p(\tau_{i\ell}),-f_i(\tau_{i\ell})),\ i=1,\dots,m,\ \ell=0,1,\dots,z_i. \quad (22)$$

При этом для граничных точек (относительно линейной оболочки множества A) существуют представления (22), в которых $\sum_{i=1}^{m} z_i\leq p$ и точки $\tau_{i\ell}\in[0,1]$, отвечающие одному и тому же индексу i, между собой не совпадают.

Рассмотрим крайнюю точку пересечения последней координатной оси с множеством A :

$$a^*=t^*e^{p+1}=(0,0,\dots,0,t^*),\ t^*=max\{t: te^{p+1}\in A\},$$

и покажем, что $t^*>0$. Если бы $t^*=0$, то цетрально-симметричное выпуклое множество A целиком лежало бы в некоторой гиперплоскости H , пересекающейся с последней координатной осью в одной нулевой точке. Уравнение такой гиперплоскости приводится к виду:

$$\sum_{k=1}^{p} y_k a_k + a_{p+1}=0,$$

где y_k - фиксированные числа, a_k - текущие координаты. Вместе с множеством (21) гиперплоскость H , очевидно, должна содержать множества (19) и (20). А тогда

$$\sum_{k=1}^{p} y_k \varphi_i^k(\tau)-f_i(\tau)=0,\ i=1,2,\dots,m,\ \tau\in[0,1],$$

и, следовательно, вектор-функция (15) является линейной комбинацией вектор-функций (16), что противоречит условию.

Далее, так как множество A содержит нулевой элемент и отличную от него точку a^* , луч

$$N=\{b\in R^{p+1}: b=te^{p+1},\ t\geq t^*\}$$

содержится в линейной оболочке множества A . При этом N не пересекается с ядром множества A (т.е. с совокупностью внутренних точек относительно линейной оболочки A). На основании предложения, приведенного в первой части доказательства леммы 3 (гл. II, § 3), существует гиперплоскость H , строго отделяющая от N ядро множества A . Уравнение такой гиперплоскости приводится к виду:

$$L(a)=\sum_{K=1}^{p} y_K a_K + a_{p+1} = t^*,$$

где y_K - фиксированные числа, a_K - текущие координаты. Для соответствующего вектора (I7) имеем:

$$\nu(y)=\sum_{i=1}^{m}\max_{\tau\in[0,1]}\left|\sum_{K=1}^{p} y_K \varphi_i^K(\tau)-f_i(\tau)\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\max_{a\in\bar{A}_i}|L(a)|=\sum_{i=1}^{m}\max_{a\in A_i}L(a)=\max_{a\in A}L(a)=L(a^*)=t^*.$$

Для любого другого вектора (I7):

$$\nu(y)=\max_{a\in A}L(a)\geqslant L(a^*)=t^*.$$

Следовательно, в исследуемой задаче наилучшего приближения решение всегда существует, и соответствующие векторы (I7) характеризуются равенством:

$$\nu(y)=t^*. \tag{23}$$

С другой стороны, представляя точку a^* в форме (22), получаем:

$$t^*=L(a^*)=L\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{r_i}h_{i\ell}a^{i\tau_{i\ell}}\Big)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=0}^{r_i}|h_{i\ell}|(\operatorname{sign}h_{i\ell})L(a^{i\tau_{i\ell}})\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\max_{\tau\in[0,1]}|L(a^{i\tau})|\sum_{\ell=0}^{r_i}|h_{i\ell}|=\sum_{i=1}^{m}\max_{\tau\in[0,1]}|L(a^{i\tau})|=\nu(y).$$

Отсюда ясно, что для вектора (I7) тогда и только тогда имеет место (23), когда точки $a^{i\tau_{i\ell}}$, фигурирующие в представлении a^* в форме (22), удовлетворяют условию:

$$(\operatorname{sign}h_{i\ell})\Big(\sum_{K=1}^{p}y_K\varphi_i^K(\tau_{i\ell})-f_i(\tau_{i\ell})\Big)=\max_{\tau\in[0,1]}\left|\sum_{K=1}^{p}y_K\varphi_i^K(\tau)-f_i(\tau)\right|.$$

Для окончательной формулировки полученного признака удобно ввести следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точку $\tau \in [0,1]$ назовем точкой <u>максимального уклонения</u> i-ых компонент вектор-функций φ и f, если

$$|\varphi_i(\tau) - f_i(\tau)| = \max_{\tau \in [0,1]} |\varphi_i(\tau) - f_i(\tau)|.$$

При этом будем говорить, что τ является точкой положительного уклонения, если $\varphi_i(\tau) - f_i(\tau) \geq 0$, и точкой отрицательного уклонения, если $\varphi_i(\tau) - f_i(\tau) \leq 0$.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы вектор (17) представлял решение исследуемой задачи наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы среди точек максимального уклонения i-ых компонент вектор-функций $\varphi = \sum_{k=1}^{p} y_k \varphi^k$ и f существовали такие точки

$$\tau_{i0}, \tau_{i1}, \ldots, \tau_{i r_i} \; (r_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; \sum_{i=1}^{m} r_i \leq p),$$

при которых совместна следующая система условий относительно чисел h_{il}:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=0}^{r_i} h_{il} \varphi_i^k(\tau_{il}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$\sum_{l=0}^{r_i} |h_{il}| = 1, \; \operatorname{sign} h_{il} = \varepsilon_{il}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; l = 0, 1, \ldots, r_i,$$

где $\varepsilon_{il} = 1$, если τ_{il} - точка положительного уклонения, и $\varepsilon_{il} = -1$, если τ_{il} - точка отрицательного уклонения.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В проведенных рассуждениях мы нигде существенно не опирались на то, что рассматриваемые вектор-функции определены в [0,I]. Областью их задания мог служить произвольный метрический компакт. Поэтому полученные результаты остаются в силе, в частности, когда вектор-функции определены на ограниченном замкнутом множестве в R^n или на конечном множестве точек. В последнем случае речь идет, очевидно, о приближении обобщенными многочленами в пространстве матриц $(R^n_\infty)^m_1$. При этом множества $\tilde{A}_i$ содержат конечное число элементов, и потому выпуклые множества A_i и A являются многогранниками.

Следовательно, соответствующие задачи укладываются в рамки линейного программирования. Более того, такого типа задачи, где основной многогранник A является алгебраической суммой многогранников A_i, заданных своими вершинами, были выделены в специальный класс (см. гл.II, § I). При решении таких задач трудоемкость алгорифма определяется в основном числом p и мало зависит от m и n (см. Приложение, § 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Указанные методы позволяют практически решать исследуемую задачу и в общем случае, так как последняя с любой степенью точности может быть сведена к соответствующей задаче в $(R^n_\infty)^m_1$ (каждой вектор-функции сопоставляется матрица значений ее компонент на достаточно густой ε-сети). Существенно, что трудоемкость алгорифма, как отмечалось, мало зависит от n, т.е. от числа узлов выбранной ε-сети. При этом конечно предполагается использование алгорифмов, учитывающих характер задания многогранника A, т.е. алгорифмов, идея которых изложена в Приложении (§ 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотренный подход применим также к анализу некоторых более сложных задач приближения. Например, в задаче приближения обобщенными многочленами с неотрицательными коэффициентами в пространстве $(R^n_\infty)^m_1$ (или его обобщении на случай вектор-функций) достаточно множество (2I) расширить до

$$A^- = \{a \in R^{p+1} : a = a' - a'',\ a' \in A,\ a'' \geqslant 0\},$$

где неравенство $a \geqslant 0$ означает, что все компоненты вектора a - неотрицательные. Численные методы решения задачи при этом, по существу, не меняются.

§ 4. О равномерном приближении непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций*)

I°. Численным методом равномерного приближения непрерывной функции обычными и обобщенными многочленами (линейными комби-

*) В качестве этого параграфа помещена работа автора [52].

нациями фиксированных непрерывных функций) посвящено значительное число работ (в частности, недавно вышедшая большая монография Е.Я.Ремеза [I]). Родственный же вопрос об алгорифмах равномерного приближения рациональными функциями до сих пор остается открытым. Вместе с тем во многих случаях по самому физическому смыслу рассматриваемой функции ее необходимо приближать именно рациональными функциями. С характерным примером такого рода автор встретился недавно при консультации геофизика С.В.Шалаева (Ленинградский горный институт), занимающегося вопросами количественного истолкования результатов магнитной разведки.

Нам представляется, что излагаемые результаты в известной мере восполняют отмеченный пробел.

2°. Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{m+n}(t) \tag{24}$$

- фиксированные вещественнозначные непрерывные функции, определенные на некотором метрическом компакте T, причем среди дробей

$$R(x,t) = \frac{P(x,t)}{Q(x,t)} = \frac{x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \ldots + x_m\varphi_m(t)}{x_{m+1}\varphi_{m+1}(t) + \ldots + x_{m+n}\varphi_{m+n}(t)} \tag{25}$$

имеются такие, в которых знаменатель $Q(x,t) > 0$ при всех $t \in T$. Совокупность соответствующих векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ обозначим через X. Отметим, что в важном частном случае, когда $T = [a,b]$ - отрезок вещественной оси, а $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ - алгебраические или тригонометрические многочлены, любая ограниченная на T функция вида (25) (в данном случае, алгебраическая или тригонометрическая рациональная функция) может быть сведена к такой, где $x \in X$. Систему (24), обладающую указанным свойством, будем называть **согласованной**.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ и данного положительного числа ν найти вектор $x \in X$ такой, что

$$|f(t) - R(x,t)| < \nu, \quad t \in T.$$

Для анализа задачи в $(m+n)$-мерном пространстве рассматривается ограниченное выпуклое замкнутое множество $M(f,\nu)$, представляющее выпуклую оболочку точек

$$\alpha^+(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t),(-f(t)-\nu)\varphi_{m+1}(t),\ldots,(-f(t)-\nu)\varphi_{m+n}(t)),$$
$$\alpha^-(t)=(-\varphi_1(t),\ldots,-\varphi_m(t),(f(t)-\nu)\varphi_{m+1}(t),\ldots,(f(t)-\nu)\varphi_{m+n}(t)), \quad (26)$$

где $t\in T$. Вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{m+n})$, очевидно, тогда и только тогда представляет решение задачи, когда опорная к $M(f,\nu)$ гиперплоскость

$$(x,\alpha)=\eta \quad , \text{ где } \eta=\max_{\alpha\in M(f,\nu)}(x,\alpha),$$

строго отделяет от этого множества точку $\theta=(0,0,\ldots,0)$, т.е. $\eta<0$.

Следовательно, задача сводится к разысканию указанной гиперплоскости и имеет решение тогда и только тогда, когда $\theta\,\overline{\in}\, M(f,\nu)$.

Если T – конечное точечное множество, то для решения задачи можно предложить ряд эффективных численных методов, которые, в принципе, не сложнее алгорифмов, применяющихся для решения задачи равномерного полиномиального приближения (на конечном точечном множестве). Действительно, в этом случае для определения положения точки θ и разыскания искомой гиперплоскости можно воспользоваться задачей о крайней точке пересечения некоторой оси (проходящей через фиксированную точку $a\in M(f,\nu)$ и точку θ) с многогранником $M(f,\nu)$, которая была рассмотрена нами в работе [44]. Для решения последней можно применить, в частности, алгорифм, изложенный в [44], а также любой из численных методов линейного программирования (см., например, Л.В.Канторович [28], стр. 272-341).

В случае произвольного компакта T можно рекомендовать решать задачу на достаточно густой конечной ε -сети. При этом, если все рассматриваемые функции удовлетворяют условию Липшица с известными константами, нетрудно дать простые оценки, позволяющие судить о том, будет ли полученное для ε -сети решение также решением исходной задачи.

3^0. Для простоты изложения будем предполагать здесь систему функций (24) согласованной.

ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ. Для заданной на T непрерывной функции $f(t)$ найти вектор $x_0\in X$ такой, что

$$\max_{t\in T}|f(t)-R(x_0,t)| = \inf_{x\in X}\max_{t\in T}|f(t)-R(x,t)| = \nu^*.$$

Из предыдущего ясно, что при $\nu > \nu^*$ точка $\theta \overline{\in} M(f,\nu)$, а при $\nu \leq \nu^*$ точка $\theta \in M(f,\nu)$. При сделанном предположении относительно системы (24) нетрудно показать, что θ лежит на границе $M(f,\nu)$ лишь при $\nu = \nu^*$ и, по крайней мере, одна из гиперплоскостей, проходящих через θ и опорных к $M(f,\nu^*)$, имеет уравнение $(x_0,\alpha)=0$, где вектор $x_0 \in X$ и, следовательно, является решением задачи.

Отсюда можно получить ряд результатов, аналогичных известным для случая приближения обобщенными многочленами и частично для случая приближения рациональными функциями. Например, вектор $x \in X$ тогда и только тогда является решением задачи наилучшего приближения, когда

$$\max_{t\in T}|f(t)-R(x,t)| = \nu$$

достигается при некоторых $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(r \leq m+n)$ таких, что θ принадлежит выпуклой оболочке соответствующих точек (26):

$$\alpha^{\varepsilon_1}(t_1), \alpha^{\varepsilon_2}(t_2), \ldots, \alpha^{\varepsilon_r}(t_r),$$

где ε_s обозначает знак плюс или минус в зависимости от знака величины $R(x,t_s)-f(t_s)$.

Относительно численных методов решения задачи наилучшего приближения укажем, что для случая конечного точечного множества можно дать конечный алгорифм, в котором, однако, на каждом шаге приходится решать уравнения высших порядков. В связи с этим нам представляется более целесообразным получать приближенное решение путем решения рассмотренной выше основной задачи при нескольких различных ν.

В заключение заметим, что результаты этого пункта в известной мере переносятся и на несогласованные системы (24). При этом, правда, приходится расширить множество векторов X.

§ 5. Еще один пример задачи наилучшего приближения

В [57] приводится следующая задача наилучшего приближения, близкая по постановке к рассматривавшейся ранее С.Я.Хавинсоном [70].

ЗАДАЧА. В линейном нормированном пространстве E выделены непустое выпуклое множество M и точка $b_0 \not\in M$. На M задана выпуклая функция φ такая, что $\inf_{a\in M} \varphi(a) \le 0$. Требуется найти точку $a \in M$, в которой достигает минимума функция

$$f(a) = \max\{\|a - b_0\|, \varphi(a)\}. \tag{27}$$

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы точка $a_0 \in M$ являлась решением поставленной задачи, необходимо и достаточно существование линейного функционала L, удовлетворяющего условиям:

1^0. $\|L\| = 1$;

2^0. $L(b_0 - a_0) = \|b_0 - a_0\|$;

3^0. $L(a) \le L(a_0)$ при всех $a \in \{a \in M : \varphi(a) \le f(a_0)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $t > 0$ выделим в E выпуклые множества:

$$A_t = \{a \in M : \varphi(a) \le t\}, \quad A_{t-0} = \{a \in M : \varphi(a) < t\},$$

$$B_t = \{b \in E : \|b_0 - b\| \le t\}, \quad B_{t-0} = \{b \in E : \|b_0 - b\| < t\}.$$

Из наложенных условий на функцию φ следует, что

$$A_t \subset \bar{A}_{t-0}, \quad B_t = \bar{B}_{t-0}, \tag{28}$$

где черта обозначает замыкание соответствующего множества.

Допустим, что $a_0 \in M$ - решение задачи, т.е. при $t_0 = f(a_0)$

$$a_0 \in A_{t_0} \cap B_{t_0}, \quad A_{t_0 - 0} \cap B_{t_0 - 0} = \emptyset. \tag{29}$$

В силу теоремы Эйдельгайта и соотношений (28) существует гиперплоскость, разделяющая множества A_{t_0} и B_{t_0}, т.е. при некотором линейном функционале L, удовлетворяющем условию 1^0, имеем:

$$\sup_{a \in A_{t_0}} L(a) \le \inf_{b \in B_{t_0}} L(b). \tag{30}$$

Отсюда следует, ввиду (29), что

$$\sup_{a\in A_{t_0}} L(a)=L(a_0), \qquad \inf_{b\in B_{t_0}} L(b)=L(a_0).$$

Первое из этих соотношений совпадает с условием 3^0, а из второго вытекает 2^0, так как при выполнении (30) имеем:

$$L(b_0-a_0)=L(b_0)-L(a_0)=L(b_0)-\inf_{b\in B_{t_0}} L(b)=\sup_{b\in B_{t_0}} L(b_0-b)=$$

$$=\sup_{\|a\|\le t_0} L(a)=t_0=f(a_0)\ge\|b_0-a_0\|\ge L(b_0-a_0).$$

Для доказательства теоремы в сторону достаточности предположим, что для точки $a_0\in M$ имеется функционал L, удовлетворяющий условиям I^0-3^0. Для $t_0=f(a_0)$ имеем:

$$\|b_0-a_0\|=L(b_0-a_0)=L(b_0)-L(a_0)=L(b_0)-\sup_{a\in A_{t_0}} L(a)=$$

$$=\inf_{a\in A_{t_0}} L(b_0-a)\le\inf_{a\in A_{t_0}}\|b_0-a\|\le\|b_0-a_0\|,$$

т.е.

$$\inf_{a\in A_{t_0}}\|b_0-a\|=\|b_0-a_0\|.$$

А тогда для любой точки $a\in M$

$$f(a)=\max\{\|b_0-a\|,\varphi(a)\}\ge t_0=f(a_0),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если для данного элемента $a_0\in M$ множество $A_{f(a_0)}$ является выпуклой оболочкой конечного числа точек

$$a_1, a_2, \dots, a_m,$$

причем $a_0=\sum_{i=1}^{m} x_i^0 a_i$, где $x_i^0\ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i^0=1$, то условие 3^0 теоремы сводится к конечному числу соотношений:

$$L(a_k)=\max_{i=1,\dots,m} L(a_i),\ k\in K=\{i: x_i^0>0\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В конкретных линейных нормированных пространствах признаки решения задач, представляющих частный случай изученной, могут строиться на основе доказанной теоремы с учетом характеристики совокупности экстремальных функционалов в рассматриваемом пространстве (см. § 2). При этом в ряде случаев мы приходим к задачам, укладывающимся в рамки линейного программирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Упоминавшаяся в начале параграфа задача работы [70] отличается от изученной видом минимизируемой функции. А именно функция (27) в ней заменяется на

$$f(a) = \|a - b_0\| + \varphi(a).$$

Эта видоизмененная задача, очевидно, сводится к разысканию минимального t, при котором точка b_0 содержится в множестве

$$C_t = \{c \in E : c = a + b,\ a \in M,\ \varphi(a) + \|b\| \leq t\}.$$

Следовательно, и она укладывается в рассматриваемую в работе схему.

П Р И Л О Ж Е Н И Е ж)

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОГО ОБЪЕМА

В работе намечаются некоторые пути повышения размерности решаемых задач линейного программирования. В общем случае это достигается за счет модификации обычно используемых методов, позволяющей применять их непосредственно к рассматриваемой задаче без предварительного сведения ее к одной из канонических форм. Для частных типов задач линейного программирования предлагаются приемы построения специальных алгоритмов, основанные на учете особенностей строения матриц систем линейных уравнений, которые могут встретиться в процессе решения задач рассматриваемого типа.

§ I. Некоторые сведения из общей теории

Рассмотрим два множества индексов

$$M=\{1,2,\dots,m\},\quad N=\{1,2,\dots,n\},$$

каждое из которых разбито на три попарно непересекающихся подмножества, содержащие соответственно m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 элементов:

$$M=M_1\cup M_2\cup M_3,\ N=N_1\cup N_2\cup N_3.$$

Будем предполагать заданными вещественные числа:

$$a_{ij}\,(i\in M,\ j\in N),\ b_j\,(j\in N),\ c_i\,(i\in M),\ g_i>0\,(i\in M_3),\ h_j>0\,(j\in N_3).$$

Далее, для любого вещественного числа a под $[a]^+$ будем понимать $\max\{0,a\}$.

ЗАДАЧА I. Определить вектор

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_m), \tag{I}$$

максимизирующий функцию

ж) В качестве приложения помещена работа автора [59].

$$\mu(x)=\sum_{i\in M} c_i x_i-\sum_{j\in N_3} h_j\left[\sum_{i\in M} a_{ij} x_i-b_j\right]^+ \quad (2)$$

при ограничениях:

$$x_i\in\begin{cases}(-\infty,+\infty) & \text{для } i\in M_1,\\ [0,+\infty) & \text{для } i\in M_2,\\ [0,g_i] & \text{для } i\in M_3,\end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{i\in M} a_{ij}x_i\begin{cases}=b_j & \text{для } j\in N_1,\\ \le b_j & \text{для } j\in N_2.\end{cases} \quad (4)$$

ЗАДАЧА II. Определить вектор

$$y=(y_1,y_2,\dots,y_n), \quad (5)$$

минимизирующий функцию

$$\nu(y)=\sum_{j\in N} b_j y_j+\sum_{i\in M_3} g_i\left[-\sum_{j\in M} a_{ij} y_j+c_i\right]^+ \quad (6)$$

при ограничениях:

$$y_i\in\begin{cases}(-\infty,+\infty) & \text{для } j\in N_1,\\ [0,+\infty) & \text{для } j\in N_2,\\ [0,h_j] & \text{для } j\in N_3,\end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{j\in N} a_{ij}y_j\begin{cases}=c_i & \text{для } i\in M_1,\\ \ge c_i & \text{для } i\in M_2.\end{cases} \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Различие в постановке задач I и II лишь внешнее. Умножением заданных величин a_{ij}, b_j, c_i на -1 первая из этих задач приводится к виду задачи II, а вторая – к виду задачи I.

Приведенные задачи представляют одну из форм пары двойственных задач линейного программирования. В частном случае, когда $M_1=M_3=N_1=N_3=\varnothing$ или $M_1=M_3=N_2=N_3=\varnothing$, получаем двойственные задачи в так называемых канонических формах. С другой стороны, задачи I и II, по существу, не являются более общими, так как формально они легко сводятся к каждому из отмеченных частных случаев. Однако при таком сведении размерность задач существенно повышается. Поэтому представляет практический интерес модификация алгорифмов, позволяющая применять их непосредственно к задачам I и П (ср. [21], гл. 6).

Векторы (I) и (5), удовлетворяющие условиям (3), (4) и (7), (8), называются допустимыми для задач I и П, а искомые векторы – оптимальными. Совокупности допустимых векторов в изучаемых задачах обозначим через X и Y и рассмотрим величины

$$\mu = \begin{cases} \sup\limits_{x \in X} \mu(x) & X \neq \emptyset, \\ -\infty & X = \emptyset, \end{cases} \qquad \nu = \begin{cases} \inf\limits_{y \in Y} \nu(y) & Y \neq \emptyset, \\ +\infty & Y = \emptyset. \end{cases} \tag{9}$$

Из общей теории линейного программирования вытекает, что для величин (9) имеет место неравенство

$$\mu \leq \nu,$$

причем, за исключением случая, когда $\mu = -\infty$ и $\nu = +\infty$ (ни в одной из задач нет допустимого вектора), в этом неравенстве достигается равенство. Далее, при конечном значении μ и ν знаки супремума и инфимума в (9) могут быть заменены соответственно на максимум и минимум (в обеих задачах существуют оптимальные векторы). Таким образом, справедливы:

ТЕОРЕМА I (существования). Следующие утверждения равносильны:

а) задачи I и П имеют оптимальные векторы;

б) одна из рассматриваемых задач имеет оптимальный вектор;

в) задачи I и П имеют допустимые векторы;

г) задача I имеет допустимые векторы и функция (2) на множестве этих векторов ограничена сверху;

д) задача П имеет допустимые векторы и функция (6) на множестве этих векторов ограничена снизу.

ТЕОРЕМА 2 (признак оптимальности). Допустимый вектор (I) задачи I тогда и только тогда является оптимальным, когда существует допустимый вектор (5) задачи П такой, что $\mu(x) = \nu(y)$. При этом вектор (5) является оптимальным в задаче П.

Учитывая ограничения на допустимые векторы (условия (3), (4), (7), (8)) и вид функций (2), (6), признак оптимальности можно сформулировать в развернутом виде.

ТЕОРЕМА 2'. Для оптимальности допустимого вектора (I) задачи I необходимо и достаточно существование вектора (5), удовлетворяющего условиям:

а) $\sum_{j\in N} a_{ij} y_j = c_i$, если x_i лежит внутри д. и. (допустимого интервала);

б) $\sum_{j\in N} a_{ij} y_j \geq c_i$, если x_i совпадает с левым концом д.и.;

в) $\sum_{j\in N} a_{ij} y_j \leq c_i$, если x_i совпадает с правым концом д. и.;

г) $y_j = 0$, если $\sum_{i\in M} a_{ij} x_i < b_j$;

д) $y_j = h_j$, если $\sum_{i\in M} a_{ij} x_i > b_j$;

е) $y_i \geq 0$ при $j \in N_2$;

ж) $0 \leq y_j \leq h_j$ при $j \in N_3$.

При этом вектор (5) является оптимальным в задаче II.

Уже в первой работе по линейному программированию [22] для изучавшихся задач были сформулированы признаки оптимальности в форме, аналогичной теореме 2'. Компоненты соответствующих векторов (5) были названы разрешающими множителями, а основанный на их использовании алгорифм - методом разрешающих множителей. В настоящее время разработан ряд эффективных приемов решения задач линейного программирования. Все они опираются на признаки оптимальности и явно или неявно используют идею разрешающих множителей. Поэтому они могут рассматриваться как различные реализации общего метода разрешающих множителей. Одна из таких реализаций изучается в настоящей работе.

§ 2. Метод улучшения допустимого вектора

Идея метода состоит в следующем. Для некоторого исходного допустимого вектора (I) на основании части условий теоремы 2' составляется система линейных уравнений, из которой находится вектор (5). Если для него выполняются также остальные условия теоремы 2', то рассматриваемый вектор (I) является оптимальным в задаче I, а найденный вектор (5) - оптимальный в задаче II.

При нарушении одного из условий теоремы $2'$ строится новый допустимый вектор (1) такой, что значение функции (2) увеличивается. Через конечное число таких шагов получаем оптимальные векторы задач I и II либо убеждаемся в том, что в рассматриваемых задачах оптимальных векторов не существует.

Метод улучшения допустимого вектора обычно излагается для задач линейного программирования, приведенных к одной из канонических форм (см., например, [28], стр. 315-326). Здесь этот метод используется для непосредственного решения задач I и II.

Рассмотрим n-мерные векторы

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ i \in M,\ \beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$e_j = (\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{j}, 0, \ldots, 0),\ j \in N,$$

и соотношения вида

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} u_i \alpha_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_0} v_j e_j - \sum_{j \in \mathcal{J}_h} w_j e_j = \beta - \sum_{i \in \mathcal{J}_g} g_i \alpha_i, \qquad (10)$$

где

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3,\ \mathcal{J}_1 \subset M_1,\ \mathcal{J}_2 \subset M_2,\ \mathcal{J}_3 \subset M_3,\ \mathcal{J}_g \subset M_3,$$

$$\mathcal{J}_3 \cap \mathcal{J}_g = \emptyset,\ \mathcal{J}_0 \subset N_2 \cup N_3,\ \mathcal{J}_h \subset N_3,\ \mathcal{J}_0 \cap \mathcal{J}_h = \emptyset,$$

$$u_i \in \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{при } i \in \mathcal{J}_1, \\ (0, +\infty) & \text{при } i \in \mathcal{J}_2, \\ (0, g_i) & \text{при } i \in \mathcal{J}_3, \end{cases}$$

$$v_j > 0\ (j \in \mathcal{J}_0),\ w_j > 0\ (j \in \mathcal{J}_h).$$

Каждому соотношению типа (10) отвечает допустимый вектор задачи I с компонентами

$$x_i = \begin{cases} u_i & \text{при } i \in \mathcal{J}, \\ g_i & \text{при } i \in \mathcal{J}_g, \\ 0 & \text{при } i \in M \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_g). \end{cases}$$

Наоборот, каждому допустимому вектору (1) задачи I отвечает соотношение (10), в котором

$$\mathcal{J}_g = \{i \in M_3 : x_i = g_i\},$$

$\{i \in M : x_i \neq 0\} \setminus \mathcal{J}_g \subset \mathcal{J} \subset \{i \in M : x_i$ лежит внутри д. и.$\}$, $u_i = x_i$.

$$\mathcal{J}_0 = \{j \in N_2 \cup N_3 : \sum_{i \in M} a_{ij} x_i < b_j\}, \quad v_j = b_j - \sum_{i \in M} a_{ij} x_i,$$
$$\mathcal{J}_h = \{j \in N_3 : \sum_{i \in M} a_{ij} x_i > b_j\}, \quad w_j = \sum_{i \in M} a_{ij} x_i - b_j.$$

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ АЛГОРИФМА. Предположим вначале выполненным следующее условие:

(!) Число слагаемых в левой части любого соотношения типа (10) не меньше n.

ЗАМЕЧАНИЕ. При фиксированных множествах $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_h$, $\mathcal{J}_g$ соотношение (10) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно u_i, v_j, w_j. Если число неизвестных в системе меньше числа уравнений, то она, как правило, несовместна. Поэтому условие (!), вообще говоря, выполняется. Во всяком случае, его выполнения можно добиться сколь угодно малым изменением заданного вектора β.

Процесс начинается с некоторого соотношения типа (10), в левой части которого ровно n слагаемых. Опираясь на условие (!), можно показать, что соответствующие векторы

$$\alpha_i \, (i \in \mathcal{J}), \quad e_j \, (j \in \mathcal{J}_0), \quad -e_j \, (j \in \mathcal{J}_h) \tag{11}$$

образуют базис рассматриваемого n-мерного пространства. Благодаря этому система линейных уравнений относительно компонент вектора (5)

$$(\alpha_i, y) = c_i \, (i \in \mathcal{J}), \, (e_j, y) = 0, \, (j \in \mathcal{J}_0), \, (-e_j, y) = -h_j \, (j \in \mathcal{J}_h), \tag{12}$$

составленная на основании части условий признака оптимальности (ср. условия "а", "г" и "д" теоремы 2′), имеет единственное решение. Находим это решение и проверяем остальные условия признака. Если они выполняются, то вектор (1), отвечающий рассматриваемому соотношению (10), является оптимальным в задаче I, а найденный вектор (5) – оптимальный в задаче II (процесс окончен).

В случае нарушения, по крайней мере, одного из условий теоремы 2′ выбираем вектор

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{i_0}, \text{ если при } i_0 \in M \setminus \mathcal{J}_g : (\alpha_{i_0}, y) < c_{i_0}, \\ -\alpha_{i_0}, \text{ если при } i_0 \in M_1 \cup \mathcal{J}_g : (\alpha_{i_0}, y) > c_{i_0}, \\ e_{j_0}, \text{ если при } j_0 \in N_2 \cup N_3 : (e_{j_0}, y) < 0, \\ -e_{j_0}, \text{ если при } j_0 \in N_3 : (-e_{j_0}, y) < -h_{j_0}, \end{cases}$$

и находим его разложение по базисным векторам (II):

$$\alpha = \sum_{i\in\mathcal{J}} \bar{u}_i \alpha_i + \sum_{j\in J_0} \bar{v}_j e_j - \sum_{j\in J_h} \bar{w}_j e_j . \qquad (13)$$

Рассматриваем соотношение, вытекающее из (10) и (13):

$$\varepsilon\alpha + \sum_{i\in\mathcal{J}} (u_i - \varepsilon\bar{u}_i)\alpha_i + \sum_{j\in J_0} (v_j - \varepsilon\bar{v}_j) e_j - \\ - \sum_{j\in J_h} (w_j - \varepsilon\bar{w}_j) e_j = \beta - \sum_{i\in\mathcal{J}_g} g_i \alpha_i . \qquad (14)$$

Если $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям:

$$u_i - \varepsilon\bar{u}_i \in \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{при } i\in\mathcal{J}_1 , \\ [0, +\infty) & \text{при } i\in\mathcal{J}_2 , \\ [0, g_i] & \text{при } i\in\mathcal{J}_3 , \end{cases}$$

$$v_j - \varepsilon\bar{v}_j \geq 0\ (j\in J_0),\ w_j - \varepsilon\bar{w}_j \geq 0\ (j\in J_h) , \qquad (15)$$

$$\varepsilon \geq h_{i_0}, \text{ если } \alpha = \pm\alpha_{i_0} , \text{ причем } i_0 \in M_3 ,$$

то соотношению (14) отвечает допустимый вектор x' задачи I. Максимизируемая функция (2) на этом векторе принимает большее значение, чем на векторе x, отвечающем исходному соотношению (10). А именно

$$\mu(x') = \mu(x) + \varepsilon\Delta ,$$

где

$$\Delta = \begin{cases} c_{i_0} - (\alpha_{i_0}, y), & \text{если } \alpha = \alpha_{i_0} , \\ (\alpha_{i_0}, y) - c_{i_0}, & \text{если } \alpha = -\alpha_{i_0} , \\ -(e_{j_0}, y), & \text{если } \alpha = e_{j_0} , \\ (e_{j_0}, y) - h_{j_0}, & \text{если } \alpha = -e_{j_0} . \end{cases}$$

Таким образом, мы заинтересованы в выборе возможно большего ε.

Если условия (15) выполняются при сколь угодно больших ε, функция (2) на множестве допустимых векторов не ограничена (сверху) и, в силу теоремы I, в рассматриваемых задачах I и II оптимальных векторов не существует (процесс окончен).

В противном случае находим максимальное ε, удовлетворяющее условиям (15), и подставляем его в (14). При этом получаем новое соотношение типа (10), в левой части которого, в силу условия (!), ровно n слагаемых, и процесс можно продолжить.

Легко показать, что описанный процесс не может продолжаться неограниченно. Действительно, ввиду монотонности процесса мы не можем дважды прийти к одному и тому же соотношению (IO), каждое из них однозначно определяется соответствующим набором множеств $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_n$, $\mathcal{J}_g$, а различных наборов такого рода – конечное число. Следовательно, через конечное число шагов будут получены оптимальные векторы для задач I и II либо будет установлено, что в рассматриваемых задачах оптимальных векторов не существует.

Для завершения описания метода остается рассмотреть вопросы, связанные с возможным нарушением предположения (!), а также указать приемы построения исходного соотношения (IO).

ПРОБЛЕМА ВЫРОЖДЕНИЯ. В случае нарушения условия (!) в описанном процессе приходится допускать соотношения (IO), в которых векторы (II) образуют n-мерный базис, однако некоторые из коэффициентов u_i, v_j, w_j выходят на границу указанных выше для них открытых интервалов (см. стр.I3I). При этом возникают так называемые ситуации вырождения. Порядком вырождения называется число коэффициентов, вышедших на границу допустимых интервалов. Известно, что при вырождениях выше первого порядка рассматриваемый процесс, в принципе, может зациклиться. Однако, как показывает опыт, практически с этим вряд ли стоит считаться. Значительно больше вероятность не окончить счет по другим причинам, например, в связи с плохой обусловленностью встречающихся систем линейных уравнений.

Для уменьшения и без того малой вероятности зацикливания процесса можно предусмотреть в ситуациях вырождения незначительные изменения вышедших на границу коэффициентов, что соответствует малой вариации исходного вектора β .

Наконец, полностью гарантировать себя от зацикливания можно с помощью разработанного Чарнсом [73] приема бесконечно малой вариации вышедших на границу коэффициентов. Один из них изменяется на δ , другой на δ^2 и т. д. При этом, правда, коэффициенты u_i, v_j, w_j в рассматриваемых соотношениях (IO) превращаются в полиномы от δ степени r , равной порядку вырождения. Для хранения этих полиномов в машине необходимо отвести специальное место, что при решении задач большого объема крайне затруднительно.

ПОСТРОЕНИЕ ИСХОДНОГО ДОПУСТИМОГО ВЕКТОРА. Исходный допустимый вектор (I) и отвечающее ему соотношение (I0), необходимое для решения задач I и II описанным методом, могут быть получены с помощью того же метода, примененного к следующей вспомогательной задаче.

ЗАДАЧА I$'$. Определить $(m+n_1)$-мерный вектор x с компонентами $x_i\ (i\in M)$, $x_{m+j}\ (j\in N_1)$, максимизирующий функцию

$$\mu(x) = -\sum_{j\in N_1} x_{m+j} - \sum_{j\in N_2}\Big[\sum_{i\in M} a_{ij}x_i - b_j\Big]^+ \qquad (I6)$$

при ограничениях:

$$x_i \in \begin{cases} (-\infty,+\infty) & \text{для } i\in M_1\,, \\ [0,+\infty) & \text{для } i\in M_2\,, \\ [0,g_i] & \text{для } i\in M_3\,, \end{cases}$$

$$x_{m+j}\in[0,+\infty) \quad \text{для } j\in N_1\,,$$

$$\sum_{i\in M} a_{ij}x_i + \varepsilon_j x_{m+j} = b_j,\ j\in N_1,$$

где

$$\varepsilon_j = \begin{cases} +1 & \text{при } b_j \geq 0\,, \\ -1 & \text{при } b_j < 0\,. \end{cases}$$

Ясно, что эта задача типа задачи I. В ней

$m'=m+n_1$, $n'=n_1+n_2$, $M'=M\cup\{i=m+j : j\in N_1\}$, $N'=N_1\cup N_2$,

$M_1'=M_1$, $M_2'=M_2\cup(M'\setminus M)$, $M_3'=M_3$, $N_1'=N_1$, $N_2'=\varnothing$, $N_3'=N_2$;

$c_i'=0$ для $i\in M$, $c_i'=-1$ для $i\in M'\setminus M$, $h_j'=1$ для $j\in N_3'$.

Векторами $\alpha_i'(i\in M)$, $\alpha_i'(i\in M'\setminus M)$, $e_j'(j\in N')$, β' здесь служат (n_1+n_2)-мерные вырезки из n-мерных векторов α_i, $\varepsilon_{i-m}\,l_{i-m}$, e_j,β, получающиеся удалением компонент с номерами $j\in N_3$.

В приведенной задаче I$'$ имеется допустимый вектор

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i\in M\,, \\ |b_{i-m}| & \text{при } i\in M'\setminus M, \end{cases} \qquad (I7)$$

и максимизируемая функция (I6) на множестве допустимых векторов ограничена сверху ($\mu(x) \leq 0$). Следовательно, в рассматриваемой задаче существует оптимальный вектор (теорема I), который может быть найден с помощью описанного процесса. При этом в качестве исходного может быть принято соотношение типа (I0), отвечающее допустимому вектору (I7). Это соотношение имеет вид:

$$\sum_{i\in \mathcal{I}'} u_i \alpha_i' + \sum_{j\in \mathcal{J}_0} v_j e_j' - \sum_{j\in \mathcal{J}_h'} w_j e_j' = \beta' - \sum_{i\in \mathcal{I}_g'} g_i \alpha_i', \quad (I8)$$

где

$$\mathcal{I}' = M' \setminus M, \ \mathcal{J}_0' = \{j \in N_3' : b_j \geq 0\}, \ \mathcal{J}_h' = \{j \in N_3' : b_j < 0\}, \ \mathcal{I}_g' = \phi,$$

$$u_i = |b_{i-m}|, \ v_j = b_j, \ w_j = -b_j.$$

Векторы $\alpha_i' (i \in \mathcal{I}')$, $e_j' (j \in \mathcal{J}_0')$, $-e_j' (j \in \mathcal{J}_h')$, как нетрудно показать, образуют базис рассматриваемого n'-мерного пространства.

Исходя из указанного соотношения, через конечное число шагов получаем новое соотношение (I8), отвечающее оптимальному вектору задачи I'. При этом могут встретиться три случая:

I. В полученном соотношении (I8) $\mathcal{I}' \subset M$, $\mathcal{J}_h' = \phi$.

2. По крайней мере, одно из условий предыдущего пункта нарушается, причем для некоторого $i \in \mathcal{I}' \setminus M$ или $j \in \mathcal{J}_h'$ соответствующий коэффициент u_i или w_j отличен от нуля.

3. Условия пункта I нарушены, но для всех $i \in \mathcal{I}' \setminus M$ и $i \in \mathcal{I}_h'$ соответствующие коэффициенты u_i и w_j равны нулю.

В первом случае вектор (I) с компонентами

$$x_i \in \begin{cases} u_i & \text{при } i \in \mathcal{I}', \\ g_i & \text{при } i \in \mathcal{I}_g', \\ 0 & \text{при } i \in M \setminus (\mathcal{I}' \cup \mathcal{I}_g') \end{cases}$$

является допустимым в исходной задаче I, и отвечающее этому вектору соотношение (I0) может быть принято за исходное при решении задач I и II методом улучшения допустимого вектора. В этом соотношении (I0)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}', \ \mathcal{I}_g = \mathcal{I}_g', \ \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_0' \cup \{j \in N_3 : \sum_{i\in M} a_{ij} x_i \leq b_j\},$$

$$\mathcal{J}_h = \{j \in N_3 : \sum_{i\in M} a_{ij} x_i > b_j\},$$

коэффициенты $u_i (i \in \mathcal{J})$, $v_j (j \in \mathcal{J}_0')$ совпадают с соответствующими коэффициентами полученного соотношения (I8), а коэффициенты добавленных слагаемых вычисляются по формулам:

$$v_j = b_j - \sum_{i \in M} a_{ij} x_i, \quad w_i = \sum_{i \in M} a_{ij} x_i - b_j.$$

Во втором случае условия (3) и (4) исходной задачи I несовместны (в этой задаче нет допустимого вектора), и потому ни в одной из рассматриваемых задач I и II нет оптимального вектора.

В последнем случае условия (3) и (4) совместны, однако при сколь угодно малом изменении величин b_j эти условия становятся несовместными. Решать соответствующие задачи I и II вряд ли целесообразно.

§ 3. Вопросы практической реализации метода

При решении задач I и II методом улучшения допустимого вектора наиболее трудоемким является вычисление на каждом шаге соответствующего вектора (5) и разложение вводимого вектора α по базисным векторам (II), т. е. решение систем линейных уравнений типа (I2) и (I3). Число неизвестных в этих системах определяется количеством переменных в задаче II. С другой стороны, при рассмотрении пары двойственных задач в качестве задачи II всегда может быть принята та из этих задач, которая содержит меньшее количество переменных. Поэтому под размерностью задачи линейного программирования естественно понимать минимальное из чисел, выражающих количество переменных в данной и двойственной к ней задачах. При записи этих задач в форме задач I и II номера этих задач следует выбирать так, чтобы имело место неравенство $n \leq m$.

В общем случае для решения систем (I2) и (I3) можно, как это делается в модифицированном симплекс-методе (см., например, [9], стр. II9–I35), использовать обратную матрицу к матрице A, строками которой служат базисные векторы (II). При этом на каждом шаге описанного процесса в базисе (II) заменяется не более одного вектора, что позволяет новую обратную матрицу получать из матрицы предыдущего шага простым преобразованием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо матрицы A^{-1} порядка n для решения систем (I2) и (I3) достаточно иметь обратную матрицу к матрице $\widetilde{A}$, которая получается из A исключением столбцов с номерами $j \in \mathcal{J}_0 \cup \mathcal{J}_h$ и строк, отвечающих векторам $e_j \ (j \in \mathcal{J}_0)$ и $-e_j \ (j \in \mathcal{J}_h)$. Порядок этой матрицы совпадает с числом элементов в множестве $\mathcal{J}$ и от шага к шагу, вообще говоря, меняется, но не более чем на I.

При сравнительно небольших задачах (размерности несколько меньшей корня квадратного из емкости оперативной памяти машины) матрица A^{-1} (или $\widetilde{A}^{-1}$) хранится в оперативной памяти. Кроме того, там выделяется небольшое рабочее поле и отводится место для коэффициентов u_i, v_j, w_j соотношения (IO) и отвечающих им индексов с отметками о их принадлежности множествам $\mathcal{J}_0$. $\mathcal{J}_h$, для чисел $c_i \ (i \in \mathcal{J})$, $g_i \ (i \in \mathcal{J} \cap M_3)$, $h_j \ (j \in N_3)$ для величин $y_j \ (j \in N)$, представляющих решение системы (I2), и, наконец, для коэффициентов $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$, $\bar{w}_j$ разложения (I3). Векторы α_i (точнее, ненулевые компоненты этих векторов) и отвечающие им величины c_i, g_i с отметками о принадлежности индекса i множествам M_1, M_2, M_3, а также о включении этого индекса в $\mathcal{J}_g$ находятся во внешней памяти. В оперативную память эти данные вводятся небольшими массивами при проверке условий признака оптимальности.

При решении задач I и П большой размерности матрицу A^{-1} приходится размещать во внешних запоминающих устройствах (на магнитных барабанах или лентах). В этом случае оказывается удобным использовать мультипликативное представление обратной матрицы (см., например, [9], стр. I36-I39). Матрица A^{-1} хранится в виде произведения так называемых элементарных матриц, каждая из которых задается информацией, занимающей n ячеек. На каждом шаге в описанном процессе в представлении матрицы A^{-1} добавляется не более одного множителя.

Все сказанное относилось к задачам линейного программирования общего вида. Большим резервом для повышения размерности является разработка специальных алгорифмов для отдельных классов задач. Такие алгорифмы могут строиться на основе изложенного метода улучшения допустимого вектора. Специфика рассматриваемого класса задач учитывается лишь используемыми приемами решения встречающихся в процессе систем линейных уравнений. Эти системы решаются непосредственно, без использования громоздкого аппарата обратных матриц.

При разработке специальных алгорифмов оказывается полезным рассматриваемое здесь понятие ранга задачи[ж)].

Сложностью строения квадратной матрицы порядка n условимся считать минимальное из чисел r таких, что изменением нумерации строк и столбцов эта матрица сводится к виду $A=[a_{ij}]_{i,j}=1,2,\ldots,n$, где элементы a_{ij} с номерами $i+j\le n-r$ равны нулю.

Задачи линейного программирования некоторого частного вида будем называть задачами ранга r, если неособенные матрицы, составленные из векторов $\alpha_i\,(i\in M)$, $e_j\,(j\in N)$, в каждой из этих задач имеют сложность строения не выше r и, по крайней мере, в одной из задач рассматриваемого вида имеются матрицы сложности r.

Отметим, что в определении ранга задачи допустимые интервалы для переменных не участвуют. Следовательно, при изменении этих интервалов и, в частности, при добавлении ограничений на отдельные переменные ранг задачи не меняется. В численных методах при этом уточнения требуют лишь некоторые детали.

Среди задач линейного программирования наиболее простыми являются так называемые транспортные задачи (в различных постановках). Нетрудно показать, что это задачи нулевого ранга. На этом факте основаны эффективные алгорифмы решения таких задач, в частности известный метод потенциалов (см. [6], а также [1]).

Рассмотренная в [7] задача об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ - это задача первого ранга, и на этом базируется предложенный в [7] алгорифм. В принципе, этот алгорифм позволяет решать всевозможные задачи первого ранга. В уточнении нуждаются лишь отдельные детали. Иллюстрацией может служить статья [74], посвященная широкому классу задач первого ранга.

Для произвольных задач второго и более высоких рангов специальных алгорифмов в литературе до сих пор не встречалось. Это связано с тем, что приемы перенумерации строк и столбцов в соответствующих матрицах при повышении ранга задачи сильно усложняются. Между тем при увеличении размерности решаемых

ж) Это понятие было введено автором в докладе на I-й Ленинградской конференции по применению математики в экономике в 1961 г.

задач специальные алгорифмы начинают давать столь ощутимый эффект, что становится оправданным применение даже весьма сложных приемов перенумерации строк и столбцов встречающихся матриц. В настоящее время, как видно, уже назрела необходимость в разработке специальных алгорифмов, во всяком случае для задач второго ранга.

Ввиду трудности определения ранга рассматриваемых задач и сложности приемов перенумерации строк и столбцов в задачах высоких рангов нам представляется перспективной разработка упрощенных приемов, позволяющих матрицы с большим числом нулевых элементов приводить к рассмотренному выше виду, где r достаточно мало, хотя и не минимальное из возможных. Даже примитивные приемы такого рода могут оказаться весьма полезными.

§ 7. Задачи линейного программирования с блочными матрицами

В [46] была рассмотрена задача линейного программирования, в которой все переменные разбивались на m групп. На переменные каждой группы накладывалось одно ограничение и, кроме того, имелось n ограничений, связывающих переменные различных групп. Иными словами, речь шла о задаче, в которой $m' = \sum_{i=1}^{m} \ell_i$ переменных (ℓ_i - число переменных в i-ой группе) были связаны ограничениями в количестве $n' = m+n$. Между тем анализ этой задачи проводился в n-мерном пространстве, и в соответствующем признаке оптимальности фигурировало лишь n разрешающих множителей - компонент вектора y. Это означает, что при решении задач I и II указанного типа методом улучшения допустимого вектора встречающиеся системы линейных уравнений порядка $m+n$ сводятся к системам порядка n. На этой основе Р.А.Звягиной (см. „Оптимальное планирование", [20]) был разработан алгорифм и составлена программа для решения задач линейного программирования, в которых матрица A, образованная упоминавшимися выше векторами (эти векторы служат строками матрицы A), имеет следующую блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \ddots & & \boxed{A_0} \\ & & & \boxed{A_r} & \end{pmatrix} \qquad (19)$$

где A_0 - произвольная прямоугольная матрица размерности $m \times n_0$, а матрицы A_1, $A_2, \ldots, A_r$ имеют по одному столбцу. Эти задачи, содержащие $n = n_0 + r$ ограничений, решаются как задачи размерности n_0.

В.А.Булавский заметил, что указанный принцип можно обобщить и применить к задачам линейного программирования с блочными матрицами вида (19), где A_1, $A_2, \ldots, A_r$ - произвольные прямоугольные матрицы размерности $m_k \times n_k$ ($k = 1, 2, \ldots, r$). Это позволяет в методе улучшения допустимого вектора вместо обратной матрицы порядка $n = \sum_{k=0} n_k$ ввести $r+1$ обратных матриц порядка n_0, $n_1, \ldots, n_r$. Соответствующий алгорифм и программа для ЭВМ были разработаны Р.А.Звягиной [20]. Этот алгорифм существенно отличается от предложенного ранее Данцигом и Вулфом [5] для задач того же типа и, как видно, является более удобным.

В [20] рассматриваются задачи I и II, в которых

$$M_1 = M_3 = N_3 = \phi .$$

Однако предложенные алгорифмы легко обобщаются на случай произвольных задач I и II с блочными матрицами соответствующей структуры.

Рассмотренные приемы конкретизации метода улучшения допустимого вектора с учетом ранга задачи и блочной структуры соответствующих матриц в некоторых случаях удается сочетать. Эффективность такого сочетания иллюстрируется в следующем параграфе на примере упоминавшейся задачи об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ.

§ 5. Пример одновременного учета ранга задачи и блочного строения матрицы

Интересующая нас задача состоит в разыскании прямоугольной матрицы

$$x=[x_{jk}] \quad (j\in N=\{1,\dots,n\},\ k\in P=\{1,\dots,p\}), \tag{20}$$

минимизирующей функцию

$$\mu(x)=\sum_{j\in N}\sum_{k\in P} c_{jk}x_{jk}$$

при ограничениях:

$$x_{jk}\geq 0,\ j\in N,\ k\in P, \tag{21}$$

$$\sum_{k\in P} a_{jk}x_{jk}\leq g_j,\ j\in N, \tag{22}$$

$$\sum_{j\in N} x_{jk}=h_k,\ k\in P, \tag{23}$$

где c_{jk}, a_{jk}, g_j, h_k - заданные положительные числа.

Из приведенного выше (§ I, теорема 2′) признака оптимальности для общей задачи линейного программирования вытекает

ТЕОРЕМА 2″. Для оптимальности допустимой матрицы (20) (удовлетворяющей условиям (21)-(23)) необходимо и достаточно существование вектора

$$y=(y_1,y_2,\dots,y_n,z_1,z_2,\dots,z_p) \tag{24}$$

такого, что

а) $y_j\geq 0$, $j\in N$;

б) $a_{jk}y_j+z_k\geq -c_{jk}$, $j\in N$, $k\in P$;

в) $a_{jk}y_j+z_k=-c_{jk}$ при $(j,k)\in J=\{(j,k): x_{jk}>0\}$;

г) $y_j=0$ при $j\in J_0=\{j\in N: x_j=g_j-\sum_{k\in P} a_{jk}x_{jk}>0\}$.

В рассматриваемой задаче размерности $n+p$ каждой допустимой матрице (20) отвечает в $(n+p)$-мерном пространстве следующее соотношение типа (10):

$$\sum_{(j,k)\in J} u_{jk}\alpha_{jk}+\sum_{j\in J_0} v_j e_j=\beta, \tag{25}$$

где

$$\alpha_{jk} = a_{jk} e_j + e_{n+k}, \quad j \in N, \; k \in P;$$

e_j - орты соответствующих осей ;

$$\beta = (g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_p);$$

$$u_{jk} = x_{jk}, \quad v_j = x_j = g_j - \sum_{k \in P} a_{jk} x_{jk}.$$

При решении этой задачи изложенным методом улучшения допустимого вектора на каждом шаге имеем соотношение (25), в котором векторы

$$\alpha_{jk}, \; (j, k) \in \mathcal{J}, \; e_j, \; j \in \mathcal{J}_0 \tag{26}$$

образуют $(n+p)$-мерный базис. Из системы

$$\begin{gathered} (a_{jk} e_j + e_{n+k}, y) = -c_{jk}, \; (j,k) \in \mathcal{J}, \\ (e_j, y) = 0, \; j \in \mathcal{J}_0, \end{gathered} \tag{27}$$

определяется вектор (24), и для него проверяются условия "а" и "б" теоремы 2". Если они выполнены, то отвечающая соотношению (25) допустимая матрица (20) является оптимальной. В противном случае необходимо найти разложение вектора

$$\alpha = \begin{cases} e_{j_0}, & \text{если } (e_{j_0}, y) < 0, \\ a_{j_0 k_0} e_{j_0} + e_{n+k_0}, & \text{если } (\alpha_{j_0 k_0}, y) < c_{j_0 k_0}, \end{cases}$$

по базисным векторам (26), т.е. определить коэффициенты в соотношении

$$\alpha = \sum_{(j,k) \in \mathcal{J}} \bar{u}_{jk} (a_{jk} e_j + e_{n+k}) + \sum_{j \in \mathcal{J}_0} \bar{v}_j e_j. \tag{28}$$

Благодаря блочному строению матрицы рассматриваемой задачи, системы (27) и (28) могут быть сведены к системам меньшей размерности. Для этого множество пар $(j,k) \in \mathcal{J}$ разбивается на подмножества $\mathcal{J}_k$ с фиксированным вторым индексом. Эти подмножества, очевидно, непустые. Каждому $k \in P$ сопоставим некоторый индекс j_k такой, что $(j_k, k) \in \mathcal{J}_k$, и рассмотрим множества:

$$\mathcal{J}'_k = \mathcal{J}_k \setminus \{(j_k, k)\}, \quad P' = \{k \in P : \mathcal{J}'_k \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{J}' = \bigcup_{k \in P'} \mathcal{J}'_k.$$

Нетрудно проверить, что первые n компонент вектора (24), представляющего решение системы (27), могут быть найдены из системы

$$(a_{jk}e'_j - a_{jkk}e'_{jk}, y') = c_{jkk} - c_{jk}, \ (j,k)\in J',$$
$$(e'_j, y') = 0, \ j\in J_0, \qquad (27')$$
где $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – неизвестный вектор, e'_j – орты соответствующих осей в n-мерном пространстве. Остальные компоненты вектора (24) находятся независимо друг от друга по формуле
$$z_k = -a_{jkk}y_{jk} - c_{jkk}, \ k\in P.$$

Коэффициенты соотношения (28), отличные от $\bar{u}_{jkk} (k\in P)$, можно найти из системы
$$\sum_{(j,k)\in J'} u_{jk}(a_{jk}e'_j - a_{jkk}e'_{jk}) + \sum_{j\in J_0} v_j e'_j = \alpha', \qquad (28')$$
где
$$\alpha' = \begin{cases} e'_{j_0}, & \text{если } \alpha = e_{j_0}, \\ a_{j_0k_0}e'_{j_0} - a_{jk_0k_0}e'_{jk_0}, & \text{если } \alpha = \alpha_{j_0k_0}. \end{cases}$$
Остальные коэффициенты разложения (28) при $\alpha = e_{j_0}$ определяются по формулам
$$\bar{u}_{jkk} = \begin{cases} -\sum_{(j,k)\in J'_k} \bar{u}_{jk} & \text{для } k\in P', \\ 0 & \text{для } k\in P\setminus P'. \end{cases} \qquad (29)$$

При $\alpha = \alpha_{j_0k_0}$
$$\bar{u}_{jk_0k_0} = \begin{cases} 1 - \sum_{(j,k)\in J'_{k_0}} \bar{u}_{jk}, & \text{если } k_0\in P', \\ 1, & \text{если } k_0\in P\setminus P', \end{cases}$$
а $\bar{u}_{j_rk}$ для $k\neq k_0$ находятся по формулам (29).

Следовательно, рассматриваемая задача размерности $n+p$ решается как задача размерности n. Далее, матрицы систем (27) и (28) имели сложность строения, равную единице. Такую же сложность имеют матрицы систем (27') и (28'). Это позволяет решение этих систем получать с помощью упрощенных приемов, аналогичных предложенным в работе [7]. Такие приемы для рассматриваемого случая детально описаны в статье [74], посвященной так называемым двухкомпонентным задачам.

Приведенные рассуждения показывают, что при решении задач рассматриваемого типа в оперативной памяти машин, помимо небольшого рабочего поля, достаточно отвести место для следующих величин:

$a_{j_k k}$, $u_{j_k k}$, $\bar{u}_{j_k k}$ $(k \in P')$ с указанием индексов j_k ;

$v_j, \bar{v}_j$ $(j \in J_0)$, $a_{j_k}- c_{j_k}+c_{j_k k}, u_{j_k}, \bar{u}_{j_k}((j,1)\in J')$ с указанием индексов j и расположения чисел $a_{j_k k}$, $u_{j_k k}$, $\bar{u}_{j_k k}$;

y_j $(j \in N)$ с информацией о порядке их вычисления.

Все эти данные легко размещаются на 8 полях по n ячеек, что позволяет решать рассматриваемые задачи, в которых n порядка I/8 емкости оперативной памяти, а на p не накладывается никаких ограничений.

В заключение заметим, что в случае необходимости указанную размерность можно повысить примерно вдвое. Для этого достаточно в оперативной памяти на каждом этапе процесса (при решении системы (27′), при проверке условий теоремы 2′, при решении системы (28′), при вычислении коэффициентов нового соотношения (25)) сохранять лишь необходимую информацию, переписывая остальные данные, которые в дальнейшем используются, во внешнее запоминающее устройство.

Литература

I. БУЛАВСКИЙ В.А. Об одном алгорифме решения транспортной задачи. - В сб.: Оптимальное планирование. Вып.2. Новосибирск, 1964, с. 41-49.

2. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач выпуклого программирования с линейными ограничениями методом последовательного улучшения допустимого вектора. -"Докл. АН СССР", 1963, т. 150, № 2, с. 231-234.

3. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько лекций по линейному программированию. Новосибирск, 1965. 68 с.

4. WOOD M.K., DANTZIG G.B. Programming of interdependent activities I.-"Econometrica", 1949, v.17, p.193-199

5. WOLFE P., DANTZIG G.B. Decomposition principle for linear programs.-"Operat. Res.", 1960, v.8, P.101-111

6. ГАВУРИН М.К., КАНТОРОВИЧ Л.В. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. - В сб.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., 1949, с. 110-138.

7. ГАВУРИН М.К., РУБИНШТЕЙН Г.Ш., СУРИН С.С. Об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ. - "Сибир. мат. журн.", 1962, т.3, № 1, с. 481-499.

8. ГАРКАВИ А.Л. Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств. - "Успехи мат.наук", 1961, т. 16, № 4, с. 141-145.

9. ГАСС С. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1961. 303 с.

10. ГЛИВЕНКО В.И. Интеграл Стилтьеса. М.-Л., 1936. 216 с.

11. ГИЛЬБЕРТ Д. Основания геометрии. М.-Л., Гостехиздат, 1948. 491 с.

12. ГОЛДМАН А.Дж., ТАККЕР А.У. Теория линейного программирования. - В сб.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959, с. 172-213.

13. DANTZIG G.B. Programming in a linear structure.-"Econometrica", 1949, V.17, p.73-74.

14. DANTZIG G.B. Programming of interdependent activities II.-"Econometrica", 1949, v.17, p. 200-211. (часть I см.[4]).

15. DANTZIG G.B. Application of the simplex method to a transportation problem.-In: Activity analysis of production and allocation. New York, 1951, p. 359-373.

16. DANTZIG G.B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities.- In: Activity analysis of production and allocation. New York, 1951, p. 339-347.

17. См. [5].

18. ДАФФИН Р.Дж. Бесконечные программы. - В сб.:Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959, с. 263-276.

19. ДУБОВИЦКИЙ А.Я., МИЛЮТИН А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. - "Докл. АН СССР", 1963, т.149, № 4, с. 759-762.

20. ЗВЯГИНА Р.А. Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. - В сб.: Оптимальное планирование. Вып. 2. Новосибирск, 1964, с. 50-61.

21. ЗОЙТЕНДЕЙК Г. Методы возможных направлений. М., Изд. иностр. лит., 1963. 176 с.

22. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Л., Изд. ЛГУ, 1939. 67 с.

23. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. -"Докл. АН СССР", 1940, т. 28, № 3, с. 212-215.

24. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. -"Докл. АН СССР", 1942, т. 37, № 7-8, с. 227-229.

25. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одной задаче Монжа. - "Успехи мат. наук", 1948, т. 3, № 2, с. 225-226.

26. См. [6].

27. КАНТОРОВИЧ Л.В. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач. - "Докл. АН СССР", 1957, т. 115, № 3, с. 441-444.

28. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд. АН СССР, 1959. 346 с.
29. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. - "Докл. АН СССР", 1957, т. 115, № 6, с. 1058-1061.
30. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - "Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 2. Математика, механика, астрономия, вып. 7, с. 52-59.
31. КОЛМОГОРОВ А.Н. О сходимости А.В.Скорохода. - "Теория вероятностей и ее применения", 1956, т. 1, вып.2, с.239-247.
32. КРЕЙН М.Г. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве. - В кн.: Ахиезер Н. и Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938, с.171-199.
33. KUHN H.W., TUCKER A.W. Nonlinear programming.- In:Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 2nd. Proceedings... Berkeley, 1951, p. 481-492.
34. KOOPMANS T.S. Optimum utilisation of the transportation systems.-"Econometrica", 1949. v.17, p.136-146.

35. См. [75].
36. КЕЛЛИ Э. О совокупностях выпуклых тел с общими точками.- "Успехи мат. наук", 1936, вып. 2, с. 80-81.
37. NEUMAN J. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.-"Math.ann." 1928, Bd.100, s.295-320.
38. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. - "Изв. АН СССР, сер. мат.", 1946, т. 10, № 3, с. 207-256.
39. РАЙКОВ Д.А. Векторные пространства. М., Физматгиз, 1962. 211 с.
40. РЕМЕЗ Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, изд. АН УССР, 1957. 454 с.
41. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об отделении и разделении выпуклых множеств. - "Докл. АН СССР", 1951, т. 78, № 2, с. 213-215.
42. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Общее решение конечной системы линейных неравенств. - "Успехи мат. наук", 1954, т. 9, вып. 2, с. 171-177.
43. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и некоторые ее приложения. - "Успехи мат. наук", 1955, т. 10, вып. 4, с. 206-207.
44. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником и ее приложение к исследованию конечной системы линейных неравенств. - "Докл. АН СССР", 1955, т. 100, № 4, с. 627-630.
45. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном методе исследования выпуклых множеств. - "Докл. АН СССР", 1955, т. 102, № 3, с. 451-454.
46. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником. - "Докл. АН СССР", 1957, т. 113, № 5, с. 987-990.

47. См. [29].
48. См. [30].
49. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Экстремальные планово-производственные задачи и линейное программирование. - В кн.: Математика в СССР за 40 лет. Т. I, М., 1959, с. 848-850.
50. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Линейное программирование в СССР. - В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М.,1959, с.403-420.
51. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Численные методы решения задач линейного программирования. - В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. М., 1959, с.437-460.
52. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О равномерном приближении непрерывной функции с помощью обобщенных рациональных функций. - "Успехи мат. наук", 1960, т.15, вып. 3, с.232-234.
53. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых экстремальных задачах экономического характера, идейно близких к задаче Чебышева о наилучшем равномерном приближении. - В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М., 1961, с.342-347.
54. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Численные методы решения задач линейного программирования. - В кн.: Линейное программирование. Труды науч. совещания по применению мат. методов в экономике. Т. 4. М., 1961, с.7-19.
55. См. [7].
56. См. [2].
57. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственные экстремальные задачи. -"Докл. АН СССР", 1963, т. 152, № 2, с.288-291.
58. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Теоремы отделимости выпуклых множеств. - "Сибир. мат. журн.", 1964, т. 5, № 5, с.1098-1124.
59. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О решении задач линейного программирования большого объема. - В сб.: Оптимальное планирование. Вып. 2. Новосибирск, 1964, с.3-22.
60. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одной экстремальной задаче в линейном нормированном пространстве. - "Сибир. мат. журн.", 1965, т. 6, № 3, с.711-714.
61. См. [3].
62. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Применение теории игр к решению простейших тактических задач. НИР В-1310. Л., ВМАКВ, 1958. 28 с.
63. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О наилучших приближениях вектор-функций. НИР Н-1318, Л., ВМОЛА, 1960. 48 с.
64. СУРИН С.С. См. [7].
65. ТАККЕР А.У. См. [12].
66. См. [33].
67. ТИМАН А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. Физматгиз, 1960. 624 с.
68. УДЗАВА Х. Теорема Куна-Таккера о вогнутом программировании. - В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы. М., 1959, с. 57-64.

69. FICHTENHOLZ G. Sur les opérations linèaires dans l'espase des fonctions continues.-"Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belgique", 1936, 5 sr., t. 22, p. 26-33.

70. ХАВИНСОН С.Я. Экстремальные и аппроксимационные проблемы с дополнительными условиями. - В кн.: Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.,1961, с.347-352.

71. ХАВИНСОН С.Я. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций. - "Успехи мат. наук", 1963, т. 13, вып. 2, с. 25-98.

72. ХАЛМОШ П. Теория меры. М., Изд. иностр. лит., 1953. 291с.

73. CHARNES A. Optimality and degeneracy in linear programming.-"Econometrica", 1952, v. 20, N2, p. 160-170.

74. ЯКОВЛЕВА М.А. Двухкомпонентные задачи линейного программирования. - В сб.: Оптимальное планирование. Вып. 2. Новосибирск, 1964, с. 23-40.

75. Activity analysis of production and allocation. Ed. Koopmans T.C. New York, Willey, 1951. (Cowles Commission Monograph N13.).

76. Линейные неравенства и смежные вопросы. Под ред. Г.У.Куна и А.У.Таккера. М., Изд. иностр. лит., 1959. 470 с.

77. Применение математики в экономических исследованиях. Ред. В.С.Немчинов. М., Соцэкгиз, 1959. 486 с.

78. Линейное программирование. Труды науч. совещания по применению мат. методов в экономике. Т. 4. М., Изд. АН СССР, 1961. 131 с.

79. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Ред. В.И.Смирнов. М., Физматгиз, 1961. 368 с.

80. Исследование по линейному и нелинейному программированию. М., Изд. иностр. лит., 1962. 335 с.

81. Оптимальное планирование. Вып. 2 (Алгорифмы). Новосибирск, 1964. 75 с.

82. КАРЛИН С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., "Мир", 1964. 838 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
10. XI. 1972 г.